

Эйнштейннің салыстырмалықтың улыұмалық принципі

(Қарақалпақ тилине аударған Б.Әбдикамалов)

Эйнштейннің салыстырмалықтың принципі бойынша ең биринши жұмысы ретінде 1914-жылы Берлин Илимлер Академиясының протоколларында пайда болған „Die formale GrundSagen der allgemeiner Relativitatstheorie“) (Улыұмалық салыстырмалық теориясының формал тийкарлары) (Berlin. Sitzungsberiehte der Preussischen Akademie der Wissenscften. 1914. T. XLI) жұмысын қабыл етиұ керек. Бир қанша дүзетиұлер қосымшалар киргизилген бул жұмыс 1916-жылы Annalen d.Physik журналында жарық көрди. Мақаланың оттисклери сатыұға тарқатылды. Усының салдарынан Эйнштейннің жұмысы көпшиликке белгили болды. 1915-1916 жыллары Лейденде салыстырмалылық теориясы бойынша лекциялар оқыған Lorentz бул теорияны «Эйнштейннің тартылыс теориясы», математик Hubert 1915-1916 жыллары жарық көрген мақалаларын «Die Grundlagen der Physik» (Физика тийкарлары), ал математик Weyl 1918-жылы шыққан хәм бул теорияға бағышлаған китабын „Raum, Zeit, Malerie" (Кеңислик, ўақыт, материя) деп атады. Усы атлардың өзи Эйнштейн тәрeпинен дөрeтилген теорияның барлық физиканы қамтыйтуғынлығын көрсетеди, ал бундай теорияның үлкен қызығыұшылықты пайда етпеұи мүмкин емес. Сонлықтан бул теория пайда болыұдан оның менен Lorentz, Hubert, Weyl усаған атақлы физиклер менен математиклер шуғыллана баслады. Бирақ теорияны белгили бир дәрежеде толық хәм тийкарлы етип баянлаұ физиклер ушын үлкен қыйыншылық пайда ететуғын жүдә қурамалы математикалық аппаратты талап етеди. Бул теорияны көпшилик ушын баянлаұ оның қаншама жақсы жазылғанлығына қарамастан түсиниксиз, дәл емес, думан тәризли образларды ғана бере алады. Бул мақала да қысқа болғанлығына байланысly Эйнштейннің теориясына жеткиликли дәрежеде толық түсиник бере алмайды. Оның мақсети тийкарғы жағдайларды анықлаұ хәм соларды еки ямаса үш салыстырмалы әпиұайы мәселелерди шешиұ ушын қолланыұ болып табылады (мысалы дәслепки ўақытлары көп шаўқым пайда еткен Меркурийдің перигелийиниң қозғалысы хәм Қуяштың тартылыс майданындағы жақтылық нурының бағытының өзгериси). Эйнштейннің басшылыққа алған тийкарғы жағдайларын дурыслығы тастыйықланған хәм гүман пайда етпейтуғын теоремалардан дедуктивлик усыл менен келтирип шығарыұ мүмкин болған теоремалар деп қараұға болмайтуғынлығы өз-өзинен түсиникли. Теорияның тийкарларын түсиндириұ усы теорияның дөретилиұине себеп болған жағдайларды хәм усы жағдайлардың не себепли тийкарғы екенлигин түсиндириұ (дурысырағы сол жағдайларды избе-изликте атап өтиұ) болып табылады. Теорияның дурыслығына дәлилди а priori де емес (алдын ала емес), ал а posteriori де (алынған нәтижелери бойынша) излеұ керек. Бирақ Эйнштейннің теориясында нәтижелериниң эксперименталлық тастыйықланыұы ямаса усы теория тийкарында усы ўақытларға шекем белгисиз болған кубылысларды болжаұлар әхмийетке ийе болмайды. Эйнштейн теориясының тийкарлары оғада үлкен принципиаллық мәниске ийе, усы мәнистен теорияның ең баслы қәдирлилигин излеұ керек. Ал Эйнштейн теориясын тастыйықлайтуғын бир неше тәжирийбелер (бул тәжирийбелер қаншама әжайып түрде өткерилген болса да) принципиаллық мәниске ийе емес.

Геометрия хәм физика. Эйнштейнге шекем геометрия менен физика хәр қыйлы болған еки илим сыпатында қабыл етилип келди. Физикада геометрияға физикаға қатнасы бойынша сыртқы бир нәрсе сыпатында қаралды. Физиканың хақыйқый мазмұны тәжирийбеде, тек тәжирийбеде берилди. Үш өлшемли кеңисликтiң Евклид геометриясы тек ғана рамка (зәрүрли болған рамка) хызметин атқарды. Себеби барлық физикалық кубылыслар усы кубылысларға пүткиллей байланыссыз болған кеңисликте өтеди. Бирақ хәзирги ўақытлары «дара (гейде арнаулы) салыстырмалылық теориясы» деп аталатуғын

теорияда (1905-жыл) Minkowski Евклид геометриясының барлық белгилерине ийе емес 4 өлшемлі кеңістіктің геометриясынан пайдаланды. Бул геометрия физика менен усы геометрияға кириўши жақтылықтың тезлигине тең турақлы шама менен байланысқан. Бул геометрияда узынлық элементи $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$ аңлатпасы жәрдемінде анықланады. Бул аңлатпадағы x, y, z кеңістік координаталарын аңлатады, t ўақыт, ал c жақтылықтың тезлиги. Бул Евклид геометриясы емес, себеби Евклид геометриясында болса $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dc^2 t^2$ аңлатпасына ийе болған болар едик. Буннан басқа бул геометрияда жақтылықтың тезлиги c қатнасуғын болғанлықтан физика менен байланысқан деп есаплаймыз. Бирақ Minkowski геометриясына формал характерге ийе нәрсе сыпатында қаралды ($\sqrt{-1}$ ге қараған сыяқлы) хәм физика менен геометрия арасында тығыз байланыс еле де орын алған жоқ.

Солай етип физика ушын геометрия қандай да бир сыртқы, мазмуны бойынша өзге рамка болып есапланды. Ал базы бир геометрлер физиканы тәжирибелериниң нәтижелери геометрияның тийкарларын тастыйықлаў ушын зәрүр болған илим деп қабыл етти.

Биз бул жерде тәжирийбе менен аксиомалар ямаса олар жәрдемінде келтирилип шығарылған геометрияның теоремалары арасындағы байланыс ҳаққындағы мәселени қараў менен шекленемиз. Бул пунктти анықлаў Эйнштейнниң геометрияға болған көз қарасларын түсиниў ушын әҳмийетке ийе.

Тек бир Евклид геометриясы бар ўақытта оның аксиомаларының «физикалық» ҳақыйқат екенлигине ҳеш бир гүман пайда болған жоқ. Бирақ усыған қарамастан Гаусс үш мүйешликтиң ишки мүйешлериниң қосындысының еки туўры мүйешке тең екенлигин тексерип көриў ушын тиккелей тәжирийбениң қойылыўы зүрүр деп есаплады. Лобачевский, Риман хәм басқалардың геометрияларының пайда болыўы менен геометрияны тәжирийбеде тексерип көриўдиң зәрүрлиги үлкен әҳмийетке ийе бола баслады. Евклидтиң бир постулаты бойынша берилген ноқат арқалы берилген туўрыға параллел етип тек бир туўрыны жүргизиў мүмкин. Ал Лобачевскийдиң геометриясы бул постулатты бийкарлайды хәм сол ноқат арқалы берилген туўрыға параллел етип шексиз көп санлы туўрыларды өткериў мүмкин деп тастыйықлайды. Риманның сфералық геометриясы деп аталатуғын геометрия өз ара параллел болған туўрылардың болыўын пүткиллей бийкарлайды. Лобачевский де, Риман да Евклидтиң басқа барлық аксиомаларын қабыл етеди. Усы геометриялардың екеўи де логикалық жақтан мүмкин хәм ҳеш қандай ишки қарама-қарсылықларға ийе емес. Үш мүйешликлердиң ишки мүйешлери ушын Лобачевский де, Риман да еки туўры мүйешке тең мүйеш таппайды. Лобачевскийде мүйешлердиң қосындысы еки туўры мүйештен киши, ал Риманда болса үлкен. Гаусс өзи жүргизген тәжирийбеде бақлаўлардың қәтелиги шеклеринде үш мүйешликтиң ишки мүйешлериниң қосындысының еки туўры мүйешке тең екенлигине ийе болды. Мүйешлерди өлшеўди үлкен дәлликте жүргизиў мүмкин. Сонлықтан Гаусс тәжирийбесиниң жуўмақларын ҳақыйқый «физикалық» кеңістіктің (барлық физикалық қубылыслар жүзеге келетуғын кеңістік, ал логикалық қурыў мүмкин болған кеңістік емес) әдеттеги биз ушын таныс болған Евклид кеңіслиги екенлигиниң дәлили сыпатында қараў мүмкин. Бирақ, бириншиден, Евклид геометриясынан айырма жүдә киши болыўы мүмкин. Бундай жағдайда бул айырма тәжирийбелердиң дәллиги шеклеринде сезилмейди. Екиншиден тәжирийбе үлкен дәлликте үш мүйешликтиң ишки мүйешлериниң қосындысының еки туўры мүйешке тең екенлигин көрсеткен болса да төменде гәп етилетуғын оғада әҳмийетли болған жағдайды есапқа алғанда физикалық кеңістікти Евклидлик деп айта алмаймыз.

Биз тәжирийбе еки туўры мүйештиң қосындысынан кем болған мүйешти берди деп есаплайық. Буннан физик Евклид геометриясы дурыс емес деп жуўмақ шығара алама? Ең дәслеп ол мүйеш қалай өлшенди деп сораған болар еди. Оған мүйешлерге бөлінген шеңбер хәм көриў трубасы жәрдемінде деп жуўап берилген болар еди. Көриў трубасын қолланыў жақтылық нурын үш мүйешликтиң еки төбесин тутастыратуғын туўры сызық

сыпатында қабыл етиуді аңлатады. Бундай жағдайда физик екі туұры мүйештин қосындысынан аұытқыұды Евклид геометриясының дурыс емеслиги менен байланыстырмайды, ал жақтылық нурының «қыйсайыұы» менен байланыстырады. Ал Лобачевский геометриясының көз-қарасында турған физик болса Лобачевскийдің сәйкес теоремасынан аұытқыұды нурдың «қыйсайыұы» менен түсіндирер еди (керисинше, қосынды екі туұры мүйешке тең болып шықсада Лобачевский геометриясы көз-қарасларында турыұды қәлеуши физик Лобачевский теоремасына сәйкес келмесликті нурдың «қыйсайыұы» менен түсіндірген болар еди). Бірақ нурдың қыйсайыұы хаққында айтып турған физик сол қыйсайыұларды қандайда бир жоллар менен анықлау мүмкін деп, ал буны әмелге асырыу үшін хақыйқый туұры сызықты беретуғын басқа бир «физикалық» аппарат керек деп есаплайды. Усы «хақыйқый сызық» пенен жақтылық нурын салыстырып жақтылық нурының хақыйқатында да қыйсайғанлығын көрсетип жаңа аппарат ишки мүйешлердің қосындысының екі туұры мүйешке тең екенлигин дәлиллеген болар еди. Бірақ оның «қуұанышы» тек «үстиртин» болады хәм узаққа бармайды Лобачевский көз-қарасында турған адам жаңа аппараттың хақыйқатында да туұры сызықты беретуғынлығын дәлиллеуді сораған болар еди. Ал бизің физик болса басқа аппаратты ойлап таппай бул сорауға жууап бере алмаған болар еди. Аппаратларды шексиз көп түрлі етип ойлап таба беріу мүмкін емес болғанлықтан биз өзимиздің тийкарғы аппаратымызға (жақтылық нурына) туұрының (сызықтың) қәсийетин беріуге мәжбүр боламыз. Бірақ жоқарыда айтылғанларға байланысly жақтылық нурына туұры сызықтың қәсийетин беріу бизің пүткіллей бизің ықтыярымызға байланысly болып шықты. Бул жағдайға биз мына себеплерге байланысly дыққат аудардық: Эйнштейн тәрөпинен пайдаланылған геометрия Евклид геометриясы емес. Усыған байланысly Эйнштейн теориясының дурыс ямаса дурыс емеслиги Евклид геометриясының дурыс ямаса дурыс емес екенлигинің дәлилі сыпатында көриниұи мүмкін. Бірақ олай емес. Евклид геометриясын дурыс деп есаплаушылар Эйнштейннің көз-қарасларынан хәм теорияларынан ғәрезсиз өзлеринің пикирлеринде тура беріуи мүмкін. *Бірақ бундай жағдайларда ол тийкарғы өлшеу әсбаплары болған жақтылық нурын, сызғыштың қырын туұрылар деп есаплаудан бас тартыуы керек.* Егер жақтылық нурын туұры, сызғыштың қырын туұры деп есаплайтуғын болсақ, онда Гаусс тәрөпинен өткерілген өлшеулерге қарағанда дәл өткерілген өлшеулер Евклид геометриясынан аұытқыұды береді.

Бірақ өткерілген бақлаулардың қандай жууақларды бергенлигинен ямаса беретуғынлығынан ғәрезсиз *принципиаллық көз-қарастан туұры физикалық жақтан жақтылық нурының жәрдемінде анықланатуғын болса*, онда *физикалық кеңислик үшін қандай геометрияның дурыс екенлигин тек тәжірийбе көрсете алады.* Бірақ геометриялардың саны оғада көп. Оларды эксперименттерде қалай тексерип көреміз? Геометриялардың қандай жууақларын хәм талаптарын тексерип көріу керек? Өзгермейтуғын фигуралардың орын алмасыуы мүмкін (кеңисликтеги фигураны бир орыннан екінші орынға көшириу, қатты денелердің бар екенлиги хәм басқалар) геометриялар саны оғада көп. Олардың баслылары: Лобачевский, Риман, Евклид геометриялары. Геометриялардың әдеуір үлкен классын Риман геометриялары деп аталатуғын геометриялар өз ишине алады. Өзинің геометрияларының тийкарына Риман тийкарғы етип узынлық элементин жатқарады.

Мейли биз n өлшемге ийе кеңисликке ийе болайық. Усы кеңисликтеги ноқаттың аұхалын анықлайтуғын n координатаны $x_1, x_2, \dots, x_n$ деп белгилейик. Доғаның узынлығының элементи ds болсын. Бул геометрия үшін

$$ds^2 = \sum_{ik} a_{ik} dx_i dx_k$$

аңлатпасы характерли аңлатпа болып табылады. Бул аңлатпадағы a_{ij} шамасы $x_1, x_2, \dots, x_n$ лердің функциясы болып табылады хәм қарап атырылған геометрия үшін характерли

шама болып табылады. Хәр бир геометрия үшін a_{ij} базы бир анық түрге ийе болады. Мысалы Евклид геометриясы хәм үш өлшемли кеңислик үшін

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2,$$

ал Лобачевский геометриясы үшін

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{1 - \frac{a^2}{4}(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Бул аңлатпадағы a базы бир турақлы шама.

$$ds^2 = \sum_{ik} a_{ik} dx_k \text{ деп жазыў арқалы биз тек параллеллер ҳақындағы Евклид}$$

аксиомасынан ғана емес, ал басқа да базы бир аксиомалардан қутыламыз. Соның менен бирге улыўма жағдайларда фигураларды бир орыннан екінши орынға көшириў ямаса бир бириниң үстине қойыў аксиомалары дурыс болмай шығады (бал аксиомалар Евклидте жок). Бул Эйнштейн бойынша хәр бир геометрия үшін жазылған қатнас тәжирийбеде тексерилип көрилген болыўы керек. Әлбетте бул жерде идеал ойдағы тәжирийбениң орын алыўы мүмкин. Ал ҳақыйқатында ds аңлатпасы тәжирийбеде тексерилмейди, ал оннан келтирилип шығылатуғын жуўмақлар тексерийлерге ушырайды. Егер тәжирийбе үш өлшемли кеңисликте $i \neq k$ үшін $a_{ij} = 0$ ны, ал $i = k$ үшін $a_{ij} = 1$ ди беретугын болса, онда биз Евклид геометриясына ийе боламыз. Ал a_{ij} шамасы координаталардың функциясы болса, онда характери усы функцияның түринен ғәрезли болған геометрияға ийе боламыз.

Эйнштейнниң «арнаўлы» принципінде ўақыт кеңисликтеги өлшемлер менен тығыз байланысқан хәм олардан айрылмайтуғын шама сыпатында қаралады. Сонлықтан төрт өлшемли кеңисликке ийе боламыз хәм бул жағдайда ўақыт координаталардың биреўиниң орнын ийелейди. Хәр бир физикалық кубылыс усы кубылыс жүз берген орын (үш кеңисликлик координата) хәм кубылыс жүз берген ўақыт моменти менен анықланады (ўақыт координатасы). Бул төрт координаталардың өсиминен узынлық элементи үшін аңлатпа алынады:

$$ds^2 = \sum a_{ik} dx_i dx_k, \quad i, k = 1, 2, 3, 4;$$

Бул аңлатпадағы төрт координата да бирдей орынды ийелейди. Бирақ ўақыт (айтайық x_4 арқалы белгиленген болсын) кеңисликлик x_1, x_2, x_3 координаталары менен бир емес. Hilbert тәрепинен барлық теорияларда да ўақыт координатасы өзине тән қәсийетлерге ийе болыўы үшін a_{ij} шамалары қанаатландыратуғын шәртлер анықланды.

Эйнштейнниң биринши қәдеси. Солай етип Эйнштейнниң биринши қәдесиниң мәниси төмендегиден ибарат:

Узынлық элементи

$$ds^2 = \sum_{ik} a_{ik} dx_i dx_k, \quad i, k = 1, 2, 3, 4$$

формуласы жәрдемінде анықланады хәм a_{ij} функциясының мәнисиниң неге тең екенлигин тәжирийбе анықлайды.

Геометрия хәм механика. Ньютон механикасы туўры сызықлы хәм тең өлшеўли қозғалысқа айрықша әхмийет береді. Егер бир берилген координата системасының орнына усы координата системасына салыстырғанда туўры сызықлы хәм тең өлшеўли қозғалатуғын басқа системаны алатуғын болсақ, онда буны туўрыдан туўры қойылған физикалық тәжирийбе жәрдемінде анықлаў мүмкин емес. Басқа түрли қәлеген қозғалыс тәжирийбеде бақланады. Себеби бундай жағдайларда жаңа күшлер пайда болады.

Әпиұайы мысалды – шеңбер бойынша қозғалысты қарайық. Бул жағдай бизге еки әхмийетли фактти көрсетиўге мүмкиншилик береді. Бириншиси принципаллық характерге, ал екиншиси эксперименталлық характерге ийе.

Шар формасына ийе физикалық денени алайық хәм барлық кеңисликте бул шардан басқа дене жоқ деп есаплайық. Биз усы шар айланама ямаса айланбайма деген сораўға жуўап бере аламыз ба? Бул сораўға жуўап беріў ушын шардан сыртта хеш бир физикалық дене ямаса физикалық ноқат жоқ. Биз шардың бетинде ямаса оның ишинде нениң болатуғынлығына қараўымыз керек. Мейли биз шардың бетинде базы бир шамадағы орайдан қашыўшы күшти тапқан болайық хәм шардың полюслеринде бир қанша қысылғанлығын, Фуко маятникгиниң тербеліс тегислигиниң айланатуғынлығын байқаған болайық. Усының тийкарында биз шарды айланып тур деп болжаймыз хәм хәтте оның айланыс тезлигин де есаплаймыз. Бирақ дәрхәл сораў туўылады: неге салыстырғанда шар айланады. Өйткени этирапта салыстырарлықтай физикалық дене жоқ деп есаплаган едик қо. Әлбетте өзи тәрәпинен сезилмейтуғын, ишинде хеш бир физикалық дене жоқ қандай да бир кеңисликтің болыўы керек. Өне усы «абсолют», физикалық емес кеңисликке салыстырғанда шардың айланыўы орын алады. Бирақ физикалық хақыйқатлыққа ийе емес «нәрселер» физикалық бақлаўларда сезилмейди хәм олар физикаға тийисли емес. Бундай абсолют кеңисликке исениўге де болады, исенбеўге де болады. Бирақ физикалық кубылысларды түсиндириў ушын хақыйқый физикалық объект деп алыўға болмайды. Бирақ бундай жағдайларда Ньютон механикасы «физикалық» жуўап беріў мүмкин емес сораўларға жуўап бере алады деп айтыўға туўра келеді. Бул парадокс хәм оған биринши болып Mach итибар берди. Einstein бул умытылған парадоксты қайтадан еске түсирди хәм оған жуўап берди: улыўма айтқанда Ньютон механикасы дурыс емес. Хақыйқый механика бундай шар ушын орайдан қашыўшы күшти де, Фуко маятникгиниң тербеліс тегислигиниң айланысын да х.т.б. бермейди – бул күшлер менен кубылыслардың барлығы да айланыс басқа бир «физикалық» кеңисликке салыстырғанда әмелге асқанда ғана пайда болады. Туўры сезықлы тең өлшеўли қозғалыс та хеш қандай әхмийетке ийе болмай қалады. Тап сол сыяқлы шеңбер бойынша қозғалыс хәм олардың мүмкин болған барлық қозғалыслары да өз-ара бирдей. Егер тек бир шарға ийе болсақ, басқа хеш нәрсе де болмаса, онда биз оны айланып тур, жылжып баратыр, тынышлықта тур хәм басқа да халларда тур деп айта аламыз. Бирақ хеш бир физикалық кубылыс бул қозғалысларды таба (сезе) алмайды. Себеби бул айтылған қозғалыслардың барлығы да «физикалық» кеңисликке салыстырғанда емес, ал хақыйқый кеңисликке сәйкес келмейтуғын бизиң ойымызға (қыялымызға) салыстырғанда жүзеге келтирилген. Усындай әўлад механиканың мүмкин екенлигин көрсетиў Эйнштейнниң уллы хызметі болып табылады.

Айланыў орын алғанда бақланатуғын әхмийетли факт орайдан қашыўшы күштиң барлық ўақытта да айланыўшы денениң массасына пропорционаллығында. Ньютон нызамы бойынша тартысыў күши де массаға пропорционал. Ньютон нызамы аңлатпасында масса тартысыўды пайда етиўши себеп сыпатында қатнасады. Ал айланбалы қозғалыстың себебинен пайда болатуғын орайдан қашыўшы күштиң аңлатпасында масса пүткиллей пассив орынды ийелейди. Күшти актив түрде пайда ететуғын масса хәм әпиұайы санлық коэффицент болған инерт ямаса пассив масса тәжирийбеде тексерилгенде оғада үлкен дәлликте бир бирине тең болып шығады. Бул әйтеўирден әйтеўир келип шыққан факт емес, ал Ньютон механикасы бул фактти түсиндире алмайды. Ньютон өзиниң екинши нызамында инерт масса көбейтилген тезлениў күшке тең деген жағдайды тек постулат сыпатында усынады. Актив, тартылысты пайда ететуғын масса менен пассив, инерт массаның бирдейлигин Эйнштейн принцип дәрежесине жеткереди хәм оны эквивалентлик принципі деп атайды.

Тынышлықта турған K есаплаў системасын көз алдымызға елеслетейик. Мейли бул координатаға салыстырғанда K' есаплаў системасы тең өлшеўли тезлениўши хәм туўры сызық бойынша қозғалатуғын болсын. K ға салыстырғанда туўры сызықлы траектория бойынша қозғалатуғын материаллық ноқат K' та парабола бойынша қозғалады. Егер K'

тың қозғалыс бағыты менен параболаның көшери ушын x көшери алынатұғын болса, онда K' системасында

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g = \text{турақлы.}$$

Егер m арқалы нүктенің массасы берілген болса, онда $m \frac{d^2x}{dt^2} = mg$ түрінде жазылған хәр бір теңлемени инерт масса менен тезлениудің көбеймеси хәм mg күшинің теңлігінің аңлатпасы сыпатында қарау мүмкін. Эквиваленттік принципі тийкарында mg күшін тартылыс күші деп қарау мүмкін. Сонлықтан бул жағдайда m массасы инерт масса емес, ал Жердің бетінде $\frac{mM}{r^2}$ (m арқалы салмақты дененің массасы, M арқалы Жердің массасы, r арқалы Жердің радиусы белгіленген) салмақты пайда ететұғын актив масса деп қарау мүмкін. Қала берсе бул жағдайда m күшті қоздырыушы болып табылады.

Солай етип системаның тезлениуші хәм тууры сызықты қозғалысы бақлаушы тәрепинен сезілмеуі де мүмкін екен (тезлениуші қозғалыс тартылыс майданына эквивалент деп есаплайтуғын болсақ, бундай жағдайда бақлаушы өзі этирапында толып атырған кубылыстарды тартылыстың салдары деп қабыл етеді). Орайдан қашыушы күшті де эквиваленттік принципі тийкарында өзінің тәбияты бойынша салмақ күшіне сәйкес келиуші хәм оннан айырмасы жоқ күш сыпатында қарау мүмкін. Усындай сөзлерді қозғалушы дене менен байланысқан координаталар системасында кинематикалық пайда болатұғын барлық күшлер хакқында айтыу мүмкін.

Тәбиятта өзінің дөгерегінде тартылыс майданы деп аталатуғын майдан пайда ететұғын массалар бар. Егер биз қандайда бир K^* координатасын алатуғын болсақ, онда тартылыс майданының характери бизің қайсы координаталар системасын сайлап алғанымызға байланысly болады. Егер биз K^* ға салыстырғанда қозғалушы басқа бир K^* , координаталар системасын сайлап алсақ басқа тартылыс майданына ийе боламыз. K^* , координаталар системасы менен бирлікте биз қозғалатуғын болсақ K^* , те болып атырған барлық кубылыстарды K^* , тың K^* ға салыстырғандағы қозғалысы менен байланыстырмаған, ал K^* , теги майдан менен байланыстырған болар едик (бул системадағы майдан K^* теги майданнан басқа).

Бирақ ықтыярлы түрде алынған бир координаталар системасынан екіншісине өтиу физикалық кеңістіктің геометриясының қасиетлерін анықлайтуғын a_{ik} функцияларының өзгерісіне алып келеді. Егер бир координаталар системасында

$$ds^2 = \sum_{ik} a_{ik} dx_i dx_k \quad i, k = 1, 2, 3, 4$$

аңлатпасына ийе болсақ, онда K^* , системасы ушын мынаны аламыз

$$ds^2 = \sum_{ik} a'_{ik} dx'_i dx'_k.$$

Координаталар x_i менен x'_i арасындағы байланыс ықтыярлы болғанлықтан $a_{ik} \neq a'_{ik}$ екенлігі өз-өзінен көринип тур.

Енди бир координаталар системасынан екіншісине өтиу тек тартылыс майданын ғана емес, ал физикалық кеңістіктің геометриясын да өзгертеді деп есаплауға туура келеді. Бул жағдай тартылыс майданы менен a_{ik} арасында байланыстың бар екенлігін көрсетеді.

Усындай тийкарда Эйнштейн a_{ik} шамаларын тартылыс потенциаллары деп атады хәм оларды Жердегі еркін түсіу тезлениуінің белгіленуіне сәйкес g_{ik} арқалы белгіледі.

Бирақ бул ат жоқарыда айтылған тартылыс пенен геометрия арасындағы параллеликтен басқа хеш нәрсени өз ишине қамтымайды.

Эйнштейннің екінші тийкаргы қәдеси. Солай етип Мах парадоксын қарап Эйнштейн бир туўры сызықлы хәм тең өлшеўли координаталар системасынан екінші туўры сызықлы хәм тең өлшеўли координаталар системасына өтиўдин мүмкин екенлиги менен бир қатар барлық координаталық түрлендириўлердин мүмкин екен деген жуўмаққа келди (буған қозғалыс та киретуғын болғанлықтан жаңа x'_i , $i = 1, 2, 3, 4$ координаталары төрт x_i , $i = 1, 2, 3, 4$ координаталарының ықтыярлы функциялары бола алады).

Эйнштейннің үшінші тийкаргы қәдеси. Эквивалентлик принципін қарап Эйнштейн мына жуўмаққа келеди: *Физикалық кеңісликтің қасиетлерін анықлаўшы доға элементі, яғный*

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} dx_i dx_k \quad i, k = 1, 2, 3, 4$$

өз ишине 10 дана g_{ik} функцияларын алады. Берілген координаталар системасындағы геометрияның формасы да, тартылыс майданы да усы функциялардан ғәрезли болады.

Эйнштейннің төртінші тийкаргы қәдеси.

Жоқарыда келтирилген тийкарында механика менен физиканы дүзиў ушын және де бир ескертиўди есапқа алыў керек. Егер координаталар системасын сайлап алыў ықтыярлы түрде жүргизилетуғын болса, онда оның жәрдемінде тәбиятты қалай тәриплеймиз? Биз тәрептен ықтыярлы түрде жүргизилген ислерден ғәрезсиз болған нәтижелерди қалай аламыз? Тәбияттың ыңзамлары бизиң ықтыярымыздан ғәрезсиз ғо. Бул сораўларға жуўап өз өзинен бериледи: тәбияттың ыңзамлары бизиң ықтыярымыздан ғәрезсиз болғанлықтан, ол ыңзамлар да биз тәрептен сайлап алынған координаталар системаларынан ғәрезсиз болыўы керек. Математика тилинде тәбияттың ыңзамлары қәлеген координаталық түрлендириўлерге қарата инвариант болыўы керек. Данышпан Эйнштейнге координаталар системасын сайлап алыўдан ғәрезсиз хәм инвариант болған физика менен механиканың ыңзамларын табыўдың хәм дүзиўдин сәти түсти. Механика менен физиканың тийкаргы теңлемелерін тәриплейге биз хәзир өтеміз. Усыған шекем айтылғанлардың Эйнштейн тәрепинен жүрип өтилген жолды ғана түсіндиреди. Ал оның қәделериниң дурыс екенлигин көрсетиў хызметин атқара алмайды (Эйнштейннің тастыйықлаўлары Ньютон механикасының сәйкес тастыйықлаўлары алдында айқын артықмашлықларға ийе болса да).

Эйнштейннің тийкаргы теңлемелери. Биз теңлемелерди алыў ушын Эйнштейн тәрепинен өтилген жол менен жүрмеймиз, ал теорияны аңсатырақ жол менен баянлаған Hilbert бойынша жүреміз. Эйнштейн өзиниң дәслепки жумысларында Poisson ның $\Delta\phi = 4\pi\rho$ теңлемесинен баслайды. Бул аңлатпадағы ϕ тартылыстың әдеттеги потенциалы, ρ материяның тығызлығы. Тартылыс потенциалы ϕ диң орнына 10 дана g_{ik} , ρ ның орнына материяның халын анықлаўшы 10 дана басқа шаманы алып $\Delta\phi = 4\pi\rho$ теңлемесин улыўмаластырыў Эйнштейнге теңлемелерін алыўға хәм олардың дурыслығын дәлиллейге мүмкиншилик берди. Бирақ теңлемени улыўмаластырыў процесси усындай усыл менен алынған нәтижелердин мәнислерін бахалаў ушын әпиўайы хәм бир мәнисли емес. Hilbert пенен биргеликте тәбиятта жүзеге келетуғын барлық ўақыялар базы бир N «дүньялық» функциясынан ғәрезли болады деп есаплаймыз. Бул N функциясы төрт x_1, x_2, x_3, x_4 координаталарынан ғәрезли болады. Олардың үшеўи кеңісликлик, төртіншиси усы координаталар системасында ўақытты аңлатады. N функциясы биз тәрепинен сайлап алынған координаталар системасынан ғәрезли емес. Бул координаталардан N функциясы төмендеги шамалар арқалы ғәрезли болады:

1) 10 дана g_{ik} функциялары хәм олардың x_i бойынша туўындылары; биз N тың қәлеген тәртиптеги туўындыларға ғәрезлилигин нәзерде тута алар едик: бирақ Poisson теңлемесине сәйкес биз N ты тек g_{ik} дан хәм биринши хәм екінші туўындылардан ғәрезли

деп қабыл етеміз. Бул g_{ik} лар, олардың туындылары да барлық уақытта бір мәнісін хәм үзлексіз деп қабыл етеміз.

2) Материяның халын анықлаушы параметрлерден. Бундай параметрлер ретінде материяның тығызлығын, электр зарядының тығызлығын, электр потенциалын (вектор-потенциал хәм скаляр потенциал) көрсетіу мүмкін. Егер материя теориясына усындай параметрлер жеткіліксіз болса, онда басқа да параметрлерді пайдаланыуға туура келеді. Егер материяның электромагнит теориясы көз-қарасында туратуғын болсақ, усы параметрлер ретінде тек электро зарядларының тығызлығы менен векторлық хәм скаляр потенциаллар жеткіліксіз болар еді. Егер Мие ниң көз-қарасында турсақ материя теориясын дөретіу үшін вектор-потенциалды хәм скаляр потенциалды билиу керек. Олардың бириншиси 3 қосындыдан туратуғын болғанлықтан x_1, x_2, x_3, x_4 лердің функциялары болған төрт q_1, q_2, q_3, q_4 параметрлерін билиу зәрүр. Hilbert Мие теориясының тийкарында H ты q_1, q_2, q_3, q_4 параметрлерінен хәм олардың x_i бойынша алынған биринши туындыларынан ғәрезлі деп қабыл етті. Бирақ бундай етип есаплау Эйнштейн теориясы бойынша шешилетуғын көп мәселелер үшін әхмийетке ийе емес.

Солай етип „дүньялық функция" бар деп болжаймыз:

$$H = H\left(g_{ik}, \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_1}, \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_1 \partial x_m}, q_i, \frac{\partial q_i}{\partial x_k}\right)$$

Бул аңлатпадағы $i, k, l, m = 1, 2, 3, 4$.

$$J = \int H \sqrt{g} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \quad (1)$$

интегралын қараймыз. Бул интегралдағы $dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ көлем элементи, g арқалы барлық g_{ik} лардан дүзілген детерминант, анықлама бойынша H инвариант. $\sqrt{g} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ шамасының да инвариант, яғный координата системасынан ғәрезсіз екенлігін көрсетіуге болады. Сонлықтан J аңлатпасы да $\sqrt{g} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ усы интегралдың вариациялары да инвариант.

Тәбияттағы барлық уақыялар жоқарыдағы интегралдың вариациясы нолге тең болып қалатуғындай болып жүзеге келеді, яғный

$$\delta J = 0. \quad (2)$$

Бул Эйнштейн физикасының тийкаргы нызамы болып табылады. Бул аңлатпа физиканың барлық нызамларын алмастырады (пүткіл дүньялық тартылыс нызамы, Максвелл теңлемелері, массалар арасындағы тәсірлесіулер нызамлары х.т.б.).

Нызамның әмелій әхмийеті болыуы үшін H функциясының аңлатпасын билиу керек. Бул аңлатпа бизге белгили деп есаплайық. H үшін жазылған аңлатпаға 10 белгисіз g_{ik} функциялары хәм 4 белгисіз q_i функциялары киреди. Бирақ $\delta J = 0$ шәртинен 14 дифференциал теңлеме келип шығады. Олардың биринши 10 теңлемеси g_{ik} функцияларының вариациясынан келип шығады. Оларды биз қысқаша былай белгилейміз¹

$$G_{ik} = 0, \quad i, k = 1, 2, 3, 4. \quad (3)$$

Кейинги төрт теңлеме q_i функцияларын вариациялау арқалы алынады. Оларды

¹ Теңлемелер саны 16, ал биз 10 теңлемеге ийе боламыз. Себеби g_{ik} хәм сол сыяқты G_{ik} шамалары i хәм k индекслеріне қарата симметриялы.

$$Q_i = 0 \quad (4)$$

деп белгилейміз. (3)- хәм (4)- теңлемелер системасы бизге берілген координаталар системасындағы g_{ik} менен q_i лерди анықлауға мүмкіншилик береді.

$\delta J = 0$ инвариантынан келтирилип шығарылған (3)- хәм (4)- теңлемелердің өзлери де инвариантлар болып табылады хәм биз тәрәпинен сайлап алынған координаталар системасынан ғәрезли емес.

Сайлап алынған координаталар системасының ықтыярлылығы 14 теңлемениң бир биринен ғәрезсизлигинде көринеди, бирақ олар 4 теңлик (тождество) пенен байланысқан. Бул 14 дана g_{ik} хәм q_i функцияларының төртеўиниң ықтыярлы түрде сайлап алынатуғынлығын билдиреди хәм (3)- менен (4)-теңлемелер жәрдемінде анықланбайды. 14 функциялардың ишиндеги 4 ықтыярлы мәнис пенен сайлап алынған координаталар системасы белгиленип (фиксируется) алынады.

Бирден карағанда «дүньялық» функцияның түрин анықлау ушын оғада үлкен кесентликлерден өтиу керек болатуғындай болып көринеди. Бирақ бул H функциясын кубылыслардың үлкен классы ушын дерлик бир мәнисли түрде анықлауға болады. Биз усындай жағдайды мүмкин деп болжайық. Ал теория тәрәптен берилетуғын жуўмақлар усындай жағдайлардың хақыйқаттанда да орын алатуғынлығын көрсетеди. Бундай жағдайларда q_1, q_2, q_3, q_4 параметрлери киши шамалар болыуы керек хәм сонлықтан олардың орнына $\varepsilon q_1, \varepsilon q_2, \varepsilon q_3, \varepsilon q_4$ шамаларын киргиземиз. Бул жерде ε базы бир киши сан, ал q_1, q_2, q_3, q_4 лер болса шекли мәнислерге ийе. H ты ε ниң үлкейиуши дәрежелери бойынша қатарға жаямыз. Бундай жағдайда

$$H = K' + \varepsilon L + \varepsilon^2 M + \dots$$

Бул қатардың тек биринши ағзалары болған K' хәм εL ди қараймыз. K' тек g_{ik} дан хәм бул функциялардың x_i бойынша алынған биринши хәм екинши туўындыларынан ғәрезли. L болса g_{ik} дан, оның туўындыларынан, q_i дан, оның туўындыларынан ғәрезли. H инвариант болып табылады. $K, L, M, \dots$ лер де инвариант болыуы керек. *g_{ik} ден, оның биринши хәм екинши туўындыларынан ғәрезли, тек сызықты екинши туўындыларға ийе K' инвариантларының санының тек бирге тең екен.* Бул факт оғада үлкен әхмийетке ийе. Бул бирден бир инвариант төрт өлшемли кеңисликтің Риман қыйсықлығы деп аталатуғын қыйсықлықтың шамасы болып табылады. Оны K хәрипи арқалы белгилейміз. K' тың шамасы K ға ямаса $K + \lambda$ ға тең болады (λ арқалы x_i ден ғәрезсиз болған базы бир турақлы шама белгиленген). Биз $\lambda = 0$ деп аламыз. Бирақ кейинирек ислеген жумысларында Einstein и Weyl бул шаманың қандай үлкен әхмийетке ийе болатуғынлығын анықлады. Бул мақалада жеткиликли орын болмағанлықтан бул мәселени талқыламаймыз хәм

$$K = K'$$

деп есаплаймыз.

Мейли детерминанттың $g_{\mu\nu}$ ағзасына сәйкес келиуши g_{ik} лардан пайда етилген g детерминантының миноры $D_{\mu\nu}$ болсын. $D_{\mu\nu}/g$ ны $g^{\mu\nu}$ арқалы белгилейміз. Және мынадай белгилеулер киргиземиз:

Мейли

$$\left[\begin{matrix} ik \\ m \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} (g_{imk} + g_{mki} - g_{ikm})$$

хәм мейли

$$\left\{ \begin{matrix} ik \\ m \end{matrix} \right\} = \sum_n g^{nm} \left[\begin{matrix} ik \\ m \end{matrix} \right]; \quad i, k, m, n = 1, 2, 3, 4$$

болсын. Енди

$$K = -\frac{1}{2} \sum_{ik} g^{ik} K_{ik}$$

екенлигин аңсат көрсетиўге болады. Қала берсе

$$K_{ik} = \sum_l \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \begin{matrix} kl \\ l \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_{il}} \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\} + \sum_{lm} \left\{ \begin{matrix} kl \\ m \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} mi \\ l \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} ik \\ m \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} ml \\ l \end{matrix} \right\}.$$

K_{ik} қыйсықлығы Риман тензоры деп аталады. Бул формуланы келтирип шығарыўды Bianchi диң дифференциал геометриясында табыў мүмкин. Биз улыўма жағдайларда K ушын келтирилип шығарылған аңлатпаның оғада қурамалы екенлигин көрдик. Бирақ бир қатар арнаўлы мәселелерди шешкенимизде бул аңлатпа әдеўир әпиўайыласады.

L диң аңлатпасы арнаўлы қарап шығыўды талап етеди. Бирақ егер Мие теориясына сүйенген жағдайда оның аңлатпасын табыў қыйын емес. Шварцшильд Максвелл теңлемелерин Гамильтон принципинен келтирип шығарыўдың мүмкин екенлигин көрсеткен еди. Биз A_1, A_2, A_3 вектор-потенциалының қосылыўшыларын q_1, q_2, q_3 арқалы белгилеймиз. Скаляр потенциал ϕ ды q_4 арқалы белгилеймиз. r_1, r_2, r_3 лер $\rho v_1, \rho v_2, \rho v_3$ тоқларын беретугын болсын (ρ электр зарядларының тығызлығы, v әдеттеги тезлик), r_4 тиң шамасы ρ ға тең хәм ақырында

$$M_{ik} = \frac{\partial q_k}{\partial x_i} - \frac{\partial q_i}{\partial x_k} \quad a)$$

болсын.

Енди

$$L' = \int \left(\sum_{ik} M_{ik}^2 - \sum_i r_i q_i \right) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

интегралын қараймыз хәм $\delta L' = 0$ деп есаплаймыз.

Бул интегралдың вариациясы бизге Максвелл теңлемелерин береді

$$\sum_i \frac{\partial M_{ik}}{\partial x_i} = -r_k, \quad b)$$

$$\frac{\partial M_{ik}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial M_{li}}{\partial x_k} = 0. \quad c)$$

(Әдеттеги белгилеўлерде (a) ның орнына былайынша жазады

$$E_1 = -\frac{\partial \phi}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial t} = \frac{\partial q_4}{\partial x_1} - \frac{\partial q_1}{\partial x_4} = M_{14}, \quad H_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} = M_{32} \quad \text{хәм тағы басқалар.}$$

(b) хәм (c) лардың орнына былай жазады:

$$\text{curl } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \rho \mathbf{v},$$

$$\text{curl } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

$$\text{div } \mathbf{E} = v,$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0.$$

Электр зарядлары жоқ кеңістікте L_i деги екінші ағза нөлге айналады хәм биз бослық ушын жазылған Максвелл теңлемелерін аламыз.

Міе да өзінің теориясында ұсындай L функциясын қарап шығады, бірақ екінші ағза $\sum_i q_i$ ны q_i дың функциясы болған базы бир f шамасы менен алмастырды. Сонлықтан онда электр зарядларының тығызлығы потенциал q_i дың функциясы болып шығады. Бірақ Міе өзінің теориясын ұлыұмалық салыстырмалылық принципі ушын емес, ал бирінші «арнаұлы» салыстырмалылық принципі ушын жазды. Сонлықтан оның L' шамасын Hilbert тиң «дүньялық» функциясы ушын жазылған H тың аңлатпасына тикелей қойыұ мүмкін емес. Міе ның функциясын салыстырмалылықтың ұлыұмалық принципінде пайдаланыұ ушын оны сәйкес ұлыұмаластырыұ керек хәм инвариантлар теориясында қалеген түрлендіріүге қарата инвариант аңлатпа

$$L = \int \left[\left(\sum_{iklm} M_{ik} M_{lm} g^{il} g^{km} - f \left(\sum_{ik} g^{ik} q_i q_k \right) \right) \sqrt{g} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \dots \right] \quad (6)$$

аңлатпасы болып табылады. Бул аңлатпаны Hilbert H функциясының аңлатпасына екінші ағза сыпатында қояды. Бул аңлатпа K ушын жазылған аңлатпаның өлшемлеріне ийе емес, соның ушын өлшемлерінің бирдей болыұы ушын L ди базы бир санлық коэффициент ε ге көбейтіұ керек болады². Есеплаұлар $\varepsilon = \frac{8\pi k}{c^2}$ екенлігі береді. Бул жерде k тартысыұ турақлысы, c жақтылықтың тезлігі. Демек $\varepsilon = 1,87 \cdot 10^{-27}$, яғный жүдә киші шама. Бул бизің дүньялық функция H ты шексіз қатарға жайғанымызға сәйкес келеді.

Оғада әхмийетлі болған бир фактти атап өтеміз. q_i дың хәм оның бирінші туұындыларының жәрдемінде алынатуғын ұсындай L инвариантларының саны жүдә шеклі болады. Міе тек төрт инвариантты алған хәм олардың ишінен тек Максвелл теңлемелерін дәрхәл беретүғынын сайлап алған.

Егер Міе ниң материяның электрлік теориясы көз-қарасында турмасақ, онда L ушын жазылған аңлатпаға басқа форма беріұ мүмкін. Бир қанша мәселелерді шешиұ ушын (мысалы астрономиялық мәселелерді шешиұде de Sitter менен Einstein лер) сондай басқа форма берілген. Бірақ биз кейинирек әпиұайы хәм жүдә қызықлы болған астрономиялық мәселелерді шешиұ ушын L функциясының формасының хеш қандай әхмийетке ийе болмайтуғынлығын көрсетеміз.

Солай етип биз

$$H = K + \varepsilon L$$

деп болжаймыз. Бул аңлатпада K арқалы 4 өлшемлі кеңістіктің қыйсықлығы белгіленген, ал L ушын (5) теги мәніс алынады.

Мысаллар. Енді бизлер Эйнштейн теориясының нелерді бере алатуғынлығын, оның механикалық хәм физикалық мәселелерді шешиұге қалай алып келетуғынлығын көрсетиұ ушын базы бир айырым мәселелерді шешиұге өтиұимізге болады.

1-мысал. Кеңістік материяға ийе емес деп болжайық. Бундай жағдайда $L=0$ хәм бизде мына аңлатпа қалады:

$$L = \int K \sqrt{g} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4.$$

$\delta J = 0$ шәртинен енді

² Базы бир мысаллар жәрдемінде $\varepsilon = \frac{8\pi k}{c^2}$ екенлігін дәлиллеұ қыйын емес. Бірақ қысқалық ушын бундай дәлиллеұді келтирмейміз.

$$G_{ik} = 0$$

10 теңлемесі келип шығады. Теорияның мәнісі бойынша g_{ik} лар үзлексіз хәм бир мәнісли деп есапласақ бул дифференциал теңлемелердің шешимлери төмендегилер болады:

$$\text{егер } i \neq k \text{ болса } g_{ik} = 0 \text{ хәм}$$

$$\text{егер } i = k \text{ болса } g_{ik} = 1 \text{ хәм}$$

$$g_{44} = -1.$$

(g_{44} тиң -1 ге тең болыуы x_4 тиң ўақытты аңлататуғынлығына байланысly). Солай етип биз мынаны аламыз:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2.$$

Бундай аңлатпаға биз Эйнштейннің «арнаўлы» салыстырмалылық принципінде ийе болған едик. Жақтылықтың тезлиги бул аңлатпаға кирмейди, себеби биз оның бирге тең етип алдық. Соның менен бирге жақтылықтың тезлиги тек x_4 тиң (яғный ўақыттың) бирлигине ғана тәсир етеди.

Материя болмаған жағдайда ds^2 ушын әпиўайы аңлатпаға, яғный үлкен үш өлшемли кеңисликтеги Евклид геометриясына ийе болады екенбиз³.

2-мысал. Мейли биз базы бир x_1, x_2, x_3, x_4 ноқаты тәрәпинен тәриппленетуғын жүдә киши сфераның ишинде жайласқан кеңисликти қарайық. Егер оның радиусы жеткиликли дәрежеде киши болатуғын болса, онда g_{ik} шамаларын турақлы деп қараўға болады. Бундай жағдайда ds^2 шамасының мына түрге ийе болатуғынлығын базы бир координаталық түрлендириўлердің жәрдемінде аңсат көрсетиўге болады:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2.$$

Буннан биз шексиз кишиде барлық ўақытта «киши» салыстырмалылық принципинің дурыс болады деп жуўмақ шығарамыз. Бундай жағдайда «дүньялық» функция мынаған айланады:

$$H = \epsilon \int L dx_1 dx_2 dx_3 dx_4.$$

Бул аңлатпаны вариациялаў арқалы Максвелл теңлемелерин аламыз. Себеби барлық g_{ik} лар $i = k$ болғанда бирге, ал $i \neq k$ болғанда нолге тең. Егер жақтылықтың тезлигин бирге тең емес деп алсақ, онда

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - g_{44} dx_4^2.$$

Демек $g_{44} = c$ екен деп жуўмақ шығарамыз. L ушын жазылған (5)-аңлатпадан көринип турғанындай усы g_{44} Максвелл теңлемелерінде де турады. Енди бизге арнаўлы принциптеги «физикалық» шаманың ds^2 ушын жазылған геометриялық аңлатпаға не ушын киретуғынлығы түсиникли. Және жақтылықтың тезлиги c ның турақлы екенлиги хаққындаға тастыйықлаў да түсиникли. Себеби биз g_{ik} ны x_i координатасынан ғәрәзсиз деп есаплаў хуқықына ийе болғанлықтан жақтылықтың тезлиги турақлы шама болып қалады.

3-мысал. Енди бир дене мәселеси деп аталатуғын мәселени қараймыз. Бул жағдайда гравитациялық майдан бир тартышы масса тәрәпинен пайда етиледі. Бул массаны координата басына орналастырамыз хәм ол шар тәризли формаға ийе деп болжаймыз. Шарды тынышлықта тур, шар да, гравитация майданы да стационар халда тур деп

³ Кейинги раўажланыўының барысында Эйнштейннің теориясы материя болмағанда барлық $g^{\mu\nu}$ лер нолге тең болады, яғный материясыз хеш бир физикалық кеңисликтің болыуы мүмкин емес деген жуўмаққа келеді. Әлбетте, принципиаллық көз-қарастан бул бирден бир дурыс жуўмақ болып табылады.

есапласак (яғный барлық g_{ik} лар ўақыт t дан ғәрезсиз), биз қарап атырған масса тәрепинен пайда етилген гравитация майданының сфералық симметрияға ийе болатуғынлығын аңлаў қыйын емес. ds^2 тың аңлатпасына шар симметриясы шәртин киргиземиз. Шварцшильд бойынша поляр координаталарындағы

$$\begin{aligned}x_1 &= r \cos \vartheta, \\x_2 &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \\x_3 &= r \sin \vartheta \sin \varphi\end{aligned}$$

хәм

$$x_4 = t$$

деп алғанда бундай шәртти қанаатландыратуғын ең улыўмалық аңлатпа мына түрге ийе болады:

$$ds^2 = F(r)dr^2 + G(r)(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) + H(r)dt^2.$$

Бирақ r дың орнына биз мына шаманы алыўымыз мүмкин:

$$r' = \sqrt{G(r)}.$$

Бундай жағдайда

$$ds^2 = M(r)dr'^2 + r'^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) + W(r)dt^2$$

(бул аңлатпадағы r деги ' белгиси алып тасланған).

r диң еки ықтыярлы функциялары, яғный $M(r)$ менен $W(r)$ J интегралының вариациясынан аныкланыўы керек. Бул вариацияны табыў ушын биз тек K ны емес, ал L функциясын да билиўимиз керек. Бирақ бул вариацияны табыў ушын потенциал теориясындағы Poisson теңлемеси болған $\Delta\Psi = 4\pi\xi$ теңлемесин шешкендегидей усылдан да пайдаланыў мүмкин. Бул жағдайда бул теңлемени қанаатландыратуғын үзликсиз хәм бир мәнисли Ψ функциясын табыўдың орнына $\Delta\Psi = 0$ теңлемесиниң шешимлери табылады хәм айрықша нокатлар ξ материясының концентрацияланған орынлары деп қабыл етиледі. Биз бул жерде усындай жоллар менен жүремиз. Биз L функциясын таслап кетемиз, бирақ қалған теңлемелерди шешкенде биз айрықша нокатларға ийе шешимлерди қарап шығамыз хәм сол нокатларда масса концентрацияланған деп болжаймыз.

Демек биз

$$\delta \int K \sqrt{g} dr d\vartheta d\varphi dt = 0$$

мәселесин шешиўимиз керек.

Буның ушын ds^2 тың аңлатпасындағы g_{ik} лардың мәнислеринен пайдаланып қыйсықлық K ны есаплаўымыз керек. Бундай есаплаў әдеўир қыйыншылық пенен жүргизиледи хәм $K\sqrt{g}$ ушын ақыр-аяғында мынадай аңлатпаға алып келеди:

$$K\sqrt{g} = \left\{ \left(\frac{r^2 W'}{\sqrt{MW}} \right) - 2 \frac{r M' \sqrt{W}}{M^{3/2}} - 2\sqrt{MW} + 2\sqrt{\frac{W}{M}} \right\} \sin \vartheta.$$

Енди M хәм W функцияларының орнына

$$M = \frac{r}{r-m} \quad \text{хәм} \quad W = w^2 \frac{r-m}{r}$$

шамаларын қанаатландыратуғын $m(r)$ хәм $w(r)$ функцияларын киргиземиз. Бул мынаны береді

$$K\sqrt{g} = \int \left\{ \left(\frac{rW'}{\sqrt{MW}} \right) - 2m'w \right\} \sin \vartheta.$$

Бул формулада қолланылған $'$ белгиси барлық орында r бойынша дифференциаллаудың жүргизилетуғынлығын билдиреди. Мүмкин болған барлық интеграллаулар жүргизиледи хәм ақыр-аяғында мына аңлатпа алынады:

$$\delta \int K\sqrt{g} dr d\vartheta d\varphi dt = -\delta \int 2m' w dr.$$

Бул өз гезегинде еки дифференциал теңлемени береді:

$$m' = 0 \text{ хәм } w' = 0.$$

Демек m де w де турақлы екен. Соған байланысly $m = \alpha$, $w = 1$ деп болжаймыз. Бул қойылған шек бизиң мәселемизди шеклеуді аңғартпайды. Себеби w ның мәніси менен тек ўақыттың бирлигин сайлап алыў ғана байланысly. Усылардың барлығы ds^2 ушын мынадай аңлатпаны береді:

$$ds^2 = \frac{r}{r-\alpha} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) - \frac{r-\alpha}{r} dt^2. \quad (6)$$

Демек бизиң мәселемизди шешиў айрықша бетке – радиусы α ге тең болған сфераға ийе g_{ik} функцияларына алып келеді. Бул сфераның бетинде шар симметриясына ийе гравитациялық майданды пайда етиўши массалар жатады. Егер $\alpha = 0$ деп есапланса (демек айрықша бет жоқ) g_{ik} функциялары үзликсиз хәм бир мәнісли, айрықша нокатларға ийе емес функциялар болады. Бирақ олар Евклид геометриясында ийе болатуғын мәніслерге ийе болады. Ал бул жағдай материяның жоқ екенлигине сәйкес келеді.

Солай етип гравитация майданы табылды. Енди биз усындай майдандағы материаллық бөлекшелердің қозғалыс нызамын табыўымыз керек. Бул материаллық бөлекшелер пайда болған гравитация майданын өзгеріске ушыратпаўы керек. Усындай нызамларды табыў ушын биз қозғалысты Ньютондағыдай болып жүзеге келеді деп есаплаймыз (демек оларға күшлер тәсир етпесе *ең қысқа сызық ямаса геодезиялық сызық бойынша қозғалады* деп қабыл етиледі). Ал бул өз гезегинде

$$\delta \int ds = 0$$

екенлигин билдиреди хәм бизге жаңа вариациялық проблеманы шешиў керек болады.

Енди r , φ , ϑ , t ларды қандай да бир p параметриниң функциялары деп қараймыз. Бизиң мәселемиз

$$\delta \int \left\{ \frac{r}{r-\alpha} \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 + r^2 \left[\left(\frac{d\vartheta}{dp} \right)^2 + \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\varphi}{dp} \right)^2 \right] - \frac{r-\alpha}{r} \left(\frac{dt}{dp} \right)^2 \right\} dp = 0$$

шәртинен келип шығатуғын дифференциал теңлемелер системасын шешиўден ибарат.

Усындай жоллар менен алынған геодезиялық сызықлардың тегис болатуғынлығын аңсат көрсетиўге болады. Бирақ бул жағдайда экватор тегислигинде жатқан ең қысқа

қашықтық сызықтарынан пайдаланыў менен шеклениўге хәм $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ деп алыўға болады.

Жоқарыда жазылған ең кейинги аңлатпа бундай жағдайда былай жазылады:

$$\delta \int \sqrt{\frac{r}{r-\alpha} \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dp} \right)^2 - \frac{r-\alpha}{r} \left(\frac{dt}{dp} \right)^2} dp = 0.$$

Буннан екинши тәртипли үш дифференциал теңleme келип шығады:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \left(\frac{2r}{r-\alpha} \frac{dr}{dp} \right) + \frac{\alpha}{(r-\alpha)^2} \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 - 2r \left(\frac{d\vartheta}{dp} \right) + \frac{\alpha}{r^2} \left(\frac{dt}{dp} \right)^2 &= 0, \\ \frac{d}{dp} r^2 \frac{d\vartheta}{dp} &= 0, \\ \frac{d}{dp} \frac{r-\alpha}{r^2} \frac{dt}{dp} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Олардың биринши интеграллары мына түрге ийе

$$\begin{aligned} \frac{r}{r-\alpha} \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dp} \right)^2 - \frac{r-\alpha}{r} \left(\frac{dt}{dp} \right)^2 &= A, \\ r^2 \frac{d\vartheta}{dp} &= B, \\ \frac{r-\alpha}{r} \frac{dt}{dp} &= C. \end{aligned} \quad (7')$$

Бул аңлатпалардағы А, В, С лар интеграллаў турақлылары. С турақлысының мәніси тек параметрдің бирлигин анықлайды. Сонлықтан оны 1 ге тең деп ала аламыз.

Егер бул теңлемелерден р менен t ны жоғалсақ, онда қозғалыс траекториясы ушын теңleme аламыз. Бул теңлемени алыўдан және бир $1/r = \rho$ өзгерисин киргиземиз хәм ақыр-аяғында мынаны аламыз:

$$\left(\frac{dp}{d\vartheta} \right)^2 = \frac{1+A}{B^2} - \frac{A\alpha}{B^2} \rho - \rho^2 + \alpha \rho^3. \quad (8)$$

Бул аңлатпа планеталардың қозғалысы ушын жазылған Кеплер теңлемесине жүдә уқсас. Бул теңleme былай алынады:

Энергияның сақланыў нызамы мынаны береді:

$$\frac{m}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \right] - k \frac{Mm}{r} = a.$$

Бул аңлатпадағы а энергия, m арқалы планетаның массасы берілген (буннан былай оны 1 ге тең деп аламыз), М арқалы Қуяштың массасы белгиленген, k тартылыс турақлысы.

Майданлардың сақланыў нызамы мынаны береді:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = b.$$

Енди t ны жоғалтып хәм $\rho = 1/r$ белгилеуін пайдаланып аламыз:

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 = \frac{a}{b^2} - \frac{kM}{b^2} \rho - \rho^2.$$

(8) деги A хәм B шамаларының орнына жаңа a хәм b шамаларын киргиземиз хәм олар арасында мынадай байланыстың орын алғанын тәмийинлеймиз:

$$\frac{A\alpha}{B^2} = \frac{kM}{b^2}, \quad 1 + A = \frac{\alpha A}{kM}.$$

Бундай жағдайда мынаны аламыз

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 = \frac{a}{b^2} + \frac{kM}{b^2} \rho - \rho^2 - \alpha \rho^3.$$

Бул кейинги аңлатпа $\lim \alpha = 0$ шегинде планеталардың қозғалыс теңлемесине айланады. Егер α жүдә киши болса онда ρ жүдә үлкен болмаған жағдайда теңлемениң кейинги ағзасын таслап кетиуіге болады (яғный планета Қуяшқа жүдә жақын келмейтуғын жағдайда).

Енди α шамасының физикалық мәнісин табамыз. Бул ушын шеңбер тәризли қозғалысты қараймыз. (7)-дифференциал теңлемениң интегралының $r = \text{const}$ екенлигин көрсетиуіге болады. Демек шеңбер бойынша қозғалыстың орын алыуы мүмкин, бирақ бул жағдайда (7)-теңleme мынаны береді:

$$r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{\alpha}{2r}.$$

Бул аңлатпада ўақыттың бирлиги $c = 1$ болатуғындай болып сайлап алынған Егер $c \neq 1$ болса, онда

$$r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{\alpha}{2r} c^2.$$

Бирақ Кеплер теңлемесинен шеңбер тәризли қозғалыс ушын мына теңдиктиң орынланыуы шәрт:

$$r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = k \frac{M}{r^2}.$$

Кейинги еки формуланы салыстырыу арқалы аламыз

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{kM}{c^2} \quad (= 1,5 \cdot 10^5 \text{ см Қуяш ушын})$$

Демек α тұрақтысы бізде Құяштың массасының орнын ийелейді хәм сантиметрлерде аңлатылады екен Құяш үшін оның мәнісі 1,5 км ге тең.

Барлық планеталар үшін α ның мәнісі хәқыйқатында да олардың орбиталарының радиус-векторларына салыстырғанда жүдә киши. Кеплер теңлемелери болса жүдә үлкен дәлликте дурыс болып табылады. Сонда да классикалық теңлемеге кирмейтуғын αr^3 қосымша шамасы базы бир айрықша жағдайларда өзіннің тәсирин тийгизиўи мүмкин. Бизге белгили болған барлық планеталар үшін α шамасы хәқыйқатында да олардың орбиталарының радиус-векторларынан жүдә киши болғанлықтан сол α ның тәсирин есапқа алыў үшін (8)-теңлемени шешкенде α ның дәрежелери бойынша қатарды пайдаланыўымыз мүмкин. Мейли e_1, e_2, e_3 лер

$$f(\rho) = \frac{\alpha}{b^2} + \frac{kM}{b^2} \rho - \rho^2 + \alpha \rho^3 = 0$$

Аңлатпасының коренлери болсын.

$$e_1 + e_2 + e_3 = +\frac{1}{\alpha}$$

хәм

$$f(\rho) = (\rho - e_1)(\rho - e_2)[1 - \alpha(\rho + e_1 + e_2)]$$

екенлиги анық.

Қозғалыс теңлемеси мынадай болады:

$$d\varphi = \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho - e_1)(e_2 - \rho)[1 - \alpha(\rho + e_1 + e_2)]}} \quad (9)$$

Қозғалыс $\rho = e_1$ хәм $\rho = e_2$ аралығында болады. Енди α ның дәрежелери бойынша қатарға жайып, аламыз (α^2 бар аңлатпаларды таслап кетемиз):

$$d\varphi = \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho - e_1)(e_2 - \rho)}} \left[1 + \frac{\alpha}{2}(e_1 + e_2) + \frac{\alpha}{2} \right]$$

хәм интеграллап

$$\varphi - \varphi_0 = -\frac{\alpha}{2} \sqrt{(\rho - e_1)(e_2 - \rho)} + \left[1 + \frac{3}{4} \alpha(e_1 + e_2) \right] \arcsin \frac{(e_1 + e_2)/2 - \rho}{(e_1 - e_2)/2}$$

аңлатпаларын аламыз. Бул формула Құяшқа ең жақын келгендеги хәм ең қашық нокатқа алыслагандағы (яғный $\rho = e_1$ хәм $\rho = e_2$ нокатлары арасындағы) радиус-векторлар арасындағы мүйеш Φ ти анықлаўға мүмкиншилик береді.

$$\Phi = \pi \left[1 + \frac{3}{4} \alpha(e_1 + e_2) \right]$$

екенлиги анық. Планета өзіннің ең қашықласыў нокатына жеткен ўақытта (перигелийде) ол

$$2\Phi = 2\pi \left[1 + \frac{3}{4} \alpha(e_1 + e_2) \right]$$

мүйешине бурылады. Кеплер қозғалысы үшін биз (Кеплер ызамалары тийкарында) $2\Phi_k = 2\pi$ мүйешин аламыз. Ал биз бул жерде Эйнштейн теориясында орбитаның перигейинин планета бир рет айланғанда бурылыў мүйешинин

$$\omega = \frac{3}{2} \alpha (e_1 + e_2) \pi$$

ге тең екенлигин көреміз.

Мейли T планетаның айланыу дәуірі, a орбитаның үлкен ярым көшери хәм ε орбитаның эксцентритети болсын. Бундай жағдайда

$$\alpha = \frac{kM}{c^2} = \frac{(2\pi)^2 a^2}{T^2 c^2},$$

$$e_1 + e_2 = \frac{2}{a(1 - \varepsilon^2)}.$$

Орынларына қойыу арқалы табамыз:

$$\omega = 24\pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^2 (1 - \varepsilon^2)}.$$

Бұл жүдә киши шама. Меркурий планетасы ушын 100 жыл дауамындағы бурылыу ушын, яғнай $\Omega = (100/T')\omega$, T' Меркурийдің Жер жылларындағы айланыу дәуірі, аламыз

$$\Omega = 43''.$$

Бұл тәжіриһе менен дәл сәйкес келетугын шама болып табылады. Арнаулы гипотезаларды пайдаланыу жолы менен дүзілген ҳеш бир басқа теория бұл шаманы түсіндире алмайды.

Басқа планеталар ушын Ω шамасы әдеуір киши болып Меркурийдеги жайдағыдай әхмийетке ийе бола алмайды.

Материаллық ноқаттың туурыдан тууры Қуяшқа тууры сызық бойынша келип түсиуін қараймыз. Усындай қозғалысқа сәйкес келиуши геодезиялық сызықлардың бар екенлигин көрсетиуге болады. Бундай жағдайда $\varphi = \text{const}$ хәм r диң t дан ғәрезлиги

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{3\alpha}{2r(r - \alpha)} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{\alpha(r - \alpha)}{2r^3}$$

теңлемеси жәрдеминде анықланады. Бұл теңлемедегі жақтылықтың тезлиги бирге тең етип алынған. Биз

$$\left| \frac{dr}{dt} \right| < \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{r - \alpha}{r} = \frac{c_r}{\sqrt{3}}$$

болса тезлениудің мәнисиниң оң, ал

$$\frac{dr}{dt} < \frac{c_r}{\sqrt{3}}$$

болса тезлениудің терис мәниске ийе болатуғынлығын көреміз. Ал c_r шамасы болса, ол r ноқатындағы жақтылықтың тезлигине тең.

Биз есаплауларымызда қозғалыушы планетаның массасын бирге тең етип алдық. Сонлықтан әдеттеги механиканың көз-қарасы бойынша биз $d^2 r/dt^2$ ушын жазылған аңлатпаны масса бирлигине тәсир етиуши күш деп қабыл етиуимиз керек болады. Бұл жерде Эйнштейн механикасына күш хәкқындағы түсиниктиң керек емес екенлигин көреміз. Бирақ сорау пайда болады: Ньютон нызамларын сәйкес түрде өзгертсек

Эйнштейн теориясы берген нәтижелерди бере аларма еди? Бул сораўға мақуллаўшы жуўап берилмейди. Ҳақыйкатында да туўры сызықлы қозғалыс ушын Ньютон күши ушын аңлатпа мына түрге ийе болады:

$$F_d = -\frac{\alpha}{2r^2} + \frac{\alpha^2}{2r^3} + \frac{3\alpha}{2r(r-\alpha)} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2.$$

Бул аңлатпа шекте, жүдә киши α ушын классикалық аңлатпаға өтеди:

$$F = -k \frac{M}{r^2}.$$

Бирақ биз жоқарыда Эйнштейн теориясы бойынша шеңбер бойынша қозғалыс ушын күш мынаған тең болуы керек еди:

$$F_c = \frac{\alpha}{2r^2}.$$

Әлбетте F_d менен F_c бир улыўмалық нызамның дара жағдайларының болуы мүмкин емес. Егер F_d дағы радиал тезлик dr/dt ны хәм шеңбер бойынша қозғалғанда нолге тең болатуғын ағзаларды алып тасласақ, онда қалған ағзалар F_c болып табылады. Эйнштейн теориясындағы күш ушын жазылған аңлатпа (егер «күш» терминин киргизиў талап етилсе хәм оған масса менен тезлениўдің көбеймесине тең мәнис берилсе) материаллық ноқаттың траекториясына ғәрезли болады, яғный Ньютонның пүткил дүньялық тартылыс нызамының әхмийетиндей универсаллық әхмийетке ийе болмай қалады. Шекте, яғный жүдә киши α де F_c менен F_d бирдей болады хәм F ти береди.

4-мысал. Енди жақтылықтың қозғалысын қараўға өтемиз. Жақтылық материаллық ноқат сыпатында геодезиялық сызықлар бойынша қозғалады. Бирақ оннан парқы (арнаўлы салыстырмалық принципдегидей) бул геодезиялық сызықлардың узынлығы нолге тең хәм олар ушын биз

$$ds^2 = 0$$

аңлатпасына ийе боламыз. Усыған сәйкес биз (7)-теңдемелерде $A = 0$ деп алыўымыз керек хәм жақтылық нурларының траекториялары

$$\left(\frac{dp}{d\phi} \right)^2 = \frac{1}{B^2} - \rho^2 - \alpha \rho^3$$

аңлатпасын интеграллаўдан анықланған иймекликлер болады. $l_{\text{ima}} = 0$ шегинде аңлатпа дым аңсат интегралланады хәм биз аламыз:

$$B\rho = \sin(\phi - \phi_0).$$

Бул аңлатпадағы ϕ_0 интеграллаў тураклысы. Бул туўры сызық болып табылады, яғный

$$r = \frac{B}{\sin(\phi - \phi_0)}.$$

Бул аңлатпадағы B Қуяштан ең киши қашықлық болып табылады.

Енди шектеги емес жағдайды қараймыз (шектеги жағдай $\alpha = 0$ еди). Бунда α ни Қуяшқа ең жақын болған траекторияның ноқатына салыстырғанда жеткилики дәрежеде киши болсын. Мейли

$$\frac{2}{B^2} - \rho^2 + \alpha\rho = 0$$

теңлемелесинің коренлери e_1, e_2, e_3 лер болсын хәм мейли $\lim \alpha = 0$ шегинде e_1 менен e_2 лер

$$\frac{2}{B^2} - \rho^2 = 0$$

теңлемесинің коренлери болсын. Яғный

$$\lim e_1 = \frac{1}{B} \text{ хәм } \lim e_2 = -\frac{1}{B}.$$

$$\frac{d\rho}{\sqrt{1/B^2 - \rho^2 + \alpha\rho^3}} = d\varphi \quad (10)$$

аңлатпасы (9)-аңлатпа сыяқлы жууық түрде интегралланады. Биз жууық интеграллау нәтийжесинде аламыз:

$$\varphi - \varphi_0 = -\frac{\alpha}{2} \sqrt{(\rho - e_1)(e_2 - \rho)} + \left[1 + \frac{3}{4} \alpha(e_1 + e_2) \right] \arcsin \frac{(e_1 + e_2)/2 - \rho}{(e_1 - e_2)/2}. \quad (9')$$

Бул аңлатпа жәрдемінде e_1 хәм e_2 ушын жууық мәнислерди аңсат есаплауға болады хәм биз аламыз:

$$e_1 = \frac{1}{B} - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{B^2}; \quad e_2 = -\frac{1}{B} - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{B^2}.$$

Егер (9') ты мына түрде жазсак

$$r = \frac{2}{e_1 + e_2} \left\{ 1 - \frac{e_2 - e_1}{e_2 + e_1} \sin \left[\varphi - \varphi_0 + \frac{\alpha}{2} \sqrt{(\rho - e_1)(e_2 - \rho)} \right] \right\}^{-1},$$

онда эксцентритети

$$\varepsilon = \frac{e_2 - e_1}{e_2 + e_1} = \frac{2B}{\alpha}$$

болған гиперболаға жүдә уксас болған иймеклик пенен ис алып баратырғанымызды көремиз.

В шамасы Куяштан траекторияның ең жакын ноқатына шекемги жууық түрде алынған қашықтықты береді (яғный α ге салыстырғанда жүдә үлкен шама). Солай етип бул гипербола жүдә үлкен эксцентритетке ийе болып, туұры сызықтан аз парық қылады.

Бул гиперболаның асимптоталары ушын $r = \infty$ хәм $\rho = 0$. Демек φ шамасы мына шәрттен анықланады:

$$1 - \frac{e_2 - e_1}{e_2 + e_1} \sin \left(\varphi - \varphi_0 + \frac{\alpha}{2} \sqrt{-e_1 e_2} \right) = 0.$$

Бул аңлатпаға e_1 хәм e_2 ниң мәнислерин қоямыз хәм ықтыярлы турақлы $\varphi_0 = (\alpha/2) \sqrt{e_1 e_2}$ шамасын аламыз. Бул ықтыярлы бағыттан баслап өлшенетуғын φ мүйеши мына шәрттен анықланады:

$$\sin \varphi = \sin(\pi - \varphi) = \frac{e_2 + e_1}{e_2 - e_1} = \frac{\alpha}{2B}.$$

φ_0 бағыты хәм асимптоталар арасындағы мүйешлер жүдә киши мәниске ийе болады хәм мыналарға тең:

$$\varphi = \pm \frac{\alpha}{2B}.$$

Ал олар арасындағы мүйеш мынаған тең:

$$\Psi = \frac{\alpha}{B}.$$

Егер жақтылық нуры усындай гипербола бойынша қозғалатуғын болса, онда Қуяш оның фокусында жайласқан болады. Қуяштан жеткиликли дәрежеде қашықласқан гипербола бойынша қозғалысты асимптота бойынша қозғалысқа теңлестіріу мүмкин. Солай етип биз мынадай жуўмаққа келемиз: **Қуяштың қасынан өткен жақтылық нуры мынадай мүйешке бурылады:**

$$\Psi = \frac{\alpha}{B} = \frac{kM}{c^2 B}.$$

Бул аңлатпадағы B Қуяштан ең киши қашықлық. Эйнштейн Қуяш бетине урынба түрінде түсетуғын нур ушын бул мүйешти есаплады хәм $\Psi = 1,7''$ мәнисин алды. 1919-жылы Бразилияда Англиялы экспедиция тәрөпинен өткерилген тәжірийбелер Эйнштейннің бурынырақ шығарған бул жуўмағының дурыс екенлигин тастыйықлады.

Жақтылықтың қозғалысын беріуші (10)-теңлемени изертлеу жүдә қызык нәтийжелерди береді. Биз қысқалық ушын бул изертлеулерди толық келтире алмаймыз. Бирақ базы бир қызыклы жағдайларға итибар береміз. Егер жақтылық нуры бетке жеткиликли дәрежеде жақын келсе ($r = 3\alpha/2$), онда нур беттің дөгерегінде буралып, бул беттен қашықлап кете алмайды. $r = \alpha$ бети арқалы хеш бир нур өте алмайды. Егер нур Қуяштың орайы бағытында келсе, онда оның тезлиги мына теңлеме жәрдемінде анықланады:

$$\frac{dr}{dt} = c_r = 1 - \frac{\alpha}{r}.$$

(7' аңлатпасына $A = 0$ мәнисин қойыу керек). Оның тезлениуі барлық ўақытта да терис мәниске ийе хәм $r = \alpha$ бетине нур $c_r = 0$ тезлиги менен шексиз үлкен ўақытта келеді.

Қуяштың дөгерегінде шеңбер тәрізлі орбиталар бойынша айланыушы планеталар Қуяшқа қанша жақын болған с айын үлкен тезлик пенен қозғалады. Планета тәрізлі радиусы $r = 3\alpha/2$ болған шеңбер тәрізлі орбита бойынша айланса, онда оның тезлиги жақтылықтың тезлигине тең, бирақ бул жақтылықтың тезлиги c ға емес, ал $c/\sqrt{3}$ ке тең болады. Радиусы $r = 3\alpha/2$ болған шеңбер ишінде шеңбер бойынша қозғалыстың орын алыуы мүмкин емес.

Қуяш ушын $\alpha = 1,5 \cdot 10^5$ см хәм бул шама Қуяштың радиусына салыстырғанда жүдә киши шама. Сонлықтан радиуслары $r = \alpha$ хәм $r = 3\alpha/2$ болған бетлер хеш бир әмелий әхмийетке ийе емес. Водород молекуласы ушын $\alpha = 10^{-49}$.

5-мысал. Арнаулы салыстырмалылық принципі бизди қозғалыушы хәм тынышлықта турған бақлаушылардың өлшеген ўақытлары бир бирине тең емес деп үйретті. Мейли x_1 , y_1 , z_1 шамалары t ның функциялары болсын хәм бизге базы бир ноқаттың қозғалысын берсин. Тынышлықта турған бақлаушы тәрөпинен өлшенетуғын ўақыт элементи dt болады. Ал ноқат пенен қозғалыушы бақлаушы тәрөпинен өлшенетуғын ўақыт dt мына аңлатпадан анықланады:

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Бул аңлатпадағы τ нокаттың «меншикли» ұақыты болып табылады. Улыұмалық салыстырмалық принципінде де биз қандай да бир нокаттың төртінші координатасы dt ның «меншикли» ұақыт dt ға салыстырғандағы өсимин айырыұымыз керек. «Улыұмалық» хәм $d\tau^2$ «арнаұлы» салыстырмалылық принципери арасындағы айырма мынадан ибарат: арнаұлыда тынышлықта турған нокат ушын $dt = d\tau$, яғный «меншикли» ұақыт төртінші координата болған ұақыттың өсимине сәйкес келеди. Ал улыұмалық салыстырмалылық принципінде бундай болмайды. Мысал ретінде 3-мысалда келтирилген гравитация майданын қараймыз. Егер нокат тынышлықта турса, онда dx, dy, dz лер нолге тең (ямаса поляр координаталарда $dr, d\phi, d\theta$ лер нолге тең) хәм хәр бир тынышлықта турған нокат ушын «меншикли» ұақыт

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) dt^2$$

арқалы анықланады. Яғный төртінші координата болған ұақыттың өсими «меншикли» ұақыттың өсимине тең емес, ал r менен a дан ғәрезли болады (Қуяшқа шекемги қашықтықтан хәм оның массасынан ғәрезли болады).

Енди қандайда бир молекулалық процессти, айтайық нурланыұ процессин қарайық. Молекула ушын ямаса молекуладағы тербелиұшы бөлекше ушын усы молекулаға характерли болған хәм оның ишки қәсийетлеринен келип шығатуғын нурланыұ дәұири болады деп болжаұ тәбийий. Бул дәұир оның «меншикли» ұақтынан келип шығады. Бул ұақыт ықтыярлы түрде алынған x, y, z, t координаталар системасынан ғәрезли емес, демек ықтыярлы түрде берилген координата t дан, яғный t ұақтынан ғәрезли болмайды. Солай етип молекула ушын дәұир барлық орынларда бирдей болады. Бул дәұирди киши деп болжайық хәм dt арқалы белгилейик. Тербелис тезлиги жүдә киши деп есапласақ dt дың аңлатпасындағы $dr = d\phi = d\theta = 0$ деп жаза аламыз. Бирақ биз бақлаұларымызды биз тәрептен сайлап алынған координаталар системасында өткеремиз. Биз өлшеген дәұир dt емес, ал $d\tau$ болады. Енди $d\tau$ барлық орынларда бирдей деген шәртти жазамыз. Дәслепп Қуяштың бетинде, яғный $r = d$ (Қуяштың радиусы) $d\tau$ ды жазамыз, екінши рет $r = D$ (жер орбитасының ярымы) тап сондай $d\tau$ ды жазамыз. Онда

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{d}\right) dt_d^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{D}\right) dt_D^2$$

екенлиги өз-өзинен түсиникли. Бул аңлатпада dt_d менен dt_D сәйкес Қуяш пенен Жерде өлшенген дәұирлер. Бирақ α/D шамасы α/d шамасына салыстырғанда жүдә киши шама. Соның ушын бул киши шаманы есапқа алмаймыз. Екінши тәрептен, егер dt_d менен dt_D дәұирлер болса, онда оларға кери шамалар v_d хәм v_D жийиликлери болып табылады. Бундай жағдайда бизиң шәртимизди былайынша жазыұға болады:

$$v_d = v_D \left(1 - \frac{\alpha}{d}\right) \frac{1}{2} = v_D \left(1 - \frac{\alpha}{2d}\right)$$

Енди v_D ны тек v , ал $v_d - v_D$ ны dv арқалы белгилеймиз. Өз-өзинен түсиникли:

$$dv = -\frac{\alpha}{2d} v \quad \text{ямаса егер } v = \frac{1}{\lambda} \quad \text{болса}$$

$$d\lambda = +\frac{\alpha}{2d} \lambda.$$

Қандай да бир жақтылық шығарыұшы газ тәрепинен шығарылған жақтылық жоқарыда көрсетилгендей дәұирли қозғалыс характерине ийе. Биз Қуяштың **гравитациялық потенциалы $\alpha/2d$ ның газ тәрепинен нурландырылған сызықлардың қызыл тәрепке** ($d\lambda > 0$) **аұыстыратуғынын көрдик**. Эйнштейн бул аұысыұдың мәнисин есаплады хәм тәжирийбелер, шамасы, теория тәрепинен болжанған бул нәтийжелерди тастыйықлады.