Өзбекстан Республикасы жоқары ҳәм орта арнаўлы билим министрлиги

Бердақ атындағы Қарақалпақ мәмлекетлик университети

Б.Абдикамалов, Ж.Акимова, Х.Турекеев, Р.Хожаназарова

Улыўма физика бойынша лабораториялық практикумда өткерилген экспериментлер нәтийжелерин қайта ислеў усыллары

Мәмлекетлик университетлердиң студентлери ушын оқыў қолланбасы

Нөкис - 2013

Оқыў қолланбасы Қарақалпақ мәмлекетлик университетиниң илимий кеңесиниң 2013-жыл ____ апрель күнги мәжилисинде мақулланды ҳәм баспаға усынылды. ____-санлы протокол.

Пикир билдириўшилер:

Физика-математика илимлериниң докторы А.Камалов.

Техника илимлериниң кандидаты Д.Жумамуратов.

Мазмуны

Кирисиў.	4
1-§. Ҳәр қыйлы түрдеги бирдей дәлликтеги өлшеўлерде тосаттан жиберилетуғын қәтеликлердиң шамасын анықлаў усыллары.	14
2-§. Туўрыдан-туўры көп қайтара өткерилген өлшеўлердеги тосаттан жүзеге келетуғын қәтеликлер.	20
3-§. Бир реттен өткерилетуғын өлшеўлерде жиберилетуғын қәтелер.	37
4-§. Көп рет ҳәм бир рет өткерилген өлшеўлердеги тосыннан кететуғын қәтелерди биргеликте есапқа алыў.	43
5-§. Жанапай өлшеўлердиң қәтелери.	45
6-§. Физикалық шамалар арасындағы экспериментлерде алынған байланысларды қайта ислеў.	59
7-§. Ең киши квадратлар усылы.	73
8-§. Интерполяция ҳәм эксперимент нәтийжелерин статистикалық қайта ислеў мәселелерин Mathematica алгебралық системасының жәрдеминде шешиў технологиялары.	87
9-§. Mathematica компьютерлик алгебра системасы орталығындағы интерполяциялаўдың технологиялары.	93

Кирисиў

Физика тәбийий илим сыпатында теориялық ҳәм экспериментallлық изертлеўлердиң қосындысынан турады. Физиканың теориялық ҳәм экспериментallлық қураўшылары бир бири менен байланыслы түрде, бир бирин толықтырып раўажланады. Жаңа экспериментallлық жетискенлик дәрҳәл жаңа теориялардың дөретилиўин талап етеди. Соның менен бирге теориялық физикадағы жетискенликлер жаңа экспериментлерди қойыў ушын тийкарлар пайда етип береди.

Физика пәнин үйренгенде ҳәр бир студентте экспериментallлық ҳәм теориялық изертлеўлер жүргизиў көнлигиўлерин пайда етиў оғада әҳмийетли мәселелердиң бири болып табылады. Улыўма физика курсын үйренгенде экспериметallлық көнликпелер лабораториялық практикум барысында алынады.

Экспериментallлық изертлеўдиң тийкарғы усыллары сыпатында бақлаў менен экспериментти атап атаў мүмкин.

Бақлаў қандай да бир объектти усы объектке тәсир етпей системалы түрде ҳәм белгили бир мақсетлерге муўапық үйрениў болып табылады. Бақлаў үйренилетуғын объект ямаса қубылыс ҳаққындағы ең басланғыш информацияларды береди.

Эксперимент болса объектти ямаса қубылысты үйрениўдиң усылы болып, бул жағдайда изертлеўши актив түрде ҳәм белгили бир мақсетлерге муўапық жасалма түрдеги шараятларды пайда етиў ямаса тәбийий шараятларды пайдаланыў жолы менен усы объектке ямаса қубылысқа олардың базы бир қәсийетлериниң көриниўи ушын тәсир етеди. Эксперименттиң бақлаўдан төмендегидей принципиаллық өзгешеликлерин айырып көрсетиўге болады:

1. Эксперимент қубылысты ямаса объектти изертлениўши тийкарғы процесске басқа кереги жоқ факторлардың тәсирин тийгизбей үйрениў мүмкиншилигиниң жүзеге келиўин тәмийинлейди.

2. Экспериментаoriginal шараятларда тез ҳәм дәл түрде нәтийжелерди алыў мүмкин.

3. Экспериментте үйренилип атырған процессти ямаса объектти қанша талап етилсе, сонша рет сынап көриў мүмкин.

Эксперименттиң мақсети үйренилетуғын объектти ямаса қубылысты сапалық ҳәм санлық жақтан үйрениў ҳәм олар арасындағы байланысты анықлаў болып табылады. Бундай изертлеўлердиң барлығы да өлшеўлер тийкарында өткериледи. Сонлықтан өлшеўлердиң барысында санлық нәтийжелердиң дәл ҳәм исенимли түрде алыныўы оғада үлкен әҳмийетке ийе болады.

Ҳәзирги ўақытлары эксперименталлық изертлеў менен шуғылланыўшылар алдында пайда болатуғын тийкарғы проблемалардың бири бул жоқары дәлликте алынған нәтийжелерди қайта ислеўде эффективли түрде ислейтуғын жаңа алгоритмлерди дөретиў болып табылады. Жаңа техникалық қураллардың раўажланыўы, жаңа көргизбели усыллардың қолланылыўы, компьютерлестириў - булардың барлығы өлшеўлер дәллигиниң жоқарылаўына мүмкиншилик береди. Бирақ усы дәлликке ерисиў ушын экспериментлер нәтийжелерин қайта ислеў методлары турақлы түрде жетилистирилип барылыўы шәрт.

XIX әсирдиң басларында белгили математиклер Адриен Мари Лежандр (Adrien-Marie Legendre, 1752-1833, француз математиги) ҳәм Иоганн Карл Фридрих Гаусстың (Johann Carl Friedrich Gauss, 1777-1855, немис математиги, механиги, физиги ҳәм астрономы) мийнетлеринде ең киши квадратлар методы раўажландырылды ҳәм бул метод көп жыллар даўамында дәслепки түринде қолланылып келинди. XX әсирдиң 40-жылларынан баслап, бул методтың көп санлы модификациялары пайда болды. Бунда жаңа техникалық қураллар ҳәм көргизбели методлардың пайда болыўы, математиклерди информацияларды қайта ислеўдиң жүдә қурамалы алгоритмин ислеп шығыўға мәжбүрледи. Мысалы, екинши Жер жүзи урысы жыллары пайда болған ракета техникасы берилген мағлыўматларды избе-из қайта ислеў алгоритмин ҳәм оның модификацияларын ислеп шығыўды алға қойды. Сонлықтан, техникалық қураллардың раўажланыўы алынған нәтийжелерди қайта ислеў ушын арналған математикалық аппаратлардың жетилистириўин талап етти. Бундай мысалларды физиканың көплеген бөлимлеринен, әсиресе элементар бөлекшелер физикасы (жоқары энергиялар физикасы), тарлар физикасы, гравитация теориясы бөлимлеринен көплеп келтириўге болады.

Эксперименталлық физиканың раўажланыўы менен бирге эксперимент нәтийжелерин қайта ислеў, жиберилген қәтелерди баҳалаў ҳәм есапқа алыў ислери де үлкен пәтлер менен раўажлана баслады. Бул жағдайға дәлил ретинде 1933-жылы Москва ҳәм Ленинград қалаларында жарық көрген Англиялы (Шотландиялы) илимпазлар Э.Уиттекер менен Г.Робинсонның 364 беттен ибарат "Математическая обработка результатов наблюдений" китабын көрсетиўге болады [1] (бул китап www.libgen.org электронлық китапханасынан алынды).

Компьютерлик технологиялардың пайда болыўы менен раўажланыўы экспериментлерде алынған нәтийжелерди эффективли түрде қайта ислеў ушын үлкен жол ашып берди. Ҳәзирги ўақытлары ҳәр бир экспериментатор өзи алған санлы нәтийжелерди математикалық жақтан қайта ислей алыў мүмкиншилигине ийе. Бул әдебиятлардың барлығы да Интернет тармағында кеңнен орын алған ҳәм олардың айырымларының дизими усы қолланбаның кейнинде келтирилген.

Жоқарыда айтылған жағдайларға байланыслы оқыў қолланбасы оқытыўшыларға, студентлерге улыўма физика бойынша лабораториялық практикумда өлшеўлердиң нәтийжелерин қайтадан ислеў ҳәм қәтелердиң шамаларын анықлаў усылларын терең үйрениў ушын таярланды.

Оқыў қолланбасы өлшеўлердиң нәтийжелерин қайтадан ислеў ҳәм қәтелердиң шамаларын анықлаў усыллары бойынша традицияға айланған оқыў қолланбаларынан компьютерлик технологияларды кеңирек қолланыў бойынша өзгешеликке ийе. Бул қолланбада тийкарынан Wolfram компаниясының Mathematica компьютерлик алгебра системасын лабораториялық практикумда оқытыўшылар менен студентлердиң кеңнен пайдаланыўы нәзерде тутылады. Сонлықтан Mathematica системасында файллар менен ислесиў, усы системада физикалық мағлыўматлар файлын дөретиў, Mathematica системасында функцияларды графикалық түрде сәўлелендириў, еки өлшемли ҳәм үш өлшемли графиклерди дүзиў, орташа арифметикалық мәнислер менен дисперсияларды есаплаў, исенимли интервалларды есаплаў ушын киргизилген операторларды билиў талап етиледи.

Mathematica системасындағы Фурье-анализ, фурье-анализлерди қурыў ушын арналған функциялар, бул системадағы сызықлы корреляциялық анализ, Mathematica системасын пайдаланыў арқалы сәйкеслик критерийлери жәрдеминде мағлыўматларды қайта ислеў талап етиледи.

Өлшеўлердиң түрлери. Экспериментлерде физикалық қубылыслар менен объектлердиң қәсийетлери сәйкес физикалық шаманы өлшеў арқалы үйрениледи.

Қандай да бир физикалық шаманы өлшеў дегенде усы шаманы шамасын бир бирликке тең деп алынған тәбияты тап усындай болған басқа бир шама менен салыстырыўды түсинемиз. Мысалы узынлықтың бирлиги ретинде 1 метр, массаның бирлиги ретинде 1 кг қабыл етилген. Физикалық шаманы өлшегенде арнаўлы мәмлекетлик мәкемелерде сақланатуғын эталонларды пайдаланбайды, ал көрсетиўлери қандай да бир жоллар менен сондай эталонлар менен салыстырылған өлшеў әсбаплары қолланылады.

Өлшеўлердиң түрлери өлшенетуғын шаманың физикалық характери менен анықланады. Физикалық характери деп айтқанымызда өлшеўдиң талап етилетуғын дәллиги, өлшеўдиң тезлиги, өлшеў өткерилген шараятлар, өлшеўлердиң режимлери ҳәм тағы басқалар нәзерде тутылады. Өлшеўлердиң түрлерин төмендегидей түрде классификациялаў мүмкин:

<table>
<tr><td rowspan="12">Өлшеўлер түрлери</td><td rowspan="2">Шаманы өлшеўлердиң саны бойынша</td><td>Көп рет өткерилетуғын,</td></tr>
<tr><td>Бир рет өткерилетуғын.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Өлшеўлердиң жеткиликлигиниң дәрежеси бойынша</td><td>Зәрүрли болған,</td></tr>
<tr><td>Артықша.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Өлшеўлердиң нәтийжелериниң характери бойынша</td><td>Абсолютлик,</td></tr>
<tr><td>Табалдырықлық,</td></tr>
<tr><td>Салыстырмалы.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Өлшеўлер өткериўдиң шәртлери бойынша</td><td>Бирдей дәлликтеги,</td></tr>
<tr><td>Бирдей дәлликтеги емес.</td></tr>
<tr><td></td><td>Туўрыдан-туўры (тиккелей),</td></tr>
</table>

	Өлшеўлерди өткериў шараятлары бойынша	Жанапай,
		Жыйнақ,
		Биргеликтеги,
		Динамикалық.
	Усылы бойынша	Тиккелей берилетуғын баҳалар,
		Өлшем менен салыстырыў,
		Қосымшалар,
		Қарсы қойыў,
		Дифференциаллық,
		Ноллик,
		Алмастырыў (сәйкес келиў).
	Объектке тәсири бойынша	Контактсыз,
		Контактлы.
	Баҳалаўдың дәллиги бойынша	Техникалық,
		Лабораториялық (изертлеў)

Ескертиў: Лабораториялық (изертлеў) өлшеўлерди қәтеликтиң шамасын дәл баҳалаў менен ҳәм қәтелердиң шамасын жуўық түрде баҳалаў менен алып барылатуғын өлшеўлер деп екиге бөледи.

Өткерилген тәжирийбелердиң саны бойынша өлшеўлерди бир ретлик ямаса көп рет қайталанатуғын деп бөлиў мүмкин. Егер базы бир физикалық шаманың мәниси анықлаў ушын тек бир рет өлшеў өткерилетуғын болса, онда бундай өлшеўди бир ретлик өлшеў деп атайды. Егер тәжирийбе барысында бирдей шараятларда ҳәм бирдей әсбап-үскенениң жәрдеминде өлшеўлер бир неше рет өткерилетуғын болса, онда өлшеўди көп рет қайталанатуғын өлшеў деп атайды.

Физикалық лабораторияда нәтийжени алыўдың усылы бойынша әдетте туўрыдан-туўры ҳәм жанапай өткерилген тәжирийбелер деп бөледи. Туўрыдан-туўры өлшеўлерде физикалық шаманың мәниси сәйкес физикалық әсбаптың жәрдеминде анықланылады. Демек бундай жағдайда өлшенетуғын шама эталон менен тиккелей салыстырылады. Мысалы узынлықты сызғыш, температураны термометр, күшти динамометр, тоқ күшин амперметр менен өлшейди. Бирақ айырым физикалық шамаларды анықлаў ушын усы шаманың басқа физикалық шамалар менен қандай байланысқа ийе екенлигин анықлап алыў керек болады. Усындай жоллар менен өткерилген өлшеўлерди жанапай өлшеўлер деп атаймыз. Бундай өлшеўлер қатарына денелердиң жыллылық сыйымлығын, жыллылық кеңейиўин, басқа да термодинамикалық параметрлерин анықлаў киреди. Жыллылық кеңейиўин анықлаў ушын әдетте температураның ҳәр қандай мәнислериндеги дениниң узынлықларының мәнислерин өлшеў керек болады. Температураның мәнислери менен узынлықлардың мәнислери тиккелей өлшенеди.

Өлшеўлер өткерилген шараятлар бойынша оларды бирдей дәлликтеги ҳәм ҳәр қыйлы дәлликтеги өлшеўлер деп бөлиў мүмкин. Егер физикалық шаманы өлшеў бирдей шараятларда ҳәм бирдей дәлликтеги әсбаплардың жәрдеминде өлшенсе, онда бундай өлшеўлерди бирдей дәлликтеги өлшеўлер деп атайды. Ал ҳәр қыйлы шараятларда ҳәм ҳәр қыйлы дәлликтеги әсбаплардың жәрдеминде өткерилген өлшеўлер ҳәр қыйлы дәлликтеги өлшеўлер деп аталады. Физикалық лабораторияларда өткерилген өлшеўлердиң көпшилиги бирдей дәлликтеги өлшеўлер болып табылады. Себеби ҳәр бир лабораториялық жумыс орынланғанда усы лабораториялық жумысты орынлаў ушын белгиленген әсбап ғана пайдаланылады.

Лабораториялық физикалық практикум студентлердиң физикалық шамаларды өлшеў қәбилетликлериниң ҳәм көнликпелериниң пайда болыўына, физикалық шамаларды өлшеўдиң әҳмийетли усылларын меңгериўине, тийкарғы физикалық нызамлар менен қубылысларды терең билиўине жәрдем береди. Физикалық практикумның ҳәр бир лабораториялық жумысында изертленетуғын қубылысты ямаса объектти характерлейтуғын анық бир физикалық шаманы өлшеў нәзерде тутылады. Жоқарыда келтирилген классификация бойынша лабораториялық жумысларды орынлаў барысында өткерилетуғын өлшеўлерди бирдей дәлликтеги, бир рет өткерилетуғын, көп рет қайталанатуғын, туўрыдан-туўры өткерилетуғын, жанапай ҳәм тағы басқа да өлшеўлерге бөлиў мүмкин.

Лабораториялық өлшеўлер барлық ўақытта да базы бир дәлликте өткериледи. Бул жағдай алынған нәтийжеде белгили бир анықсызлықтың қатнасатуғынлығын билдиреди. Бундай анықсызлықты баҳалаў (яғный анықсызлықтың шамасын билиў) қәлеген эксперименталлық изертлеўдиң ажыралмас бөлеги болып табылады.

Өлшеўлер барысында жиберилетуғын қәтелер. Тәжирийбелер өлшеў әсбапларының дәллигиниң жоқары емес екенлигинен, бизиң сезиў органларымыздың жетискен емес екенлигинен, бизиң билимлеримиздиң толық емес екенлигинен бирдей өлшеўлерди көп рет қайталағанда өлшенип атырған физикалық шама ушын ҳәр қандай мәнислердиң алынатуғынлығын көрсетеди. Өлшеўлерди бирдей шараятларда өткергенде де тап усындай жағдай қайталанады. Анаў ямаса мынаў өлшеўлердиң нәтийжелерин әмелде пайдаланғанда үйренилген физикалық шаманың ҳақыйқый мәниси, өлшеўдиң дәллиги ҳаққында мәселе туўылады.

"Өлшеўдиң дәллиги" термини, яғный өлшеўдиң нәтийжелериниң базы бир ҳақыйқый мәниске жақынлығы дәрежеси өлшеў операцияларын сапалық жақтан салыстырыў ушын қолланылады.

Санлық характеристика ушын "өлшеўдиң қәтелиги" түсиниги қолланылады. Бул терминлер бир бири менен тығыз байланысқан: қәтелик қаншама киши болса дәллик соншама жоқары болады. Өлшеўлерде жиберилетуғын қәтеликлердиң шамасын баҳалаў өлшеўлердиң шынлығының тәмийинлеўдиң ең әҳмийетли илажларының бири болып табылады.

Өлшеўлердиң дәллигине тәсирин тийгизетуғын факторлардың саны жеткиликли дәрежеде үлкен ҳәм сонлықтан өлшеўлердиң қәтелериниң қәлеген классификациясын толық классификация деп есаплаўға болмайды.

Биз физикалық лабораторияларда өткерилетуғын өлшеўлердиң қәтелерин баҳалаў ушын тийкар болып табылатуғын классификациялардың айырымларын келтиремиз. Қәтеликлердиң базы бир түрлерин толық түрде қарап шығамыз.

Биз x арқалы базы бир шаманы өлшегенде алынатуғын мәнисти белгилейик. x_0 арқалы усы физикалық шаманың ҳақыйқый мәниси белгиленген болсын (физикалық шамалардың хақыйқый мәнислерин кестелерден аламыз ҳәм сонлықтан оларды барлық ўақытта да белгили деп есаплаймыз).

Өлшеўдиң қәтелиги дегенимизде өлшенген x шамасының оның ҳақыйқый x_0 шамасынан айырмасын нәзерде тутамыз.

Әдетте өлшеўлердиң абсолют, салыстырмалы ҳәм келтирилген қәтелерин бир биринен айырып көрсетеди.

Өлшеўдиң абсолют қәтелиги деп физикалық шаманың өлшеўде анықланған ҳәм ҳақыйқый мәнислери арасындағы айырмаға, яғный $x_0 - x$ айырмасына айтамыз. Абсолют қәтеликтиң мәниси оң да, терис те болады.

Салыстырмалы қәтелик деп абсолют қәтеликтиң ҳақыйқый мәниске ямаса өлшеўдиң барысында алынған мәниске қатнасына айтамыз.

Салыстырмалы қәтелик көбинесе процентлерде аңғартылады:

$$\delta = \pm\frac{\Delta x}{x}\cdot 100\% \text{ ямаса } \delta = \pm\frac{\Delta x}{x_0}\cdot 100\%.$$

Келтирилген қәтелик процентлерде аңлатылған абсолют қәтеликтиң нормировкаланған x_n мәнисине қатнасы болып табылады. Бундай қәтеликти $\gamma = \pm\frac{\Delta x}{x_n}\cdot 100\%$ түринде жазамыз. Нормировкаланған мәнис ушын өлшенип атырған шаманың максималлық мәниси болған $x_{\max}$ шамасының алыныўы мүмкин. Бундай жағдайда $x = x_{\max}$.

Көриниў характерине, пайда болыў себеплерине ҳәм сапластырылыў мүмкиншиликлерине байланыслы өлшеўдиң қәтелериниң системалық ҳәм тосаттан болатуғын қураўшыларын бир биринен айырыўға болады. Өлшеўлердиң барысында турпайы түрде жиберилетуғын қәтелесиўлер де бар болады (алжасыўлар).

Системалық қәтеликлер барлық тәжирийбелерде шамасы да, белгиси де сақланатуғын бирдей дәлликтеги өлшеўлер қәтелери болып табылады. Системалық қәтеликлердиң ең әдеттеги ҳәм көп ушырасатуғын дереклери төмендегилер болып табылады:

- пайдаланылып атырған аппаратураның (әсбап-үскенелердиң) кемшиликлери,
- өлшеўдиң пайдаланып атырған усылының кемшиликлери,
- өлшеў аппаратурасының дурыс емес сазланыўы,
- тәжирийбе өткериў шараятының турақлы болмаўы,
- қоршап алған орталықтың тәсири,
- экспериментатордың турақлы түрде жиберетуғын қәтелери,
- басқа параметрлердиң есапқа алынбаған тәсирлери.

Системалық қәтеликлерди сапластырыў мүмкин болған қәтеликлер деп есаплайды. Системалық қәтеликлерди жоғалтыў ямаса киширейтиў ушын изертлеў усылларына сын көз бенен қарап оларды жетилистириў, дәллиги жоқары болған әсбапларды дурыс пайдаланыўы керек болады.

Тосаттан жиберилетуғын қәteliклер бирдей өлшеўлердиң барысында ҳәм бирдей шараятларда ҳәр тәжирийбеде өзиниң шамасын ҳәм белгисин өзгертетуғын қәтеликлер болып табылады. Тосаттан жиберилетуғын қәтеликлер ҳәр бир өлшеўде ҳәр қыйлы ҳәм белгисиз түрде тәсир ететуғын тосаттан болатуғын себеплерге байланыслы пайда болады. Бундай себеплер қатарына әсбаптың айырым бөлимлериниң тосаттан жүзеге келетуғын вибрациясы, орталықтағы ҳәр қыйлы өзгерислер (температуралық, электрлик, магнитлик, оптикалық тәсирлер, ығаллықтың өзгериси, ҳаўаның тербелислери ҳәм басқалар) киреди. Бундай себеплердиң басқа да көплеген түрлерин келтириў мүмкин. Оларды әмелий жақтан сапластырыў мүмкиншилиги пүткиллей болмайды. Бир өлшеўде тосаттан жиберилетуғын қәтеликти болжап айтыў мүмкиншилиги принципинде мүмкин емес. Сонлықтан өлшеўлер санын ақылға муўапық келетуғындай рет қайталаў талап етиледи. Буннан кейин алынған нәтийжелер итималлықлар теориясы менен математикалық статистика усылларының жәрдеминде қайта исленеди. Олар қәтеликлер теориясы деп аталатуғын теорияның тийкары болып табылады.

Қәтелесиўлер (турпайы қәтелер) бақлаўды ямаса өлшеўди дурыс емес өткериўдиң нәтийжесинде пайда болады (әсбаптың көрсетиўин дурыс емес жазып алыў, тәжирийбе өткерилетуғын шараятлардың бузылыўы, материаллардың патасланыўы, кернеўдиң өзгериўи ҳәм басқалар). Бундай дурыс емес мағлыўматларды қайтадан өлшеп көриў жолы менен пайдаланбаў керек.

Егер экспериментлерде алынған нәтийжелердеги системалық қәтеликлерди ҳәм турпайы түрдеги қәтелесиўлерди жоғалтыўға ямаса киширейтиўге болатуғын болса да, тосаттан жиберилетуғын қәтеликлерди сапластырыў мүмкиншилиги болмайды. Сонлықтан лабораториялық практикумдағы бирдей дәлликте өткерилетуғын өлшеўлерде жиберилетуғын тосаттан қәтеликлерди анықлаў усыллары менен танысамыз.

1-§. Ҳәр қыйлы түрдеги бирдей дәлликтеги өлшеўлерде тосаттан жиберилетуғын қәтеликлердиң шамасын анықлаў усыллары

Экспериментallлық изертлеў жумысларын орынлағанда өлшенетуғын шаманың мәнисине усы объектке ямаса қубылысқа туўрыдан-туўры қатнасы жоқ көп санлы тосаттан жүзеге келетуғын факторлар тәсир етеди. Бул факторлар өлшеўлер нәтийжелерине күшли тәсир ете алады, бирақ нызамлық (турақлы) характерге ийе бола алмайды. Сонлықтан экспериментте алынатуғын барлық шамалар тосаттан алынатуғын шамалар болып табылады. Бул жағдайда пайда болатуғын қәтеликлер тосаттан жиберилетуғын қәтеликлер деп аталады. Тосаттан пайда болатуғын қәтеликлерди сапластырыўға болмайды. Бирақ олар итималлықлар теориясы нызамлықларына бағынатуғын болғанлықтан өлшеўлердиң саны жеткиликли дәрежеде көп болғанда барлық ўақытта да өлшенип атырған шаманың ҳақыйқый мәниси жататуғын шеклерди көрсетиў мүмкиншилиги болады.

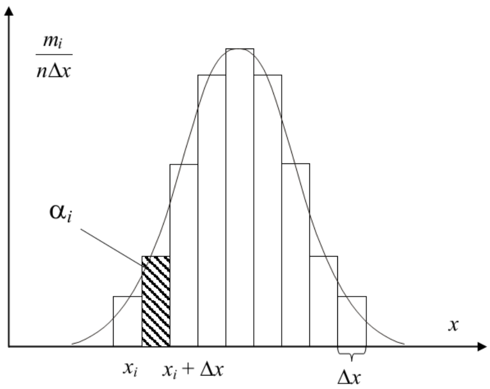
Тосаттан алынатуғын шамалардың қәсийетлери. Тосаттан алынатуғын шамалар деп бирдей шараятларда өткерилген тәжирийбеде ҳәр қыйлы сан мәнислерге ийе болатуғын шамаларға айтамыз. Өлшеўлердеги тосаттан жиберилетуғын қәтеликлер тосаттан алынатуғын шамалардың мысалларының бири болып табылады. Тосаттан алынатуғын шама дискрет (егер ол тек белгили бир санлы мәнислерге ийе болатуғын болса) ҳәм үзликсиз (бундай шама мәнислердиң үзликсиз қатарын қабыл ете алады) шамалар деп бөлинеди. Мысалы узынлықты көп қайтара өлшегенде принципинде базы бир диапазонда оның үзликсиз мәнислерин алыў мүмкин.

Үзликсиз тосаттан алынатуғын шамалардың базы бир қәсийетлерин көрип шығамыз.

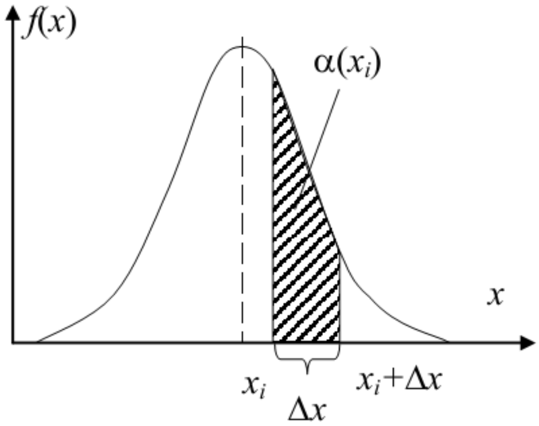
Қандай да бир x физикалық шаманы бирдей дәлликте көп рет туўрыдан-туўры өлшеймиз.

Егер өлшенип атырған шама x үзликсиз болса, онда жеткиликли дәрежеде үлкен болған n рет өлшеўдиң нәтийжесинде x_1, x_2, ... , x_n шамаларының қатарын аламыз. Өлшенип атырған шаманың ҳақыйқый мәниси x_0 бизге мәлим емес. Өлшеўлердиң нәтийжесин графикалық түрде көрсетемиз. Буның ушын барлық алынған мәнислер жайласқан областты кеңлиги Δx бирдей болған бирдей кеңликтеги интервалларға бөлемиз. Буннан кейин усы интерваллардың ҳәр бирине кириўши өлшеўлердиң санын есаплаймыз. Кеңлиги Δx шамасына тең болған интервалларға кириўши өлшеўлердиң санларын сәйкес m_1, m_2, m_3,..., m_k арқалы белгилеймиз (яғный биринши интервалға кириўши өлшеўлер саны m_1 ге тең). $(x_i, x_i + \Delta x)$ интервалына кириўдиң салыстырмалы жийилиги $\frac{m_i}{n}$ ге тең.

Графикти дүзгенде абсцисс көшерин бир бири менен шегараласатуғын саны шекли болған Δx дана кесиндиге бөлемиз. Ҳәр бир $(x_i, x_i + \Delta x)$ кесинди үстине бийиклиги усы интервалға кириўдиң салыстырмалы жийилиги $\frac{m_i}{n}$ шамасына тең туўры мүйешлик соғамыз (оның орнына $\frac{m_i}{n\Delta x}$ шамасын да алыўымыз мүмкин). Усындай жоллар менен пайда болған текшелерден туратуғын график таңлап алыў гистограммасы деп аталады (1-сүўрет).



1-сүўрет.
Таңлап алыў гистограммасы.



2-сүўрет. x шамасының бөлистириўи иймеклиги (ямаса x шамасының итималлығының тығызлығы).

Тап усындай жийиликлик бөлистириў өлшеўлер сериясының нәтийжесин көргизбели түрде көрсетиўге мүмкиншилик береди. Ҳәр бир өлшеўдиң нәтийжеси тосыннан болатуғын себеплер менен анықланатуғын болса да, бул тосыннан болатуғын қубылыстың белгили бир нызамға бағынатуғынлығы анық көринип тур.

Өлшеўлер саны n үлкен болғанда x шамасының x_i дан $x_i + \Delta x$ шамасына шекемги интервалдағы мәнисин қабыл ете алыўының салыстырмалы жийилиги болған $\frac{m_i}{n}$ шамасын итималлық деп атайды $\left(\lim\limits_{x\to\infty}\frac{m_i}{n} = \alpha_i\right)$. Итималлық нолден 1 ге шекемги мәнислерди қабыл ететуғын оң шама.

$\frac{m_i}{n\Delta x}$ шамасы бирлик интервалға сәйкес келетуғын итималлық болып табылады. Оның мәниси x_i дың шамасынан ғәрезли, яғный базы бир $f(x_i)$ функциясы болып табылады. Бул функцияны итималлықтың тығызлығы ямаса бөлистириў тығызлығы деп атайды:

$$n \to \infty \text{ шегинде } f(x_i) = \frac{m_i}{n\Delta x}. \tag{1.1}$$

Интерваллар санын шексиз үлкен етип алғанда интервалдың узынлығы Δx тың нолге умтылатуғынлығын атап өтиўимиз керек. Бундай жағдайда гистограмма тегис түрде өзгеретуғын $f(x)$ иймеклигине айланады. Бул иймекликти x шамасының бөлистириўи иймеклиги ямаса итималлығының тығызлығы деп атайды. Бундай иймеклик максимумға салыстырғанда симметриялы иймеклик болып табылады (2-сүўрет).

Қәлеген шексиз киши dx интервалы ушын x шамасын өлшегенде x тан $x+dx$ шамасына шекемги мәнисиниң алыныў итималлығы $d\alpha(x)$ тың шамасы $f(x)$ итималлық тығызлығынан ғәрезли болады

$$f(x)dx = d\alpha(x). \tag{1.2}$$

x шамасын өлшегенде оның мәнисиниң x тан $x + dx$ шамасына шекемги интервалда болыў итималлығы $\alpha(x_i)$ дың шамасы усы интервалдағы итималлықтың тығызлығы функциясының иймеклигиниң майданына тең (2-сүўреттеги штрихланған область). Оның мәниси итималлықлар тығызлығы болған $f(x)$ функциясын интеграллаў жолы менен алынады:

$$\alpha(x_i) = \int_{x_i}^{x_i+\Delta x} f(x)dx. \tag{1.3}$$

x_i шамасының берилген мәниси ушын Δx интервалының шамасы қаншама үлкен болса, оған сәйкес келетуғын итималлық та соншама үлкен болады (майданы да үлкен).

Енди шексиз узын болған Δx интервалын қараймыз. Өлшенетуғын шаманың -∞ тен +∞ ке шекемги интервалдың ишиндеги қандай да бир мәнисти қабыл етиўиниң итималлығы 1 ге тең (ҳақыйқат ўақыя – барлық ўақытта да жүзеге келетуғын ўақыя). Бул $f(x)$ бөлистириўи иймеклиги астындағы майданның 1 ге тең екенлигин билдиреди:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \tag{1.4}$$

Бул аңлатпа нормировка шәрти деп аталады.

Енди басқа шеклик жағдайды қараймыз. Δx интервалын нолге умтылдырамыз (яғный тосаттан алынатуғын шаманың тек бир айқын мәнисин есапқа аламыз). Бундай жағдайда майдан да нолге тең болады. Бул өз гезегинде өлшеўдиң барысында тосыннан болатуғын үзликсиз шаманың айқын белгиленген мәнисин алыўдың итималлығының нолге тең екенлигин билдиреди. Демек тосаттан болатуғын үзликсиз шама ушын оның мүмкин болған мәнислериниң интервалын ҳәм усы интервалда оның турыўының итималлығын ғана айтыўға болады екен. Бул x_1, x_2, ... , x_n өлшеўлериниң нәтийжелериниң сериясынан шаманың ҳақыйқый мәнисин алыўға болмайтуғынлығын, ал усы ҳақыйқый мәниске жақын болған интервалды ғана анықлаўға болатуғынлығын аңғартады. Тап сол сыяқлы өлшеўлерде жиберилген қәтеликлердиң дәл мәнисин де көрсетиў мүмкин емес, ал сәйкес итималлық пенен қәтеликлердиң мүмкин болған мәнислериниң интервалы ғана көрсетиледи.

Тосаттан алынатуғын үзликсиз шаманың тийкарғы статистикалық характеристикалары. Тосыннан болатуғын үзликсиз шаманың қәсийетлери усы шама бағынатуғын бөлистириў ушын итималлықлардың тығызлығы функциясы $f(x)$ жәрдеминде анықланады. Сол тосаттан алынатуғын шаманың барлық статистикалық характеристикалары итималлықлардың тығызлығы функциясы болған $f(x)$ функциясы тийкарында анықланады.

1. Тосаттан алынатуғын үзликсиз шаманың орташа мәниси (бундай орташа мәнисти әдетте "математикалық күтилиў" деп атайды)

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \tag{1.5}$$

2. Дисперсия. Дисперсия тосаттан алынатуғын шаманың орташа мәнис әтирапындағы шашыраўын тәрийиплейди. Тосаттан алынатуғын үзликсиз шаманың дисперсиясын

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\bar{x} - x)^2 f(x) dx \tag{1.6}$$

формуласының жәрдеминде аламыз.

3. Орташа квадратлық аўысыў деп дисперсиядан алынған квадрат түбир $\sqrt{\sigma^2}$ шамасына айтамыз. Орташа квадратлық аўысыў тосаттан алынатуғын шаманың орташа мәнистен абсолют орташа аўысыўына тең.

Тосаттан алынатуғын шаманың модасы деп ең жийи ушырасатуғын шамаға, яғный максималлық итималлыққа ийе шамаға айтады. Тосаттан алынатуғын үзликсиз шама ушын мода итималлықтың тығызлығы функциясы болған $f(x)$ функциясының максимумына сәйкес келеди.

Солай етип тосаттан алынатуғын шаманың итималлығының тығызлығы функциясы болған $f(x)$ функциясының аналитикалық түри белгили болған жағдайда орташа мәнис, орташа квадратлық аўысыў ҳәм ең итимал болған мәнис сыяқлы шамалар жүдә аңсат түрде есапланады екен.

Итималлықлар теориясында ҳәр қыйлы бөлистириў нызамлары үйрениледи. Олардың ҳәр бири ушын белгили бир итималлық тығызлығының функциясы сәйкес келеди. Олар тосаттан алынатуғын шамалар үстинен өткерилген үлкен сандағы бақлаўлардың нәтийжелерин қайта ислеўлер тийкарында алынған. Бул нызамларды өлшеўлердиң нәтийжелерин қайта ислеў ушын пайдаланыў мүмкин. Бирақ берилген тосаттан алынған шаманың қандай бөлистириў нызамына бағынатуғынлығын алдын-ала билип алыў керек болады.

2-§. Туўрыдан-туўры көп қайтара өткерилген өлшеўлердеги тосаттан жүзеге келетуғын қәтеликлер

Эксперименталлық өлшеўлер қәтелери теориясында Гаусс (нормал бөлистириў), Стьюдент бөлистириўлери ҳәм тең өлшеўли бөлистириў жийи ушырасады. Солардың ишинде Гаусс бөлистириўи жүдә айрықша орынды ийелейди. Бул жағдай итималлықлар теориясындағы орайлық шеклик теорема менен тиккелей байланыслы. Бул теорема тосаттан жүзеге келетуғын бир неше бир биринен ғәрезсиз бир неше процесслер сыпатында қәлиплесетуғын тосаттан алынатуғын шама нормал бөлистириўге (Гаусс бөлистириўине) бағынады деп тастыйықлайды. Тосаттан жиберилетуғын қәтеликлер бар жағдайда көп қайтара өткерилген өлшеўлердиң нәтийжелери бир биринен ғәрезсиз ҳәрекет ететуғын факторлардың тәсиринде қәлиплеседи. Усы тийкарда көп қайтара туўрыдан-туўры өткерилген өлшеўлердиң нәтийжелериниң нормал бөлистириўге бағынады деп есаплаўға болады.

Әдетте нормал бөлистириў деп аталатуғын бөлистириўди Гаусс бөлистириўи, гаусиана деп атайды ҳәм ол төмендегидей тығызлықтың бөлистириў формуласы менен бериледи:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \tag{2.1}$$

Бул аңлатпада μ арқалы тосаттан алынатуғын шаманың орташа мәниси (математикалық күтилиўи) белгиленген ҳәм бөлистириў тығызлығының максимумының координатасын анықлайды. σ^2 арқалы дисперсия белгиленген.

Тосаттан алынатуғын үзликсиз шаманың нормал бөлистириўи. Жоқарыда айтып өткенимиздей, нормал бөлистириў К.Ф.Гаусс тәрепинен алынды. Бул бөлистириў тәбиятта, экономикада, илим менен техниканың басқа да тараўларында ең көп тарқалған бөлистириў болып табылады. Усының менен бирге шеклик жағдайларда көп санлы басқа бөлистириўлер нормал бөлистириўге өтеди.

Нормал бөлистириўге ийе тосаттан алынатуғын x шамасы -∞ тен +∞ ке шекемги қәлеген мәниске ийе бола алады ҳәм

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\bar{x}-x)^2}{2\sigma^2}} \qquad (2.2)$$

түринде жазылады. Бул аңлатпада $\bar{x}$ абсциссасы итималлықлар тығызлығы $f(x)$ функциясының максимумына сәйкес келеди, σ^2 шамасы болса ең итимал мәнис $\bar{x}$ тың әтирапындағы өлшеўлердиң нәтийжелериниң шашаўлығын тәрийиплейди ҳәм бас дисперсия (генеральная дисперсия) деп аталады. σ шамасын ең бас орташа квадратлық аўысыў деп атаймыз.

Нормал бөлистириўдиң тийкарғы қәсийетлери:

1. Бөлистириў $x=\bar{x}$ ноқатына қарата симметриялы.

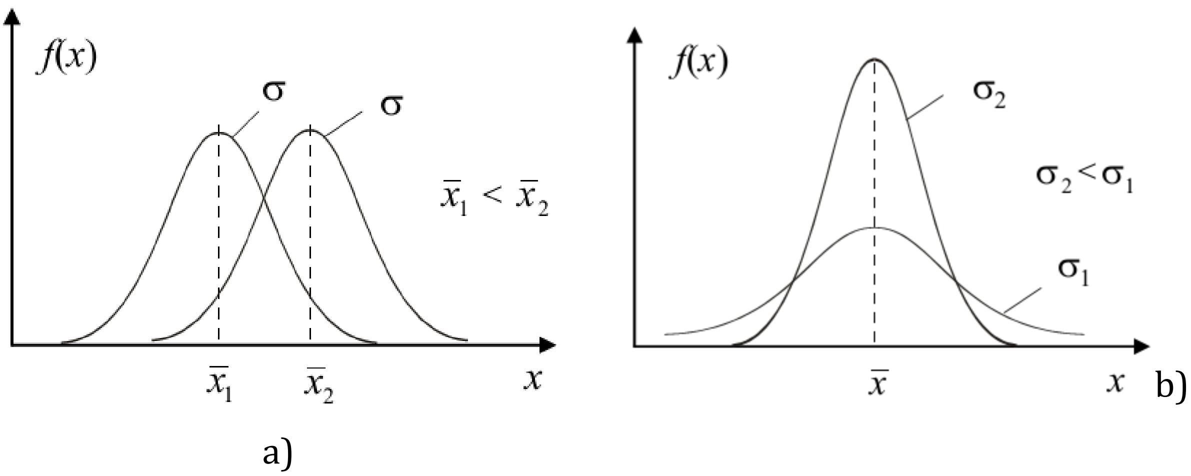
2. Математикалық күтилиў $\bar{x}=\int_{-\infty}^{+\infty}xf\left(x\right)dx$ формуласының жәрдеминде есапланады [(1.5)-формула]. Нормал бөлистириў ушын оның мәниси тосаттан алынатуғын шаманың ең итимал мәнисине сәйкес келеди. Оған $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ шамасына тең итималлықтың тығызлығы сәйкес келеди.

3. Дисперсия $\sigma^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(\bar{x}-x)^2f(x)dx$ түринде, ал орташа квадратлық аўысыў $\sigma=\sqrt{\sigma^2}$ түринде анықланады [(1.6)-формула)].

4. Итималлықтың тығызлығы функциясы болған $f(x)$ функциясы $x=\bar{x}$ ноқатында максималлық мәниске ийе, бул ноқаттағы оның мәниси $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ шамасына тең. Соның менен бирге $f(x)$ функциясы $x_1=\bar{x}-\sigma$ ҳәм $x_2=\bar{x}+\sigma$ ноқатларында еки ийилиў (перегиб) ноқатларына ийе.

5. Нормировка шәрти $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = 1$ түринде жазылады [(1.4)-формула].

Қәтелер теориясында экспериментлерде алынатуғын мәнислер көпшилик жағдайларда өлшенип атырған физикалық шаманың ҳақыйқый мәнислери болып табылады деп есаплайды. Демек нормал бөлистириўге бағынатуғын физикалық шама ушын ҳақыйқый мәнис x_0 математикалық күтилиў $\bar{x}$ қа тең болады, яғный $x_0 = \bar{x}$.



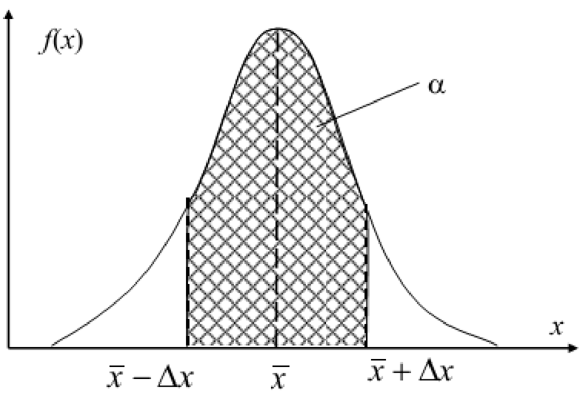
3-сүўрет.

Бундай жағдайда эксперименталлық өлшеўлердиң қәтелерин анықлаў (баҳалаў) мәселесине нормал бөлистириўди (Гаусс бөлистириўин) қолланғанда $\bar{x}$ пенен σ^2 шамаларын былайынша интерпретациялаў мүмкин:

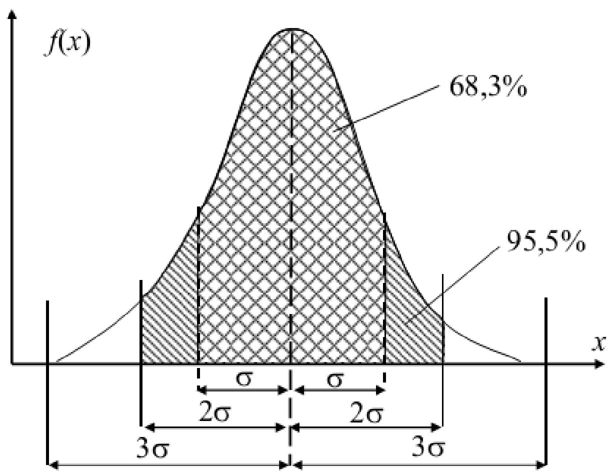
1. Математикалық күтилиўи (орташа мәниси, ҳақыйқый мәниси) $\bar{x}_1$ шамасына тең базы бир физикалық шаманы өлшеўдиң сериясын орынлаймыз. Буннан кейин тап сондай шараятларда сондай әсбаптың жәрдеминде математикалық күтилиўи $\bar{x}_2$ шамасына тең болған басқа физикалық шаманы өлшеўдиң сериясын орынлаймыз. Екинши шаманың

итималлығының тығызлығының максимумы биринши шаманың итималлығының тығызлығының максимумынан жылысқан, ал иймекликлердиң кеңлиги бирдей болады (3-сүўрет). Бөлистириўдиң дисперсиясы σ берилген усыл менен өлшегендеги мәнислердиң шашаўлығын (пытыраңқылығын) тәрийиплейди.

Егер бир шама ҳәр қыйлы усыллар менен өлшенген болса (мысалы ҳәр қыйлы әсбаплардың жәрдеминде өлшенген болса), онда тосаттан пайда болатуғын қәтеликлерге байланыслы ҳақыйқый мәнис $\bar{x}$ әтирапындағы нәтийжелердиң пытыраңқылығы басқаша болады (3-b сүўрет). Егер дәлирек өлшеў усылы қолланылса нәтийжелердиң пытыраңқылығы киши болады (σ_2 шамасының мәниси киши болады), иймекликтиң кеңлиги киширейеди. 3-b сүўретте $\sigma_2 < \sigma_1$.



4-сүўрет.



5-сүўрет.

Солай етип орташа квадратлық аўысыў σ әсбапты ямаса өлшеў усылын тәрийиплейди екен, ал математикалық күтилиў $\bar{x}$ болса өлшенетуғын шаманың ҳақыйқый мәнисин береди. Бул жағдайдың орынланыўы ушын тәжирийбелер санының оғада көп болыўының шәрт екенлигин атап өтемиз (математикалық жақтан тәжирийбелер саны шексиз үлкен болыўы керек).

$\bar{x}$ шамасы өлшенетуғын шаманың ҳақыйқый мәнисине сәйкес келетуғын болғанлықтан эксперименталлық изертлеўлер ушын өлшенген шаманың $\bar{x}$ шамасының қасында жайласқанлығының итималлығы α ны анықлаў әҳмийетли. Басқа сөзлер менен айтқанда өлшенген шаманың $\bar{x}$ шамасына симметриялы болған ($\bar{x}-\Delta x,\ \bar{x}+\Delta x$) интервалында болыўының итималлығын α ны анықлаў керек болады (4-сүўрет). Итималлықлар теориясы бойынша α итималлығы $f(x)$ иймеклиги астындағы сәйкес интервалдағы майданға тең. Ал бул майданның шамасы интеграллаў арқалы анықланады, яғный

$$\alpha = \int_{\bar{x}-\Delta x}^{\bar{x}+\Delta x} f\left(x\right)dx. \tag{2.3}$$

Өлшенген физикалық шаманың мәниси узынлығы Δx болған интервалдың ишиндеги мәнисти қабыл етиўиниң итималлығының σ шамасына пропорционал екенлиги 1-кестеде берилген. 5-сүўретте болса ±σ, ±2σ, ±3σ болған интерваллар ушын α итималлықларының мәнислери көрсетилген.

1-кесте.

№	Интервал	Итималлық, %
1	$\bar{x}-\sigma \le x \le \bar{x}+\sigma$	68,3
2	$\bar{x}-1{,}96\sigma \le x \le \bar{x}+1{,}96\sigma$	95,0
3	$\bar{x}-2\sigma \le x \le \bar{x}+2\sigma$	95,5
4	$\bar{x}-2{,}58\sigma \le x \le \bar{x}+2{,}58\sigma$	99,0
5	$\bar{x}-3\sigma \le x \le \bar{x}+3\sigma$	99,7

Экспериментте өлшенетуғын шаманың мәнисин берилген интервалда алыўға мүмкиншилик беретуғын интервалдың узынлығы Δx пенен итималлық α арасындағы байланыстың бар екенлигин аңсат аңғарыўға болады. Интервалдың узынлығы болған Δx шамасын орташа квадратлық аўысыў σ арқалы аңлатамыз: $\Delta x = k_\alpha \sigma$. Бундай жағдайда пропорционаллық коэффициенти k_α шамасы α итималлығынан ғәрезли деп тастыйықлаўға болады. Итималлық α қанша үлкен болса өлшенген шама жайласатуғын Δx интервалы да үлкен ҳәм усыған сәйкес k_α коэффициенти де үлкен мәниске ийе болады.

Өлшеўдиң нәтийжелерине тосаттан ушырасатуғын көп санлы бир биринен ғәрезсиз факторлар тәсир ететуғын болғанлықтан экспериментте алынған нәтийжелердиң барлығы үйренилип атырған объектти ямаса қубылысты исенимли түрде тәрийиплей алмайды. Гейпара жағдайларда басқа сыртқы факторлар дың тәсири жүдә күшли болыўы мүмкин ҳәм сонлықтан өлшенген шаманы үйренилип атырған физикалық шамаға қатнасы бар деп айтыўға болмайды. Берилген эксперимент шараятларында алынған шамаларды ҳақыйқат деп есаплаўдың итималлығын үмит ямаса исенимлик итималлығы деп атайды. Исенимлик итималлықтың шамасы өткерилген өлшеўлердиң характерине байланыслы анықланады. Улыўма физика курсындағы лабораториялық жумысларды орынлағанда исенимлик итималлығын 95 процентке тең деп есаплайды.

Экспериментте α исенимлик итималлығы менен алынған мәнис киретуғын Δx интервалын исенимлик интервалы деп атайды. $\Delta x = \sigma$ исенимлик интервалына ($k_\alpha = 1$) 68,3 % лик исенимлик итималлығы сәйкес келеди. Итималлықтың анықламасы бойынша нәтийжелердиң 68,3 проценти ($\bar{x} - \sigma,\ \bar{x} + \sigma$) интервалына киреди, ал 31,7 проценти бул интервалдың сыртында жайласады. Соның менен бир қатарда, егер исенимлик итималлығы 95,5 % шамасына тең болса, онда эксперименталлық мәнислердиң 95,5 проценти ($\bar{x} - 2\sigma,\ \bar{x} + 2\sigma$) интервалында жайласқан болады ҳәм $k_\alpha = 2$ теңлиги орынланады.

Эксперимент өткерилген шараятта (яғный берилген исенимлик интервалында) өлшеўлер нәтийжелериниң тек Δx исенимлик интервалына киретуғынлары ғана исенимли болатуғын болғанлықтан бул шамалардың абсолют қәтелери (ҳақыйқый мәнистен аўысыўлары) исенимлик интервалы Δx тың узынлығы менен шекленген болады.

Демек исенимлик интервалы Δx тың узынлығы өткерилген өлшеўлер сериясының (көп қайтара өлшеўлердиң) қәтелигиниң характеристикасы болып табылады екен. Сонлықтан өлшеўлер сериясының қәтелиги болған $\Delta x = k_\alpha \sigma$ шамасы өлшенетуғын физикалық шаманың орташа квадратлық аўысыўы σ ҳәм экспериментлердиң берилген сериясының исенимлик итималлығы σ арқалы анықланады. Бул шамалардың екеўи де экспериментлерди өткериў шараятларынан ғәрезли болады. Сонлықтан көп қайтара өткерилген өлшеўлердеги тосаттан алынатуғын қәтелериниң шамасының характеристикасы ушын еки санды көрсетиў зәрүр: исенимлик интервалы Δx шамасының шамасы ҳәм усы интервалға сәйкес келиўши исенимлик итималлық α шамасының шамасы.

Өлшенетуғын физикалық шаманың ҳақыйқый мәниси ҳәм қәтеси. Физик алдында айқын физикалық шаманы өлшеў мәселеси турады. Тәжирийбелер саны барлық ўақытта шекленген, ал өлшенип атырған физикалық шама бағынатуғын нормал бөлистириўдиң параметрлери $\bar{x}$ пенен σ белгисиз болсын. Бундай жағдайда шекли сандағы өлшеўлерден ҳақыйқый мәнисти ҳәм өлшеўлердиң қәтелигин қалайынша анықлаўға болады деген сораў пайда болады.

Дәллиги бирдей n рет өткерилген өлшеўлерде физикалық шаманың n дана мәниси алынды деп есаплайық. Физикалық шаманың ҳақыйқый мәниси $x_0 = \bar{x}$ белгисиз, ал өлшенетуғын шама x Гаусс бөлистириўине бағынады деп болжайық. x_1, x_2, x_3, ... арқалы айырым өлшеўлердиң нәтийжелери, ал Δ_1, Δ_2, Δ_3,... шамалары арқалы алынған нәтийжелердиң $x_0 = \bar{x}$ ҳақыйқый мәнистен аўысыўлары белгиленген болсын (айырым өлшеўлердиң ҳақыйқый абсолют қәтелери).

$$\Delta_1 = \bar{x} - x_1,$$

$$\Delta_2 = \bar{x} - x_2,$$

$$\Delta_3 = \bar{x} - x_3 \quad \text{ҳ.т.б.}$$

Абсолют қәтеликлер Δ_1, Δ_2, Δ_3,... оң да терис те мәнислерге ийе болады. Теңликлердиң оң ҳәм шеп тәреплерин суммалап ағзалардың орынларын алмастырып қойғаннан кейин

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = n\bar{x} - \sum_{i=1}^{n} \Delta_i$$

теңлигин аламыз. Соңғы теңликтиң еки тәрепин де өлшеўлер саны n ге бөлсек

$$\bar{x} = \tilde{x} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta_i$$

формуласын аламыз. Бул формулада

$$\tilde{x} = \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right) \tag{2.4}$$

ямаса

$$\tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{2.5}$$

$\tilde{x}$ шамасын орташа арифметикалық мәнис деп атайды.

Гаусс иймеклигиниң симметриясына байланыслы экспериментлердиң саны үлкен болғанда ҳақыйқый мәнистен үлкен болған Δ шамалардың алыныў итималлығы ҳақыйқый мәнистен киши болған Δ шамаларының алыныў итималлығына тең болады (оң ҳәм терис абсолют қәтеликлердиң итималлықлары бир бирине тең). Бундай жағдайда

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta_i\right) = 0,$$

яғный өлшеўлер саны үлкен болғанда тосыннан кететуғын абсолют қәтеликлердиң орташа мәниси нолге умтылады. Демек өлшеўлер саны жеткиликли дәрежеде үлкен болса, онда тосаттан алынатуғын x шамасы Гаусс бөлистириўине бағынады деген сөз. Сонлықтан

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{x}=\bar{x}$$

аңлатпасына ийе боламыз.

Гаусс бөлистириуиндеги σ² дисперсиясы өлшеўлердиң орташа квадратлық пытыраңқылығын көрсетеди, ал орташа квадратлық аўысыў σ берилген исенимлик итималлығы α ушын исенимлик интервалының шамасына пропорционал. Дисперсияның анықламасы бойынша

$$\text{n} \to \infty \text{ шегинде } \sigma=\int_{-\infty}^{+\infty}(\bar{x}-x)^2 f(x)dx.$$

Өлшеўлер саны n шекли болған жағдай ушын итималлықлар теориясына ҳәм математикалық статистикаға сәйкес

$$\sigma=\sqrt{\frac{(\bar{x}-x_1)^2+(\bar{x}-x_2)^2+...+(\bar{x}-x_n)^2}{n}} \tag{2.6}$$

аңлатпасына ийе боламыз.

n → ∞ шегинде $\tilde{x}=\bar{x}$ болғанлықтан орташа квадратлық аўысыўды былайынша жазыўға болады:

$$\tilde{\sigma}=\sqrt{\frac{(\tilde{x}-x_1)^2+(\tilde{x}-x_2)^2+...+(\tilde{x}-x_n)^2}{n(n-1)}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x}-x_i)^2}{n(n-1)}}. \tag{2.7}$$

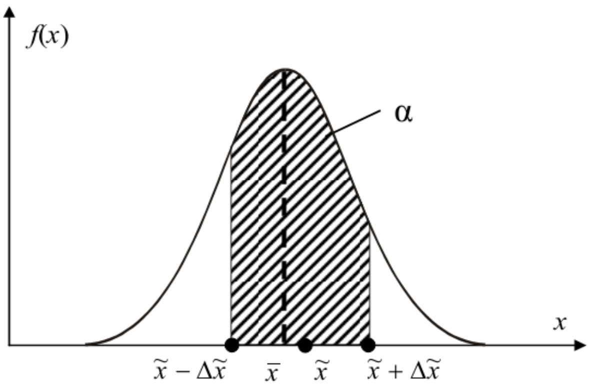
Өлшеўлердиң саны жүдә көп болса $(n\to\infty)$ $\tilde{\sigma}=\sigma$ теңлиги орынланады. Бундай жағдайда исенимлик интервалы $\Delta x=k_\alpha\sigma$ биз қарап атырған шекте $(n\to\infty)$ $\Delta\tilde{x}=k_\alpha\tilde{\sigma}$ теңлигиниң жәрдеминде анықланады ҳәм берилген исенимли итималлық α ушын $\tilde{\sigma}$ шамасына пропорционал. Усы жағдайға сәйкес өлшенип атырған физикалық шама $\tilde{x}\pm k_\alpha\tilde{\sigma}$ интервалында (ямаса $\tilde{x}\pm\Delta\tilde{x}$ интервалында) α исенимли итималлықта мәниске ийе болады деп айтады. Ал өлшенетуғын физикалық шаманың ҳақыйқый мәниси $\tilde{x}=\bar{x}$ шамасына тең.

Бундай жағдайда x физикалық шамасын өлшеў сериясының нәтийжелерин былайынша жазады

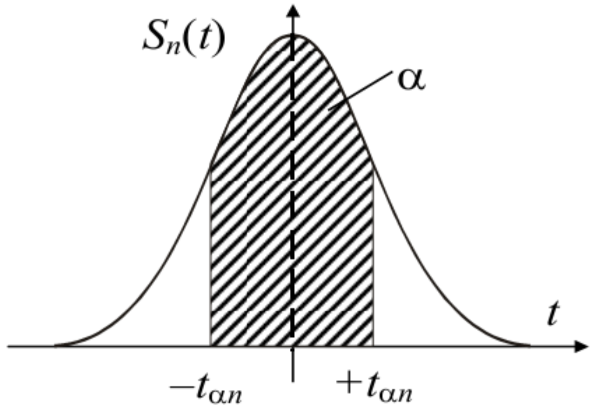
α шамасына тең исенимли итималлық пенен $x = \tilde{x} \pm \Delta\tilde{x}$.

Исенимли интервалды (көп қайтара өлшеўлердиң тосыннан алынатуғын қәтеси) $\Delta\tilde{x} = k_{\alpha}\tilde{\sigma}$ түринде сайлап алыў өлшеўлер санының 50 ден үлкен екенлигин (яғный $n \geq 50$) нәзерде тутады. Бундай жағдайда Гаусс бөлистириўинен пайдаланады (1-кесте).

Егер физикалық шаманы өлшеўлердиң саны үлкен болмаса, онда өлшенетуғын шаманың ҳақыйқый мәниси $x_0 = \bar{x}$ орташа арифметикалық мәнис болған $\tilde{x}$ шамасына тең болмайды. 6-сүўрет көп санлы болмаған өлшеўлердеги ҳақыйқый мәнис ($\bar{x}$) пенен орташа арифметикалық мәнистиң ($\tilde{x}$) бир бирине тең болмайтуғынлығына мысал ретинде келтирилген.



6-сүўрет. Егер физикалық шаманы өлшеўлердиң саны үлкен болмаса, онда өлшенетуғын шаманың ҳақыйқый мәниси орташа арифметикалық мәниске тең болмайды.



7-сүўрет. Стьюдент бөлистириўи.

Егер өлшеўлер саны n аз болса, онда α итималлығы бойынша исенимли интервал $\Delta\tilde{x}$ ты Гаусс бөлистириўинен пайдаланыўға болмайды. Физикалық практикумдағы лабораториялық жумысларды орынлағанда өлшеўлер әдетте 10 нан кем болады (яғный $n \leq 10$).

Стьюдент бөлистириўи. Егер өлшеўлер саны $2 \le n \le 10$ болса, онда исенимли интервал Стьюдент бөлистириўиниң жәрдеминде анықланады.

Мейли параметрлери $\bar{x}$ ҳәм σ болған нормал бөлистириўге бағынатуғын тосаттан алынатуғын x шамасын n рет қайталанған өлшеўлердиң нәтийжесинде ҳәр қыйлы болған x_1, x_2, ... , x_n шамалары алынған болсын.

Англиялы математик ҳәм химик Уильям Сили Госсет (William Sealy Gosset, псевдоними Стьюдент, 1876-1937, белгили инглиз илимпаз-статистиги болып есапланады) 1908-жылы

$$t = \frac{\bar{x} - \tilde{x}}{\tilde{\sigma}} \tag{2.8}$$

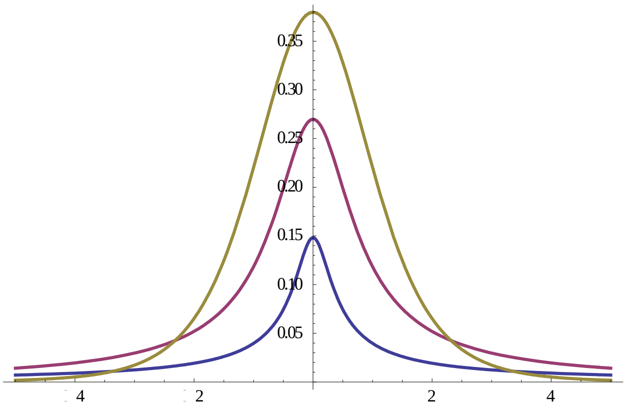
түриндеги тосаттан алынатуғын шаманы үйренди. Бул аңлатпада $\tilde{\sigma}$ арқалы берилген n дана өлшеўлерден туратуғын сериядағы өлшеўлер нәтийжелериниң $\tilde{x}$ орташа арифметикалық шамадан орташа квадратлық аўысыўы белгиленген.

$\tilde{x}$ пенен $\tilde{\sigma}$ шамаларының мәнислери өлшеўлер саны n нен ғәрезли. Сонлықтан n_1 рет өлшеўлер өткергенде t_1 сан мәнисине, n_2 рет өлшеўлер өткергенде t_2 сан мәнисине ийе болады. Стьюдент тосыннан алынатуғын t шамасы ушын $S_n(t)$ бөлистириў нызамын (итималлықлар тығызлығын) алды. Бул n менен t ның базы бир математикалық функциясы болып табылады. Ал Стьюдент нызамы болса тосаттан алынатуғын нормал Гаусс шамаларын өлшеўде алынатуғын қәтеликлердиң тарқалыў нызамы болып табылады. Бул функция (яғный итималлықлардың тығызлығы) $t = 0$ де, $\bar{x} = \tilde{x}$ теңлиги орынланғанда максимумға ийе болады. Бул жағдай 7-сүўретте келтирилген.

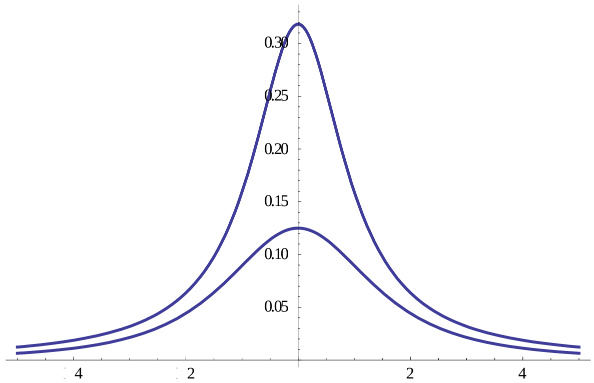
Ҳәзирги ўақытлары Стьюдент бөлистириў функциясының мәнислери математикалық программалаў тиллериниң жәрдеминде аңсат табылады ҳәм есапланады. Мысал ретинде Matmematica 9.0 компьютерлик алгебра системасында Стьюдент функциясын есаплаўды көрсетемиз. Сәйкес программа былайынша жазылады:

$$Plot[Evaluate@Table[PDF[StudentTDistribution[\nu],t],$$
$$\{\nu,\{0.1,0.5,5\}\}],\{t,-5,5\},PlotStyle\to Thickness[0.005]]$$

Компьютер төмендегидей нәтийжелерди береди (8-сүўрет).



8-сүўрет. Mathematica 9.0 компьютерлик алгебра системасы жәрдеминде алынған Стьюдент бөлистириўлериниң иймекликлери.



9-сүўрет. n = 2 ҳәм n = 1 болған жағдайлар ушын $f_t(y)$ функциясының графиги [(2.9)-аңлатпа бойынша].

Тап сол сыяқлы ҳәзирги ўақытлары Стьюдент коэффициентлериниң мәнислерин есаплаў да ҳеш қандай қыйыншылық пайда етпейди. Мысалы итималлық тығызлығы ушын

$$f_t(y)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(n+\frac{y^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \qquad (2.9)$$

түриндеги формула орынлы болады. Бул формулада Γ арқалы Эйлердиң гамма функциясы белгиленген. Биз бул функцияның графигинде дүзе аламыз (9-сүўрет), функцияның мәнислерин де есаплай аламыз.

$\bar{x}$ шамасына қарата симметрия болған x шамасының интервалына нолге қарата симметриялы t өзгериўшисиниң мәнислериниң интервалы сәйкес келеди. t шамасының базы бир $-t_{\alpha n}$ шамасынан $+t_{\alpha n}$ шамасына шекемги интервалда мәниске ийе болыўының итималлығын α арқалы белгилейик (7-сүўреттеги штрихланған область). Егер базы бир өлшеўлер саны n ушын исенимли итималлық α ның шамасын беретуғын болсақ, онда $S_n(t)$ функциясын пайдаланып сәйкес симметриялы $t_{\alpha n}$ интервалының шегараларын есаплаў мүмкин. Бул шегаралар α менен n шамаларына байланыслы болады:

$$\alpha = \int_{-t_{\alpha n}}^{+t_{\alpha n}} S_n(t)dt. \qquad (2.10)$$

$t_{\alpha n}$ шамаларын Стьюдент коэффициентлери деп атайды.

Биз Стьюдент коэффициентлериниң мәнислерин аңсат есаплай аламыз. Оның ушын (2.10) интегралының мәнислерин есаплаўымыз керек болады. Буны Mathematica тилинде әмелге асырыў ушын $S_n(t)$ функциясының орнына (2.9)-аңлатпадан итималлық тығызлығы функциясын алып келип қоямыз. Бирақ бундай жағдайда аналитикалық жоллар менен интеграллаўдың мүмкин емес екенлигин есапқа алып интеграллаўды санлы жоллар менен әмелге асырамыз. Бул Mathematica тилинде былайынша жазылады:

$$t\alpha n = 0.5; n = 5; NIntegrate[\frac{Gamma\left[\frac{n+1}{2}\right]}{\sqrt{\pi n}Gamma\left[\frac{n}{2}\right]}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)\hat{}\left(-\frac{n+1}{2}\right), \{x, -t\alpha n, t\alpha n\}].$$

Нәтийжеде бул формулаға n, $t_{\alpha n}$ лердиң мәнислерин қойыў жолы менен Стьюдент коэффициентлериниң мәнислерин есаплаў мүмкиншилигине ийе боламыз.

Тәжирийбелер саны n ҳәм исенимли итималлық α ушын $t_{\alpha n}$ Стьюдент коэффициентлериниң мәнислерин әпиўайы жоллар менен есаплаймыз.

Бул коэффициент орташа арифметикалық мәнистиң ҳақыйқый мәнистен максималлық аўысыўына сәйкес келеди. $\tilde{x}$ тың $\bar{x}$ шамасынан максималлық аўысыўы исенимли интервалдың узынлығы $\Delta\tilde{x}$ шамасына тең. Бундай жағдайда $t = \dfrac{\bar{x} - \tilde{x}}{\tilde{\sigma}}$ ның анықламасы бойынша мынаған ийе боламыз:

$$\bar{x} - \tilde{x} t_{\alpha n} = \left.\frac{\bar{x} - \tilde{x}}{\tilde{\sigma}}\right|_{\max} = \frac{\Delta\tilde{x}}{\tilde{\sigma}} \Rightarrow \Delta\tilde{x} = t_{\alpha n}\tilde{\sigma}. \qquad (5)$$

Бул аңлатпада $\Delta\tilde{x}$ арқалы n ниң мәниси үлкен болмаған жағдайда ҳәм берилген исенимли итималлық α ушын нормал бөлистириўге бағынатуғын тосыннан алынатуғын үзликсиз x шамасы ушын исенимлик интервалының шегарасы белгиленген. Ал $t_{\alpha n}$ арқалы n рет өлшеў ҳәм исенимлик итималлығы α ушын Стьюдент коэффициенти, $\tilde{\sigma}$ арқалы өлшеўлердиң усы сериясындағы өлшеўлер нәтийжелериниң $\tilde{x}$ орташа арифметикалық шамасынан орташа квадратлық аўысыўы белгиленген.

n → ∞ шегинде Стьюдент бөлистириўи Гаусс бөлистириўине өтеди. Бирдей α коэффициентлеринде $t_{\alpha n}$ менен k_α коэффициентлери n ≥ 50 болғанда теңлеседи.

Солай етип өлшеўлердиң саны киши болғанда тосыннан жиберилетуғын қәтелик (исенимли интервал) $\Delta\tilde{x}$ ты Стьюдент коэффициентин пайдаланып былайынша есаплаўға болады екен:

$$\Delta\tilde{x} = t_{\alpha n}\tilde{\sigma}. \qquad (2.12)$$

Биз 2-кестеден Стьюдент коэффициентлериниң мәнислерин келтиремиз.

2-кесте. Ҳәр қыйлы *p* исенимли интерваллары ҳәм еркинлик дәрежеси саны t ушын Стьюдент коэффициентлериниң мәнислери.

t	p (исенимли интервал)							
	0.80	0.90	0.95	0.98	0.99	0.995	0.998	0.999

1	3.0770	6.3130	12.7060	31.820	63.656	127.656	318.306	636.619
2	1.8850	2.9200	4.3020	6.964	9.924	14.089	22.327	31.599
3	1.6377	2.35340	3.182	4.540	5.840	7.458	10.214	12.924
4	1.5332	2.13180	2.776	3.746	4.604	5.597	7.173	8.610
5	1.4759	2.01500	2.570	3.649	4.0321	4.773	5.893	6.863
6	1.4390	1.943	2.4460	3.1420	3.7070	4.316	5.2070	5.958
7	1.4149	1.8946	2.3646	2.998	3.4995	4.2293	4.785	5.4079
8	1.3968	1.8596	2.3060	2.8965	3.3554	3.832	4.5008	5.0413
9	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	3.6897	4.2968	4.780
10	1.3720	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	3.5814	4.1437	4.5869
11	1.363	1.795	2.201	2.718	3.105	3.496	4.024	4.437
12	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0845	3.4284	3.929	4.178
13	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.1123	3.3725	3.852	4.220
14	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.976	3.3257	3.787	4.140
15	1.3406	1.7530	2.1314	2.6025	2.9467	3.2860	3.732	4.072
16	1.3360	1.7450	2.1190	2.5830	2.9200	3.2520	3.6860	4.0150
17	1.3334	1.7396	2.1098	2.5668	2.8982	3.2224	3.6458	3.965
18	1.3304	1.7341	2.1009	2.5514	2.8784	3.1966	3.6105	3.9216
19	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609	3.1737	3.5794	3.8834
20	1.3253	1.7247	2.08600	2.5280	2.8453	3.1534	3.5518	3.8495

Енди көп рет өткерилген өлшеўлердеги тосаттан алынатуғын (кететуғын) қәтеликлер бойынша бир қатар жуўмақлар шығарамыз.

Жоқарыда айтылып өтилген таллаўлар туўрыдан-туўры көп қайтара өткерилетуғын өлшеўлерде тосаттан жиберилетуғын қәтеликлерди анықлаў ушын жүргизилди. Бул жағдайда исенимли интервалды $\Delta\tilde{x}_{tos}$ арқалы белгилейтуғынлығын атап өтемиз.

Солай етип базы бир x физикалық шамасын туўрыдан-туўры көп қайтара өткерилетуғын өлшеўлердеги тосыннан жиберилетуғын қәтеликлерди баҳалаў ушын төмендегидей есаплаўларды әмелге асырыў керек болады екен:

1. Өлшеўлерде алынған шамалардың орташа арифметикалық мәниси анықланады [(2.5)-формула].

2. Орташа квадратлық аўысыў есапланады [(2.7)-аңлатпа].

3. α = 0,95 шамасына тең исенимлик итималлығы сайлап алынады (улыўма физика курсын бойынша физикалық практикумда орынланатуғын жумыслардың көпшилиги ушын).

4. Кестеден ямаса компьютердиң жәрдеминде есаплаў арқалы Стьюдент коэффициенти $t_{\alpha n}$ шамасы анықланады.

5. Исенимли интервал анықланады (көп қайтара өткерилген өлшеўлер сериясының қәтеси) [(2.12)-аңлатпа]:

$$\Delta\tilde{x}_{tos} = t_{\alpha n}\tilde{\sigma}.$$

6. Нәтийжени былайынша жазады:

α исенимлик итималлығы менен $x = \tilde{x} \pm \Delta\tilde{x}_{tos}$.

Биз бул параграфтың ақырында әпиўайы функциялар ушын системалық ҳәм тосаттан алынатуғын қәтелерди есаплаў кестелерин беремиз.

3-кесте. Әпиўайы функциялар ушын системалық қәтелерди есаплаў кестеси

N	f	δf	$\varepsilon = \delta f / f$	N	f	δf	$\varepsilon = \delta f / f$
1	$x+y$	$\delta x + \delta y$	$\frac{\delta x + \delta y}{x+y}$	6	$x^{1/n}$	$\frac{\delta x}{nx^{\frac{n-1}{n}}}$	$\frac{\delta x}{nx}$
2	$x-y$	$\delta x + \delta y$	$\frac{\delta x + \delta y}{x-y}$	7	$\sin x$	$\cos x \cdot \delta x$	$\frac{\delta x}{tgx}$
3	$x \cdot y$	$y\delta x + x\delta y$	$\frac{\delta x}{x} + \frac{\delta y}{y}$	8	cos x	$\sin x \cdot \delta x$	$tgx \cdot \delta x$
4	x/y	$\frac{y\delta x + x\delta y}{y^2}$	$\frac{\delta x}{x} + \frac{\delta y}{y}$	9	tg x	$\frac{\delta x}{\cos^2 x}$	$\frac{2\delta x}{\sin 2x}$
5	x^n	$nx^{n-1}\delta x$	$n\frac{\delta x}{x}$	10	ln x	$\frac{\delta x}{x}$	$\frac{2\delta x}{x \cdot \ln x}$

4-кесте. Әпиўайы функциялар ушын тосаттан алынатуғын қәтелерди есаплаў кестеси

N	f	δf	$\varepsilon = \delta f / f$	N	f	δf	$\varepsilon = \delta f / f$
1	$x+y$	$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$	$\frac{\sqrt{(y\Delta x)^2 + (x\Delta y)^2}}{x+y}$	6	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{\Delta x}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\frac{\Delta x}{nx}$

2	$x-y$	$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$	$\frac{\sqrt{(y\Delta x)^2+(x\Delta y)^2}}{x-y}$	7	$\sin x$	$\cos x\Delta x$	$\frac{\Delta x}{tgx}$
3	xy	$\sqrt{(y\Delta x)^2+(x\Delta y)^2}$	$\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$	8	$\cos x$	$\sin x\Delta x$	$tgx\Delta x$
4	$\frac{x}{y}$	$\frac{x}{y}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$	$\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$	9	tgx	$\frac{\Delta x}{\cos^2 x}$	$\frac{2\Delta x}{\sin 2x}$
5	x^n	$nx^{n-1}\Delta x$	$n\frac{\Delta x}{x}$	10	$\ln x$	$\frac{\Delta x}{x}$	$\frac{\Delta x}{x\ln x}$

3-§. Бир реттен өткерилетуғын өлшеўлерде жиберилетуғын қәтелер

Егер өлшеўлерде тосаттан кететуғын қәтелердиң шамасы системалық қәтелердиң шамаларынан бир неше есе киши болса көп рет өткерилген өлшеўлердиң нәтийжелери бирдей болады ҳәм толық қәте әсбаплық қәтениң шамасына тең болады. Бундай жағдайда өлшеў тек бир рет орынланады ҳәм қәте сыпатында әсбаптың шкаласындағы ең киши бөлиминиң шамасына тең әсбаптың қәтелиги қабыл етиледи. Бир реттен өткерилетуғын өлшеўлер саны өлшенетуғын шамалардың санына тең болады. Өлшеўлердиң бундай түрин әмелде қолланыў үлкен қәтелердиң пайда болыўына алып келиўи мүмкин. Сонлықтан бир реттен өлшеўлерди еминде үш рет қайталап, алынған нәтийжелердиң орташа мәнисин есаплаў усынылады.

Бир реттен өткерилген өлшеўлердиң нәтийжелерин мысал ретинде кесте түринде былайынша көрсетиў мүмкин:

Шаманың белгилениўи	l, мм	m, г	t, с	π
Өлшеў нәтийжеси	1,32	146,5	36,15	3,142
Қәте	0,01	0,2	0,01	0,0005

Тек бир рет өткерилетуғын өлшеўлерде дәл емес нәтийже алыныўдың белгили бир итималлығы бар болады. Бул итималлық өлшеўши әсбаплардың өлшеў дәллиги менен байланыслы болып, усы өлшеўши әсбап пенен өлшеўлердиң барлығында да бирдей нәтийже береди. Демек бир рет өлшеўлерде тосаттан алынатуғын шама тең өлшеўли бөлистилирилиўге бағынады екен.

Биз тең өлшеўли бөлистириўдиң дискрет тең өлшеўли бөлистириў (discrete uniform distribution) ҳәм үзликсиз тең өлшеўли бөлистириў болып екиге бөлинетуғынлығын ҳәм биз қарап атырған жағдайдың дискрет тең өлшеўли бөлистириўге тийисли екенлигин билемиз (http://en.wikipedia.org/wiki/Uniform_distribution_(discrete)).

Тосаттан алынатуғын шамалардың тең өлшеўли бөлистириўи. Тең өлшеўли бөлистириўде тосыннан алынатуғын шамалардың ҳәр қыйлы мәнислери бирдей итималлық пенен ушырасады. Бундай жағдайда тосаттан алынатуғын шаманың итималлығының тығызлығы $f(x)$ базы бир (a,b) интервалында турақлы мәниске, ал бул интервалдан тыста нолге тең болады (10-сүўрет).

$$F(x) = \begin{cases} x < a \text{ болғанда } 0, \\ a < x < b \text{ болғанда } \dfrac{1}{b-a}, \\ x > a \text{ болғанда } 0. \end{cases}$$

бундай нызам ушын математикалық күтилиў (орташа мәнис) мынаған тең:

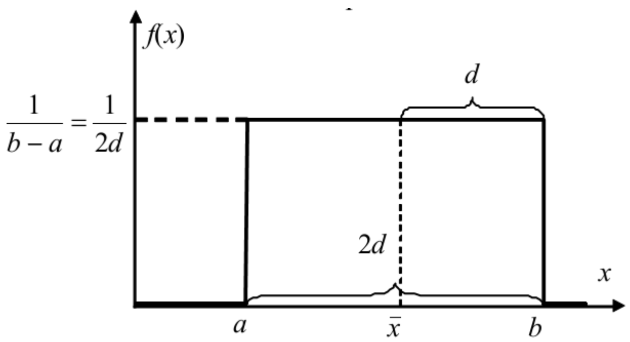
$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{a+b}{2}.$$

тең өлшеўли бөлистириў ушын нормировка шәрти былайынша жазылады:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b dx = 1.$$

(a, b) интервалының узынлығын $2d$ арқалы белгилейик. Бундай жағдайда d шамасын тең өлшеўли бөлистириў параметри деп атайды.

Итималлық тығызлығы $f(x)$ нолге тең болмайтуғын интервалдың шегарасын енди бөлистириў параметри арқалы аңғартамыз: $a=\bar{x}-d$, $b=\bar{x}+d$. Ал (a,b) интервалында итималлық тығызлығы $f(x)=\dfrac{1}{b-a}=\dfrac{1}{2d}$.



10-сүўрет.
Тосаттан алынатуғын шаманың итималлығының тығызлығы $f(x)$ функциясының графиги.

Тең өлшеўли бөлистириў ушын дисперсия мынаған тең:

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(\bar{x}-x)^2 f(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_{-\infty}^{+\infty}(\bar{x}-x)^2dx=\frac{1}{2d}\int_{\bar{x}-d}^{\bar{x}+d}(\bar{x}-x)^2dx=\frac{d^2}{3}. \quad (3.1)$$

Орташа квадратлық аўысыў

$$\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\frac{d}{\sqrt{3}}=0{,}577\cdot d \quad (3.2)$$

формуласының жәрдеминде есапланады.

Енди өлшенетуғын x физикалық шамасының $(\bar{x}-\sigma,\bar{x}+\sigma)$ интервалы ишинде жайласыўының итималлығы α ны есаплаймыз:

$$\alpha=\int_{\bar{x}-d}^{\bar{x}+d}f(x)dx=\frac{1}{2d}\int_{\bar{x}-d}^{\bar{x}+d}dx=\frac{\sigma}{d}=\frac{1}{\sqrt{3}}=0{,}577 \text{ ямаса } 57{,}7\ \%. \quad (3.3)$$

Солай етип узынлығы ±σ = 0,577d болған интервал ушын α = 57,7 % итималлығын алдық.

Биз мына әҳмийетли жағдайға итибар беремиз: нормал бөлистириў орын алған жағдайда шаманың $(\bar{x}-\sigma,\bar{x}+\sigma)$ интервалы ишинде жайласыўының итималлығы 68,3 % ке тең еди, ал тең өлшеўли бөлистириў ушын итималлық 57,7 % ке тең болып шықты.

Енди өлшенип атырған шаманың итималлығы 95 % ке тең болған исенимли интервалды табамыз. $(\bar{x}-0,95d, \bar{x}+0,95d)$ интервалында өлшенетуғын шаманың 95 % лик итималлық пенен табылатуғынлығын анықлаў қыйын емес.

Демек тең өлшеўли бөлистириўге бағынатуғын тосаттан алынатуғын шаманың исенимли интервалын табыў ушын исенимли итималлық α ны тең өлшеўли тарқалыў параметри d ға көбейтиў жеткиликли екен. Бундай шаманың исенимли интервалын $\Delta\tilde{x}_{to}$ арқалы белгилейди ҳәм бир қайтара өлшеўлердиң қәтелиги деп атайды. Бундай жағдайда $\Delta\tilde{x}_{to} = 0,95d$. Бул аңлатпада d арқалы тең өлшеўли бөлистириў параметри белгиленген.

Бир рет өткерилетуғын өлшеўлердиң қәтелиги пайдаланылатуғын өлшеў әсбапларының дәллиги менен байланыслы. Сонлықтан тең өлшеўли бөлистириў параметрин әсбаплық қәте деп те атайды.

Әсбаплық қәтелерди анықлаў усыллары. Бир рет өткерилетуғын өлшеўлердеги қәтелер экспериментте пайдаланылатуғын әсбаплардың характеристикалары бойынша анықланады. Өлшеўши әсбап пенен өлшеўлер жүргизгенде оның жиберилетуғын қәтелерге тәсир ететуғын характеристикалары өлшеў шеги менен бөлеклердиң баҳасы (цена деления) болып табылады. Электр өлшеўши әсбаплар ушын әсбаптың дәллигиниң классы да әҳмийетли шама болып табылады.

Өлшеў шеги Sh деп әсбап пенен (усы әсбаптың берилген шкаласы менен) өлшеў мүмкин болған шаманың максималлық мәнисине айтады. Егер өлшеў шеги әсбапта көрсетилмеген болса, онда бул характеристиканы әсбаптың шкаласына қарап анықлайды.

Бөлимлер баҳасы $\boldsymbol{Bb}$ (цена деления) шкаланың ең киши бөлимине тийисли болған өлшенетуғын шаманың мәниси болып табылады. Егер шкала нолден басланатуғын болса, онда $\boldsymbol{Bb} = \dfrac{\boldsymbol{Sh}}{\boldsymbol{N}}$. Бул аңлатпада N арқалы шкаладағы бөлимлердиң саны белгиленген. Мысалы өлшеў шеги 1 А тоқ күшин өлшейтуғын амперметр берилген болсын ҳәм оның шкаласындағы бөлимлер саны N = 20 болсын. Бундай жағдайда $Bb = \frac{Sh}{N} = \frac{1}{20} = 0{,}05$ амперге тең болады. Көп санлы электр өлшеўши әсбаплар өлшеўлердиң бир неше шеклерине ийе болады. Бир шектен екинши шекке өткенде бөлимлер баҳасы да өзгереди.

Әсбаптың дәллик классы (оны K арқалы белгилеймиз) процентлерде аңлатылған абсолют әсбаплық қәтелик δx тың шкаланың өлшеў шегине қатнасына тең:

$$K = \frac{\sigma x}{Sh} \cdot 100\ \%.$$

Дәллик классының мәниси % әдетте электр өлшеўши әсбапларда жазылған болады. Лабораториялық жумысларды орынлағанда пайдаланылатуғын электр өлшеўши әсбаплар 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 4,0 дәллик классына ийе болыўы мүмкин. Дәллиги төмен (турпайы) әсбаплар дәллик классына ийе болмайды.

Биз жоқарыда бир рет өлшеўлердиң қәтелериниң тосыннан алынатуғын шамалардың тең өлшеўли бөлистириўине бағынатуғынлығын ҳәм тең өлшеўли бөлистириў параметри d ның жәрдеминде анықланатуғынлығын айтып өтип едик. Өлшеўши әсбаптың түрине байланыслы d параметри төмендеги усыллардың бириниң жәрдеминде анықланады:

1. Өлшеў дәллиги (бөлимлердиң баҳасы) әсбаптың өзинде тиккелей көрсетилген. Тең өлшеўли бөлистириў параметри d әсбаптың дәллиги Bb шамасына тең: $d = Bb$.

2. Әсбапта дәллик классы көрсетилген. Дәллик классының анықламасы бойынша биз әсбаплық қәтеге ийе боламыз: $\delta x = \frac{K \cdot Sh}{100}$. Тең өлшеўли бөлистириў параметри әсбаптың қәтесине тең, яғный $d = \delta x$.

Мысалы дәллик классы 2,5 ке тең ҳәм өлшеў шеги 600 в болған вольтметр ушын тең өлшеўли бөлистириў параметри $d = \delta x = \frac{2{,}5 \cdot 600}{100} = 15$ вольт шамасына тең.

3. Егер әсбапта өлшеўдиң дәллиги де, дәллик классы да көрсетилмеген болса, онда жумыстың характери бойынша тең өлшеўли бөлистириў параметрин анықлаўдың бир неше усылы бар. Биз бул усыллар хаққында бул қолланбада келтирилген көп санлы әдебиятлардан оқыўды усынамыз.

4. Егер қандай да бир шама бул тәжирийбеде өлшенбейтуғын болса ҳәм тек оның мәниси белгили болса, онда бундай физикалық шама тек берилген параметр болып табылады. Бул берилген параметрдиң қәтелиги параметрдиң шамасының ең кейинги разряды бирлигиниң ярымына тең етип алынады. Мысалы сымның радиусы миллиметрдиң жүзден бир үлесиндей дәлликте берилген. Бундай жағдайда бул шаманың тең өлшеўли бөлистириўиниң параметри d = 0,005 мм шамасына тең етип алынады.

5. Айырым тәжирийбелерде тең өлшеўли бөлистириў параметрин тәжирийбеде анықлаўға туўры келеди. Бундай жағдайда оның мәниси пайдаланылып атырған әсбаптың шкаласының бөлимлериниң баҳасынан бир неше есе үлкен бола алады. Мысалы келте сызғыштың жәрдеминде үлкен қашықлықларды өлшегенде бир шаманың мәнисин алыў ушын сызғышты бир неше рет салып көриў керек болады. Әсбапты ҳәр бир пайдаланғанда оның бөлиминиң баҳасына тең қәте қатнасады. Бундай жағдайда тең өлшеўли бөлистириў параметри d ның шамасы әсбапты өлшеў ушын неше рет қойып шықса (оны k арқалы белгилеймиз), оның шкаласының бөлиминиң баҳасы Bb дан сонша есе үлкен болады: $d = kBb$.

4-§. Көп рет өткерилген ҳәм бир рет өткерилген өлшеўлердеги тосыннан кететуғын қәтелерди биргеликте есапқа алыў

Қандай да бир x физикалық шамасын көп қайтара өлшегенде ҳәр бир өлшеўди бир қайтара өлшеў сыпатында қабыл етиў мүмкин. Сонлықтан қәteликти есапқа алғанда көп қайтара өткерилген өлшеўлердеги Гаусс бөлистириўине бағынатуғын тосаттан жиберилетуғын қәтелерди ҳәм тең өлшеўли бөлистириўге бағынатуғын бир рет өлшеўлердеги жиберилетуғын қәтелерди есапқа алыў керек болады. Сол еки типтеги қәтелердиң кетиўине алып келетуғын факторлар бир биринен ғәрезли емес. Сонлықтан қосынды қәтени анықлаў ушын итималлықлар теориясындағы бир биринен ғәрезсиз шамалардың қосылыўы нызамынан пайдаланады.

Бул нызам исенимли интерваллар ушын да дурыс нәтийже береди. Сонлықтан тәжирийбелер сериясында өлшенетуғын исенимли интервал $\Delta\tilde{x}$ былайынша жазылады

$$\Delta\tilde{x} = \sqrt{\Delta\tilde{x}_{tos}^2 + \Delta\tilde{x}_{to}^2}.$$

Бул аңлатпада $\Delta\tilde{x}_{tos}$ арқалы көп қайтара өлшеўлердеги тосаттан кететуғын қәтеге сәйкес келиўши исенимли интервал, ал $\Delta\tilde{x}_{to}$ арқалы бир рет өткерилетуғын өлшеўлерге сәйкес келиўши исенимли интервал белгиленген.

Туўрыдан-туўры өткерилетуғын бирдей дәлликке ийе өлшеўлердиң қәтелери бойынша базы бир жуўмақлар. Егер тиккелей (яғный туўрыдан-туўры) өлшеўлердиң нәтийжесинде базы бир x физикалық шамасы ушын x_1, x_2, x_3, ..., x_n шамалары алынатуғын болса, онда жоқарыда келтирилген мағлыўматлар тийкарында қәтелерди баҳалаўды төмендегидей избе-изликте өткериўди усынамыз:

1. x шамасын өлшеўлердиң нәтийжелери бойынша n дана өлшеў ушын орташа арифметикалық мәнис есапланады:

$$\tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

2. Нәтийжелердиң орташа арифметикалық мәнистен орташа квадратлық аўысыўы есапланады:

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x} - x_i)}{n(n-1)}} .$$

3. Исенимли итималлық α = 0,95 ҳәм өлшеўлер саны n болған жағдай ушын Стьюдент коэффициенти $t_{\alpha n}$ шамасының мәниси компьютердиң жәрдеминде есапланады ямаса кестелерден алынады.

Көп қайтара өлшеўлер ушын исенимли интервалдың шегаралары есапланады (тосаттан кететуғын қәтелик):

$$\Delta\tilde{x}_{tos} = t_{\alpha n}\sigma .$$

5. Бир реттен өткерилетуғын өлшеўлердиң исенимли интервалы (қәтелиги) анықланады:

$$\Delta\tilde{x}_{to} = \alpha \cdot d .$$

Бул аңлатпада d арқалы өлшеўши әсбаптың шкаласының бөлимлериниң баҳасы ҳәм дәллик классы менен байланыслы болған тең өлшеўли бөлистириў параметри белгиленген.

6. Өлшеўлер сериясының улыўмалық қәтелиги анықланады (исенимли интервал анықланады):

$$\Delta\tilde{x} = \sqrt{\Delta\tilde{x}_{tos}^2 + \Delta\tilde{x}_{to}^2} .$$

7. Ең ақырғы нәтийже

α исенимли итималлық пенен $x = \tilde{x} \pm \Delta\tilde{x}$.

Өлшеўлер нәтийжесиниң салыстырмалы қәтеси баҳаланады:

$$\delta = \frac{\Delta\tilde{x}}{\tilde{x}} 100\%.$$

Салыстырмалы қәтелик ҳәр қыйлы өлшем бирликлерине ийе шамаларды өлшеўлердеги қәтелерди салыстырыўға мүмкиншилик береди.

5-§. Жанапай өлшеўлердиң қәтелери

Көпшилик физикалық экспериментлерде қандай да бир әсбаптың жәрдеминде туўрыдан-туўры өлшенбейтуғын, ал басқа өлшеўлер тийкарында есапланатуғын шамалар қызығыў пайда етеди. Изленип атырған физикалық шама өлшенетуғын шамалар менен функционаллық байланыста турады. Бундай жағдайда физикалық шаманы жанапай жоллар менен өлшенген ямаса жанапай өлшеўлер ҳаққында гәп етеди.

Бул жағдайда туўрыдан-туўры өткерилген өлшеўлердиң қәтелери (исенимли интерваллардың шегаралары) белгили деп есапланады ҳәм жанапай өлшеўлердеги қәтелерди есаплаў мәселеси туўылады.

Мейли жанапай өлшеўлерде базы бир физикалық шаманың мәнисин $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясының (формуласының) жәрдеминде анықланатуғын болсын. Бул аңлатпада $x_1, x_2, ..., x_n$ шамалары арқалы бир биринен ғәрезсиз шамалар белгиленген. Ал $x_1, x_2, ..., x_n$ шамаларының ҳәр бирин анықлағанда олардың ҳәр бирин өлшеў ушын n дана бир бири менен байланыссыз өлшеўлер сериясы өткерилген.

Изленип атырған шаманың орташа мәнисин

$$\tilde{y} = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n)$$

формуласының жәрдеминде есаплайды. Енди бул шаманың абсолют қәтелиги болған $\Delta\tilde{y}$ шамасын өлшенген шамалардың абсолют қәтелери $\Delta\tilde{x}_1, \Delta\tilde{x}_2, ..., \Delta\tilde{x}_n$ бойынша анықлаймыз. Биз $x_1 = \tilde{x}_1 \pm \Delta x_1$, $x_2 = \tilde{x}_2 \pm \Delta x_2$, ...,

$x_n = \tilde{x}_n \pm \Delta x_n$ теңликлериниң орынланатуғынлығын жоқарыда көрген едик. Сонлықтан

$$\tilde{y} \pm \Delta y = f\left(x_1 \pm \Delta\tilde{x}_1, x_2 \pm \Delta\tilde{x}_2, ..., x_n \pm \Delta\tilde{x}_n\right)$$

аңлатпасын жаза аламыз. Оң тәрептеги функцияны оның биринши тәртипли туўындылары менен шекленип Тейлор қатары түринде көрсетемиз ($\Delta\tilde{x}_i << \tilde{x}_i$ теңсизлиги орынланғанда биринши тәртипли туўындылар менен шеклениў мүмкин):

$$\tilde{y} \pm \Delta y = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n) \pm \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 \pm \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 \pm ... \pm \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n.$$

Бул аңлатпада $\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_i}$ арқалы $f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n)$ функциясының $\tilde{x}_i$ бойынша алынған туўындысы белгиленген.

$\tilde{y} = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n)$ екенлигин итибарға алып

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_2}\Delta x_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_n}\Delta x_n$$

аңлатпасына ийе боламыз.

Өлшеўлер саны жүдә үлкен болғанда (яғный $n \to \infty$ болған жағдайда) қәлеген нормал бөлистирилген тосыннан алынатуғын шама ушын ҳақыйқат мәнистен орташа аўысыўдың нолге тең екенлигин еске алып аўысыўдың орташа квадраты болған $\Delta\tilde{y}^2$ шамасын анықлаймыз. Буның ушын теңлемениң оң ҳәм шеп тәреплерин квадратқа көтеремиз ҳәм өлшеўлер саны бойынша орташалаймыз. Өлшеўлердиң саны бойынша $\tilde{x}$ орташа мәнистен аўысыўлардың орташа мәниси Δx_i екенлигин есапқа алып

$$\Delta\tilde{x}_i = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum \Delta x_i\right) = 0$$

аңлатпасына ийе боламыз ҳәм оң тәрепте Δx_i шамасына қарата тек

$$\Delta\tilde{y}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_1}\right)^2 \Delta\tilde{x}_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_2}\right)^2 \Delta\tilde{x}_2^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_n}\right)^2 \Delta\tilde{x}_n^2$$

қосындысына ийе боламыз. Бундай жағдайда y шамасын жанапай өлшеўлер сериясындағы тосаттан жиберилетуғын қәте (исенимли интервал)

$$\Delta\tilde{y} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_1}\right)^2 \Delta\tilde{x}_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_2}\right)^2 \Delta\tilde{x}_2^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_n}\right)^2 \Delta\tilde{x}_n^2}$$

түринде жазылады. Бул аңлатпаны қысқаша түрде былайынша жазады:

$$\Delta\tilde{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_i}\right)^2 \Delta\tilde{x}_i^2}.$$

Егер $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциясы дифференциаллаў ушын "қолайсыз" болса $\Delta\tilde{y}$ ушын алынған аңлатпаны логарифмди дифференциаллаўдың қәсийетлеринен пайдаланып басқаша жазыўға болады. $f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ функционаллық байланыс ушын логарифмди қараймыз:

$$Lnf(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n).$$

Логарифмниң туўындысын есаплаў қағыйдасын пайдаланып

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}\left(\ln f\right) = \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_i}$$

теңлигиниң орынлы екенлигин еске түсиремиз.

$\tilde{y} = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ екенлигин есапқа алып

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}\left(\ln f\right) = \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_i} = \frac{1}{\tilde{y}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_i}$$

аңлатпаларына ийе боламыз. Демек

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_i} = \tilde{y}\,\frac{\partial Lnf}{\partial \tilde{x}_i}$$

Функциядан алынған туўынды менен оның логарифминен алынған туўынды арасындағы бул өз-ара байланысты пайдаланып бурынырақ алынған $\Delta\tilde{y}$ қәтесин былайынша жазамыз:

$$\Delta\tilde{y} = \tilde{y}\sqrt{\left(\frac{\partial Lnf}{\partial\tilde{x}_1}\right)^2 \Delta\tilde{x}_1^2 + \left(\frac{\partial Lnf}{\partial\tilde{x}_2}\right)^2 \Delta\tilde{x}_2^2 + ... + \left(\frac{\partial Lnf}{\partial\tilde{x}_n}\right)^2 \Delta\tilde{x}_n^2}$$

ямаса қысқаша түрде жазылған

$$\Delta\tilde{y} = \tilde{y}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial Lnf}{\partial\tilde{x}_i}\right)^2 \Delta\tilde{x}_i^2}$$

аңлатпасына ийе боламыз.

Еки формула да $x_1, x_2, ..., x_n$ шамаларының қәлеген бөлистириўи ушын дурыс. Тек ғана бул шамалардың бир биринен ғәрезсиз болыўы зәрүрли.

Жанапай өлшеўлердеги қәтелерди есаплаў ушын формулаларды алыўға арналған еки мысал. Бизди қызықтыратуғын y шамасы тәжирийбелерде өлшенетуғын x,u,z шамалары менен $y = f(x,u,z)$ түриндеги функционаллық байланысқа ийе болсын ҳәм бул байланыс

$$y = \frac{x^2}{2u}z$$

түрине ийе болсын. Бул аңлатпада $f(x,u,z) = \frac{x^2}{2u}z$. $\tilde{x},\tilde{u},\tilde{z}$ шамалары тиккелей өлшенетуғын шамалардың орташа мәниси белгиленген ҳәм исенимли интерваллар $\Delta\tilde{x}$, $\Delta\tilde{u}$ ҳәм $\Delta\tilde{z}$ белгили болсын.

Биз излеп атырған шаманың орташа мәниси $\tilde{y} = \frac{\tilde{x}^2}{2\tilde{u}}\tilde{z}$ шамасына тең болады.

1-мысал. $\Delta\tilde{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial\tilde{x}_i}\right)^2 \Delta\tilde{x}_i^2}$ формуласына сәйкес $\Delta\tilde{y}$ қәтесин былайынша табамыз:

$$\Delta\tilde{y}=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial\tilde{x}_1}\right)^2\Delta\tilde{x}_1^2+\left(\frac{\partial f}{\partial\tilde{x}_2}\right)^2\Delta\tilde{u}_2^2+\ldots+\left(\frac{\partial f}{\partial\tilde{x}_n}\right)^2\Delta\tilde{z}_n^2}.$$

$f(\tilde{x},\tilde{u},\tilde{z})=\dfrac{\tilde{x}^2}{2\tilde{u}}\tilde{z}$ функциясын $\tilde{x},\tilde{u},\tilde{z}$ өзгериўшилери бойынша дифференциаллаймыз:

$$\frac{\partial f}{\partial\tilde{x}}=\frac{\tilde{x}}{\tilde{u}}\tilde{z},\ \frac{\partial f}{\partial\tilde{u}}=-\frac{\tilde{x}^2}{2\tilde{u}^2}\tilde{z},\ \frac{\partial f}{\partial\tilde{z}}=\frac{\tilde{x}^2}{2\tilde{u}}.$$

Бундай жағдайда қәтени есаплаў формуласы мына түрге ийе болады:

$$\Delta\tilde{y}=\sqrt{\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{u}}\tilde{z}\right)^2\Delta\tilde{x}_1^2+\left(-\frac{\tilde{x}^2}{2\tilde{u}^2}\tilde{z}\right)^2\Delta\tilde{u}_2^2+\left(\frac{\tilde{x}^2}{2\tilde{u}}\right)^2\Delta\tilde{z}_n^2}.$$

Квадрат түбирдиң астынан улыўмалық көбейтиўшилерди шығарамыз ҳәм төмендегилерге ийе боламыз:

$$\Delta\tilde{y}=\frac{\tilde{x}^2}{2\tilde{u}^2}\tilde{z}\sqrt{\left(\frac{2}{\tilde{x}}\right)^2\Delta\tilde{x}_1^2+\left(-\frac{1}{\tilde{u}}\right)^2\Delta\tilde{u}_2^2+\left(\frac{1}{\tilde{z}}\right)^2\Delta\tilde{z}_n^2}$$

ямаса

$$\Delta\tilde{y}=\tilde{y}\sqrt{\left(\frac{2}{\tilde{x}}\right)^2\Delta\tilde{x}_1^2+\left(-\frac{1}{\tilde{u}}\right)^2\Delta\tilde{u}_2^2+\left(\frac{1}{\tilde{z}}\right)^2\Delta\tilde{z}_n^2}.$$

2-мысал. Бизиң қолымызда бар $f(\tilde{x},\tilde{u},\tilde{z})=\dfrac{\tilde{x}^2}{2\tilde{u}}\tilde{z}$ функционаллық байланыстың логарифми бойынша қәте $\Delta\tilde{y}$ шамасын табамыз. Функцияны логарифмлеймиз:

$$Lnf=2Ln\tilde{x}-Ln2-Ln\tilde{u}+Ln\tilde{z}.$$

Бул аңлатпаны $\tilde{x},\tilde{u},\tilde{z}$ бойынша дифференциаллаймыз:

$$\frac{\partial Lnf}{\partial\tilde{x}}=\frac{2}{\tilde{x}},\quad \frac{\partial Lnf}{\partial\tilde{u}}=-\frac{1}{\tilde{u}}\ \text{ ҳәм }\ \frac{\partial Lnf}{\partial\tilde{z}}=\frac{1}{\tilde{z}}.$$

$\Delta\tilde{y}=\tilde{y}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial f}{\partial\tilde{x}_i}\right)^2\Delta\tilde{x}_i^2}$ формуласына сәйкес

$$\Delta\tilde{y}=\tilde{y}\sqrt{\left(\frac{\partial Lnf}{\partial\tilde{x}}\right)^2\Delta\tilde{x}^2+\left(\frac{\partial Lnf}{\partial\tilde{u}}\right)^2\Delta\tilde{u}^2+\left(\frac{\partial Lnf}{\partial\tilde{z}}\right)^2\Delta\tilde{z}^2} \quad (7)$$

ямаса

$$\Delta\tilde{y}=\tilde{y}\sqrt{\left(\frac{2}{\tilde{x}}\right)^2\Delta\tilde{x}_1^2+\left(-\frac{1}{\tilde{u}}\right)^2\Delta\tilde{u}_2^2+\left(\frac{1}{\tilde{z}}\right)^2\Delta\tilde{z}_n^2} \quad (8)$$

формулаларына ийе боламыз.

Солай етип еки формула бойынша өткерилген есаплаўлар бирдей нәтийжелерди береди.

Жанапай өлшеўлердиң қәтелери бойынша базы бир жуўмақлар. Жанапай өлшеўлердиң нәтийжелерин қайта ислегенде төмендегидей тәртипте ҳәрекет етиўди усынамыз:

1. Егер зәрүрлик болса өлшенетуғын шамаларды байланыстыратуғын формуланы аралықлық формулаларсыз барлық өлшенетуғын шамаларды тиккелей байланыстыратуғын функционаллық байланысқа ийе формулаға түрлендириў керек.

2. Көп қайтара ҳәм бир рет өткерилетуғын өлшеўлердиң қәтелерин есапқа алыў менен изленип атырған шаманың формуласына кириўши барлық тиккелей туўрыдан-туўры өлшенетуғын шамалардың қателерин баҳалаңыз. Бундай жағдайда барлық өлшенетуғын шамалар ушын исенимли итималлықтың α = 0,95 шамасындағы мәниси қабыл етиледи.

3. Өлшенетуғын шамалардың орташа $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n$ мәнислери бойынша изленип атырған шаманың орташа мәниси болған

$$\tilde{y}=f(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n)$$

шамасын табыңыз.

4. Жанапай өлшеўлердиң қәтеси ушын $\Delta\tilde{y}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial\tilde{x}_i}\right)^2\Delta\tilde{x}_i^2}$ ямаса

$\Delta\tilde{y} = \tilde{y}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial Lnf}{\partial \tilde{x}_i}\right)^2 \Delta\tilde{x}_i^2}$ формуласының жәрдеминде аңлатпа алыңыз.

Ең ақырғы нәтийжени

α исенимли итималлықта $y = \tilde{y} \pm \Delta\tilde{y}$

деп жазыў керек.

Тәжирийбелер нәтийжелерин қәтени есапқа алған ҳалда көрсетиў. Экспериментallлық изертлеўлерде алынған сан шамалар өлшеўлердеги қәтелерге байланыслы санлардағы цифраларды дурыс цифралар (исенимге миясар цифралар) ҳәм дурыс емес цифралар деп екиге бөледи. Егер усы цифра жайласқан разряд ушын қәте усы разрядтың ярымынан үлкен болмаса, онда цифраны дурыс цифра деп есаплаймыз. Мысалы қәтелиги 0,6 ға тең тәжирийбеде 12,786 шамасы алынған болса, онда шаманың пүтин бөлиминиң барлығы да дурыс, ал үтирден кейинги тек бир сан дурыс дегенди аңлатады. Ал қалған 8 ҳәм 6 санлары дурыс емес (яғный исенимге миясар емес) цифралар болып табылады.

Алынған нәтийжелердиң оннан бир үлесинен кейинги цифраларды жазыўдың еки усылы бар (мысалы 0,00063 ҳәм $6{,}3\cdot10^{-4}$). Ҳәр қыйлы болған эксперименталлық нәтийжелерди дурыс салыстырыў ушын нәтийженің жазыўындағы әҳмийетли цифра (значащая цифра) түсиниги киргизиледи.

Онлық позициялық есаплаў системасында 1 ден 9 ға шекемги санлар ҳәм нол бар. Егер цифра санның ортасында ямаса ақырында турса, онда оны әҳмийетли цифра деп атаймыз. 12300 санында 5 әҳмийетли цифра бар, ал $1{,}2\cdot10^{4}$ санында болса тек еки әҳмийетли санға ийе боламыз. 0,00045 санында еки әҳмийетли сан тур, себеби 4 тиң шеп тәрепиндеги ноллердиң барлығы да әҳмийетли емес. 15,897 санында әҳмийетли цифралардың саны беске тең.

Эксперименталлық нәтийжелердиң қәтеси ҳаққында мағлыўматлар болмаған жағдайда әҳмийетли цифралардың саны бойынша есаплаўдың ямаса өлшеўдиң дәллигин анықлайды. Мысалы 1,23 санында үш әҳмийетли цифра бар, демек өлшеўде жүзден бир үлес те есапқа алынған деген сөз. Ал 1,2 санында тек еки әҳмийетли цифра бар. Бул жерде пүтин ҳәм оннан бир үлес есапқа алынған. Демек екинши жағдайдағы санның дәллиги биринши жағдайдағы санның дәллигинен он есе киши деген сөз.

Қәтелер есапқа алынбаған жағдайда өлшеўлердиң нәтийжелерин жуўық түрде есаплаў. Нәтийжелердеги қәте тек өлшеўлердиң дәллигиниң төменлиги менен байланыслы болып қалмай, есаплаўлардың дәллигиниң төмен болғанлығы менен де байланыслы. Нәтийжени қәлеген түрдеги дөңгелеклеў системалық қәтелик болып табылады. Сонлықтан есаплаўлар нәтийжелериндеги дөңгелеклеў өлшеўлердиң нәтийжелериндеги тосыннан кететуғын қәтеден киши болыўы керек. Бирақ есаплаўлар қәтени баҳалаўдан бурын жүргизиледи. Сонлықтан усы шәртти орынлаў ушын эксперименталлық изертлеўлердеги барлық есаплаўларда әҳмийетли цифралардың саны өлшеўлерде алынған санлардағы цифралардан 1 ге артық болыўы керек. Бул иләж қәтени есапқа алған ҳалда нәтийжени дурыс дөңгелеклеўге мүмкиншилик береди.

Өлшеўлердиң нәтийжелерин жазғанда қолланылатуғын дөңгелеклеў қағыйдалары. Туўрыдан-туўры ҳәм жанапай өлшеўлердиң нәтийжелерин дөңгелеклегенде өлшенетуғын шаманың жуўық мәниси алынады. Мәнисти жазыў ушын тек әҳмийетли (дурыс) цифраларды жазады. Дөңгелеклеўдиң төмендегидей қағыйдаларын пайдаланып дурыс емес цифраларды төмендегидей қағыйдалардан пайдаланып алып таслайды:

1. Егер алып тасланатуғын цифра 5 тен киши болса соңғы сақланатуғын цифра өзгериссиз қалады.

2. Егер алып тасланатуғын санлардың биринчиси 5 тен үлкен болса,

онда сақланылып қалынатуғын ең соңғы цифра 1 ге үлкейтиледи. Егер алып тасланатуғын цифралардың биринשиси 5 ке тең, ал оннан кейинги бир ямаса бир неше цифралар нолге тең болмаса да соңғы цифра 1 ге үлкейтиледи. Мысалы 19,856 санын дөңгелеткенде 19; 19,9; 19,86 санларын алыў мүмкин.

3. Егер алып тасланатуғын цифра 5 болса, ал оннан кейин әҳмийетли цифра болмаса, онда дөңгелеклеўде ең жақын жуп сан итибарға алынады. Мысалы 0,435 санын 0,44 ке дөңгелеклеймиз, ал 0,465 санын 0,46 ға дөңгелеклеймиз.

Мысаллар келтиремиз:

8.27 ≈ 9	0.237 ≈ 0.3
0.0862 ≈ 0.09	0.00035 ≈ 0.0004
857.3 ≈ 900	43.5 ≈ 50

4. Өлшеўлердиң нәтийжелерин "қәтеге шекемги" дәлликте жуўықлайды, яғный ең соңғы әҳмийетли цифра қәтениң разрядындай болыўы керек.

Мысаллар:

243.871 ± 0.026 ≈ 243.87 ± 0.03;

243.871 ± 2.6 ≈ 244 ± 3;

1053 ± 47 ≈ 1050 ± 50.

Математикалық есаплаўлардағы дөңгелеклеў қағыйдалары.

1. Қосыў менен алыўда онлық бөлшекке сәйкес келетуғын үтирден кейин ҳәр қыйлы сандағы цифралар қатнасатуғын болсын. Мысалы 23,2 + 0,44 +7,247 ≈ 23,2 + 0,44 + 7,25 ≈ 30,89 ≈ 30,9. Демек нәтийжедеги үтирден кейинги цифралардың саны қосылыўшылардың ишиндеги үтирден кейинги ең аз цифраға ийе сандай болады екен. Және бир мысал келтиремиз: 23,52 + 12,66772 = 26,18772 ≈ 26,19.

2. Көбейтиўде де, бөлиўде де 1-пунктте келтирилген қағыйда басшылыққа алынады. Мысалы: 30,9·1,8364 = 56,74476 ≈ 56,74.

Бул қағыйдалары мысалы 30,9-1,8364 = 56,74476 ≈ 56,74 болған жағдайда орынланбайды. Бул жағдайда көбейтиўшилерди бири 1 ден басланады, ал үтирден кейин киши цифраға ийе шама басқа цифрадан басланады.

3. x^n, $\sqrt[n]{x}$, $ln(x)$ түриндеги функциялардың мәнислерин есаплағанда аргумент x әҳмийетли цифраға ийе болса, нәтийжеде тап сондай әҳмийетли цифраға ийе болады. Мысалы: $(11,38)^2 = 129,5044 \approx 129,5$.

Аралықлық нәтийжелерди есаплағанда 1-3 пунктлерде нәзерде тутылған цифралар санына 1 санға көп цифралардан туратуғын нәтийже пайдаланылады. Ал ең соңғы нәтийжеде бул сан жоқарыда келтирилген қағыйдалар тийкарында алып тасланады.

Өлшеўлер қәтесин есапқа алған ҳалда өлшеўлер нәтийжелерин жазыў тәртиплери. Туўрыдан-туўры өткерилген ҳәм жанапай өлшеўлердиң нәтийжелерин қәтелерди есапқа алған ҳалда жазыў ушын төмендегидей қағыйдаларды басшылыққа алыў керек:

1. Қәтениң шамасын (исенимли интервалды) екинши әҳмийетли санға (шептен оңға қарай, егер олардың биринشиси 1 болса) шекем дөңгелеклеў керек. Ал басқа жағдайлардың барлығында да биринши әҳмийетли цифраға шекем дөңгелекленеди.

2. Өлшеўлер нәтийжесин (туўрыдан-туўры өткерилген ямаса жанапай өлшеўлердеги алынған шамалардың орташа мәниси) де қәтелердеги разрядлар санындай етип дөңгелеклеў керек. Ең ақырғы нәтийжедеги әҳмийетли цифралардың саны абсолют қәтеликтиң (исенимли интервалдың) шамасының тәртиби бойынша анықланады.

Мысалы: өлшеўлердиң нәтийжеси 42,959 шамасына тең. Бул шама 0,045 дәллигинде анықланған. Бундай жағдайда ең ақырғы нәтийжени былайынша жазамыз: 42,96 ±0,04.

Егер есаплаўларда қәтеси көрсетилмеген кестелерден алынатуғын мағлыўматлар пайдаланылатуғын болса, онда әдетте бул шаманың қәтеси соңғы әҳмийетли цифраның разрядының ярымына тең деп есапланады. Бул дөңгелеклеў қәтесиниң тең өлшеўли бөлистириўи ушын d параметри болып табылады.

x шамасын өлшеўдиң нәтийжелерин қайта ислеўди жазыў ушын арналған кесте

№	x_i	$\Delta x_i = x_i - \langle x \rangle$	Δx_i^2	S_n	Δx_{tos}	$\Delta x_{a'sb}$	Δx_{juw}	$\langle x \rangle \pm \Delta x$
1	x_1	Δx_1	Δx_1^2					
2	x_2	Δx_2	Δx_2^2					
…	…	…	…					
i	x_i	Δx_i	Δx_i^2					
…	…	…	…					
n	x_n	Δx_n	Δx_n^2					
$n=$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2 =$	$t_{n,P}$	$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{tos}^2 + \Delta x_{a'sb}^2 + \Delta x_{juw}^2}$			$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \cdot 100\%$

Бул кестеде № арқалы өлшеўлердиң қатар саны, x_i арқалы $i-$санлы өлшеўде алынған x шамасының мәниси, S_n арқалы n рет өлшегенде жиберилетуғын орташа квадратлық қәтелик, Δx_{tos} арқалы тосаттан жиберилетуғын қәте, $\Delta x_{a'sb}$ арқалы әсбаплық қәте, Δx_{juw} арқалы жуўықлағанда жиберилетуғын қәте белгиленген.

Эксперименталлық изертлеўлердиң қәтесин баҳалаўға ҳәм нәтийжелерин жазыўға мысал. Экспериментте дурыс геометриялық формаға ийе (параллелепипед) дененің көлемин анықлаў мақсетинде параллелепипедтиң қабырғаларының узынлықларын өлшеўлер өткерилген болсын. Өлшеўлер нәтийжелери төмендеги 2-кестеде берилген. Барлық өлшеўлер нониусының бөлимлериниң баҳасы 0,1 мм болған штангенциркульдиң жәрдеминде орынланған.

2-кесте.

n	a, mm	b, mm	h, mm
1	12,7	12,7	14,8
2	12,7	12,8	14,9
3	12,7	12,9	14,7
Орташасы	$\tilde{a} = 12{,}7$	$\tilde{b}$=12,8	$\tilde{h} = 14{,}8$

Экспериментте алынған нәтийжелерди қайта ислеў.

b шамасын туўрыдан-туўры өлшеўлердиң қәтесин есаплаймыз.

Орташа арифметикалық мәниси $b = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i = 12{,}80$ мм.

Орташа квадратлық аўысыў

$$\tilde{\sigma}_b = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{b} - b_i)^2} = \sqrt{\frac{0{,}1^2 + 0 + (-0{,}1)^2}{3 \cdot 2}} =$$

$$= \sqrt{33{,}3 \cdot 10^{-4}} = 5{,}77 \cdot 10^{-2} \text{ (мм)}.$$

n = 3 ҳәм α = 0,95 болғанда Стьюдент коэффициенти $t_{\alpha n}$ =4,30, демек көп қайтара өлшеўлердеги тосаттан жиберилетуғын қәтелик:

$$\Delta\tilde{\sigma}_{tos} = t_{\alpha n} \cdot \tilde{\sigma}_b = 4{,}30 \cdot 5{,}77 \cdot 10^{-2} = 0{,}2481 \text{ (мм)}.$$

Өлшеўлер бөлиминиң баҳасы 0,1 мм болған штангенциркульдиң нониусы бойынша жүргизилди. Демек бир рет өлшеўлер ушын тең өлшеўди тарқалыўдың параметри d = 0,1 мм. Бир рет өлшеўлер қәтеси:

$$\Delta\tilde{\sigma}_{bir\_ret} = \alpha \cdot d = 0{,}95 \cdot 0{,}1 = 0{,}095 \text{ (мм)}.$$

b шамасындағы толық қәтелик:

$$\Delta\tilde{b}=\sqrt{\Delta\tilde{\sigma}_{tos}^2+\Delta\tilde{\sigma}_{bir\_ret}^2}=\sqrt{0,2481^2+0,0095^2}=0,2484\ (\text{мм}).$$

Егер бул шамаларды изертлеў жумысларының нәтийжелери көрсетиў ушын зәрүр болса, онда эксперименте алынған b шамасының мәниси қәтени есапқа алған ҳалда былайынша жазамыз:

$$b=\tilde{b}\pm\Delta\tilde{b}=(12,8\pm0,2)\ (\text{мм}).$$

Тап сондай жоллар менен h шамасын туўрыдан-туўры өлшеўлердеги қәтени есаплаймыз.

Орташа арифметикалық $\tilde{h}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h_i=14,80\ (\text{мм}).$

Орташа квадратлық аўысыў $\tilde{\sigma}_h=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{h}-h_i)^2}=5,77\cdot10^{-2}\ (\text{мм}).$

α = 0,95 пенен n = 3 ушын $t_{\alpha n}$ = 4,30 (*a, b, h* шамаларын өлшегендеги тәжирийбелер саны бирдей еди).

Көп қайтара өлшеўлердеги қәте:

$$\Delta\tilde{h}_{tos}=t_{\alpha n}\cdot\tilde{\sigma}_h=4,30\cdot5,77\cdot10^{-2}=0,2481\ \ (\text{мм}).$$

Бир рет өлшеўлердеги қәтелер (бул да *b* шамасындағыдай, себеби өлшеўлер бир әсбаптың жәрдеминде әмелге асырылды):

$$\Delta\tilde{h}_{bir\_ret}=\alpha\cdot d=0,95\cdot0,1=0,095\ (\text{мм}).$$

h шамасындағы толық қәтелик:

$$\Delta\tilde{h}=\sqrt{\Delta\tilde{h}_{tos}^2+\Delta\tilde{h}_{bir\_ret}^2}=\sqrt{0,2481^2+0,0095^2}=0,2484\ (\text{мм}).$$

Егер бул шамаларды изертлеў жумысларының нәтийжелери көрсетиў ушын зәрүр болса, онда экспериментте алынған *h* шамасының мәниси қәтени есапқа алған ҳалда былайынша жазамыз:

$$h=\tilde{h}\pm\Delta\tilde{h}=(14,8\pm0,2)\ (\text{мм}).$$

Енди ***a*** шамасын туўрыдан-туўры өлшегендеги қәтени есаплаймыз.

Үш өлшеўдиң нәтийжесинде бирдей шамалар алынған болғанлықтан орташа квадратлық аўысыў $\tilde{\sigma}_a=0$ ҳәм көп қайтара өлшеўлердеги қәте де

$\Delta\tilde{a}_{tos}=0.$

Бул шамаларды бир реттен өлшегендеги қәте жоқарыда көрип өтилген еки жағдайдағыдай $\Delta\tilde{a}_{bir\_ret}=\alpha\cdot d=0,95\cdot 0,1=0,095$ (мм).

a шамасының толық қәтелиги

$$\Delta\tilde{a}=\sqrt{\Delta\tilde{a}_{tos}^2+\Delta\tilde{a}_{bir\_ret}^2}=\Delta\tilde{a}_{bir\_ret}=0,095 \text{ (мм)}.$$

Егер изертлеўдиң нәтийжелерин көрсетиў зәрүрлиги бар болса, онда a шамасының мәниси қәтени есапқа алып былайынша жазамыз:

$$a=\tilde{a}\pm\Delta\tilde{a}=(12,7\pm 0,1) \text{ (мм)}.$$

4. Енди паралелепипедтиң көлеминиң мәнисин есаплаймыз (жанапай өлшеўлер).

$$\tilde{V}=\tilde{a}\cdot\tilde{b}\cdot\tilde{h}=12,7\cdot 12,8\cdot 14,8=2405,888 \text{ мм}^3.$$

5. Параллелепипедтиң көлеминдеги қәте $\Delta\tilde{V}$ ны есаплаймыз.

Көлемниң өлшениўши шамалар менен байланысы болған $\tilde{V}=\tilde{a}\cdot\tilde{b}\cdot\tilde{h}$ аңлатпасын логарифмлеймиз.

$$Ln\tilde{V}=Ln\tilde{a}+Ln\tilde{b}+Ln\tilde{h}.$$

Дара туўындыларды есаплаймыз:

$$\frac{\partial Ln\tilde{V}}{\partial\tilde{a}}=\frac{1}{\tilde{a}},\quad \frac{\partial Ln\tilde{V}}{\partial\tilde{b}}=\frac{1}{\tilde{b}},\quad \frac{\partial Ln\tilde{V}}{\partial\tilde{h}}=\frac{1}{\tilde{h}}.$$

Биз жоқарыда жанапай өлшеўлер ушын алынған (7)-формулаға сәйкес

$$\Delta\tilde{V}=\tilde{V}\sqrt{\left(\frac{\partial Ln\tilde{V}}{\partial\tilde{a}}\right)^2\Delta\tilde{a}^2+\left(\frac{\partial Ln\tilde{V}}{\partial\tilde{b}}\right)^2\Delta\tilde{b}^2+\left(\frac{\partial Ln\tilde{V}}{\partial\tilde{h}}\right)^2\Delta\tilde{h}^2} \qquad (9)$$

ҳәм

$$\Delta\tilde{V}=\tilde{V}\sqrt{\left(\frac{\Delta\tilde{a}}{\tilde{a}}\right)^2+\left(\frac{\Delta\tilde{b}}{\tilde{b}}\right)^2+\left(\frac{\Delta\tilde{h}}{\tilde{h}}\right)^2} \qquad (10)$$

формулаларын аламыз. $\Delta\tilde{V}$ қәтелигине қатнасы бойынша сызықлы өлшемлерге сәйкес келиўши $\Delta\tilde{a}$, $\Delta\tilde{b}$, $\Delta\tilde{h}$ шамалары аралықлық нәтийжелер болып табылады. Сонлықтан буннан былай орынланатуғын есаплаўларда биринши әҳмийетли цифраға шекемги дөңгелеклетилмеген мәнислери қолланылады.

$$\Delta\tilde{V} = 2405{,}88\sqrt{\left(\frac{0{,}095}{12{,}7}\right)^2 + \left(\frac{0{,}2484}{12{,}80}\right)^2 + \left(\frac{0{,}2484}{14{,}80}\right)^2} = 68{,}5 \text{ мм}^3.$$

Қәтени шеп тәрептен биринши әҳмийетли цифраға шекем дөңгелеклеймиз:

$$\Delta\tilde{V} = 70 \text{ мм}^3.$$

Көлемниң мәнисин де тап сондай разрядқа шекем дөңгелеклеймиз

$$\tilde{V} = 2410 \text{ мм}^3.$$

Ең ақырғы нәтийжени

$$\alpha \text{ исенимли итималлықта } V = \tilde{V} \pm \Delta\tilde{V} = (2410 \pm 70) \text{ мм}^3.$$

түринде жазамыз.

Салыстырмалы қәте былайынша есапланады:

$$\delta = \frac{\Delta\tilde{V}}{\tilde{V}} = \frac{70}{2410} = 0{,}029 \text{ ямаса } 2{,}91\ \%$$

6-§. Физикалық шамалар арасындағы экспериментлерде алынған байланысларды қайта ислеў

Оқыў экспериментлеринде шешилетуғын әдеттеги мәселелердиң бири қубылысты ямаса объектти тәрийиплейтуғын ҳәр қыйлы физикалық шамалар арасындағы функционаллық байланысларды табыў болып табылады. Көпшилик жағдайларда изертленген байланысларды аналитикалық ямаса графиклер түринде көрсетеди.

Экспериментлердиң нәтийжелерин графикалық көрсетиў. Әлбетте нәтийжелерди графикалық жоллар менен көрсетиў өзиниң көргизбелилиги менен ҳәм мағлыўматлардың көплиги менен айрылып турады. Эксперименталлық байланыслардың графиклери байланыстың характерин көз бенен аңсат түрде анықлаўға, эксперименталлық мағлыўматлардың пытыраңқылығының (шашаўлығының) шамасын баҳалаўға мүмкиншилик береди.

Физикалық байланысларды сәўлелендиретуғын графиклердиң өзине тән әҳмийетли өзгешелигиниң бири көшелрлерге түсирилген шамалардың бирликлерге ийе екенлиги болып табылады.

Лабораториялық жумысларды орынлағанда қурылатуғын графиклердиң максимал түрде информациялық болыўы ушын графиклерди қурыўдың төмендегидей белгили бир қағыйдаларын сақлаў керек болады.

1. Усы ўақытларға шекем графиклерди студентлердиң лабораториялық жумысларды орынлаў ушын қойған дәптерде қурыў әмелге асырылып келди. Бирақ компьютерлердиң ҳәм графиклерди қуратуғын компьютерлик программалардың (Мысалы, MS Excel, Origin, Mathematica ҳәм басқалар) кең түрде тарқалыўына байланыслы соңғы ўақытлары графиклерди компьютерлердиң жәрдеминде қурыў практикасы кеңнен тарқалмақта. Қандай жоллар менен графиктиң қурылғанлығынан байланыссыз, таяр болған график лабораториялық жумыстың есабына кириўи керек.

2. Координаталар көшерлеринде қойылған шамалар ҳәм олардың өлшем бирликлериниң көрсетилиўи шәрт.

3. Зәрүр болғанда координаталар басы шамалардың ноллик мәнислерине сәйкес келмеўи мүмкин. Бундай жағдайда қағаздың бети максималлық түрде пайдаланылады.

4. Экспериментте алынған ноқатлар анық ҳәм ири етип дөңгелеклер, атанақлар, ҳәр қыйлы реңдеги ноқатлар ҳәм тағы басқа да түрлерде көрсетилиўи мүмкин.

5. Координата көшерлериндеги масштаблық бөлиўлерди тең өлшеўли түрде орынлаў керек. Көшерлердеги эксперименталлық ноқатлардың

координаталары көрсетилмейди, ал усы координаталарды анықлайтуғын сызықлар жүргизилмейди.

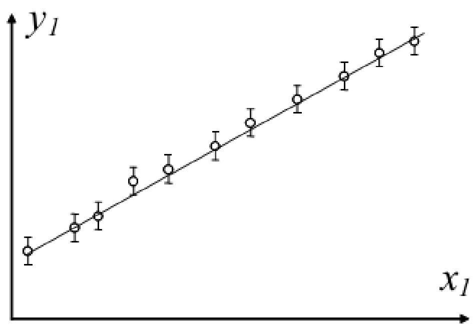
6. Масштаб сайлап алынғанда төмендегидей жағдайларға итибар бериледи:

 Иймеклик еки көшер бағытында да тең өлшеўли жайласқан болыўы керек. Егер график туўры сызықтан туратуғын болса, онда оның көшерлерге қыялық мүйешин 45 градусқа жақын етип алыў усынылады

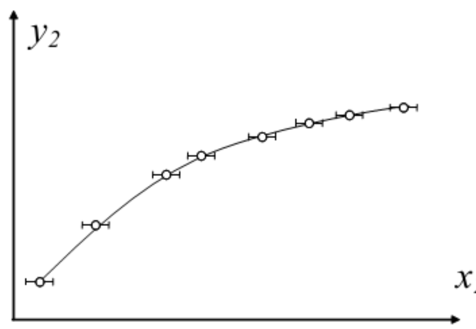
Қәлеген ноқаттың ийелеп турған орнын аңсат ҳәм тез таўып алатуғындай болыўы шәрт. Егер графиктиң көшери бағытындағы бир масштаблық бөлекте (миллиметрде ямаса сантиметрде) өлшенген шаманың бир ямаса еки (бес, он, жигирма ҳ.т.б.) бирлиги сәйкес келсе масштаб сәтли түрде сайлап алынған деп есапланады.

7. Эксперименталлық мағлыўматлардың белгили бир тосаттан кететуғын қәтелерге ийе екенлигин есапқа алғанда эксперименталлық байланысты сәўлелендиретуғын иймекликти (ямаса туўрыны) ноқатлар арқалы емес, ал олар арасынан иймекликтиң еки тәрепиндеги ноқатлар саны бирдей болатуғындай етип жүргизиў керек. Иймекликлердиң тегис болыўы керек.

Графикке шамаларды өлшегенде жиберилетуғын қәтени (исенимли интервалды) қойыў керек. Бул эксперименталлық ноқатларға қарата симметриялы вертикаль ямаса горизонт бағытындағы сызық болып табылады.



11-сүўрет.



12-сүўрет.

11- ҳәм 12 сүўретлерде базы бир $y_1 = f(x_1)$ ҳәм $y_2 = f(x_2)$ физикалық байланысларының графиклериндеги өлшеў қәтелерин сәўлелендириўге мысаллар келтирилген.

Эксперименталлық мағлыўматлар бойынша эксперименттиң қәтеси шеклеринде тәжирийбелерде алынған ноқатларға жеткиликли дәрежеде жақын өтетуғын бир неше иймекликлерди жүргизиўге болады.

Графиклер дүзгенде ең көп жиберилетуғын қәтелер. Мейли дене тең өлшеўли қозғалғандағы жолдың ўақытқа ғәрезлигиниң графигин дүзиў керек болсын. Бул ғәрезликти $S = f(t)$ арқалы белгилейик. Өлшеўлердиң нәтийжелери төмендеги 5-кестеде берилген.

5-кесте.

t, с	10	12	14	15	16	18	19	20
S, м	20	23	30	31	34	34	38	43

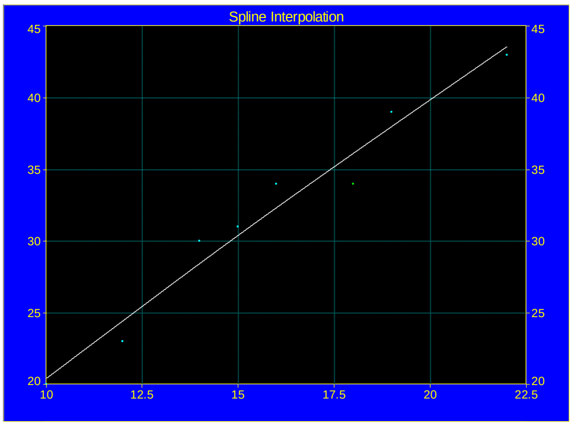
Бул мағлыўматлар тийкарында TableCurve 2D программасы жәрдеминде графикти аңсат сызыўға ҳәм аппроксимациялаўға болады (13-а сүўрет).

Бул мағлыўматлар тийкарында Mathematica 9.0 пакетиниң жәрдеминде график дүзиўимиз мүмкин. Оның ушын мынадай командаларды жазамыз:

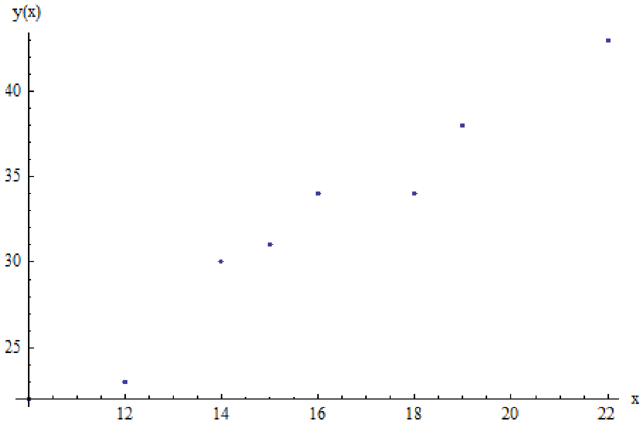
$$f = \{\{10,22\},\{12,23\},\{14,30\},\{15,31\},\{16,34\},\{18,34\},\{19,38\},\{22,43\}\};$$

$$ListPlot[f, AxesLabel \to \{"x","y(x)"\}]$$

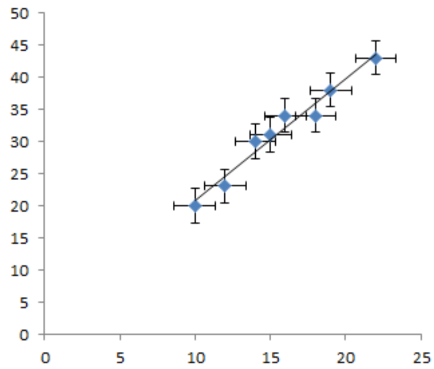
Компьютер 13-b сүўретте келтирилгендей графикти береди. Бул график дурыс сызылған (график ийелеген майдан толығы менен пайдаланылған).



a)



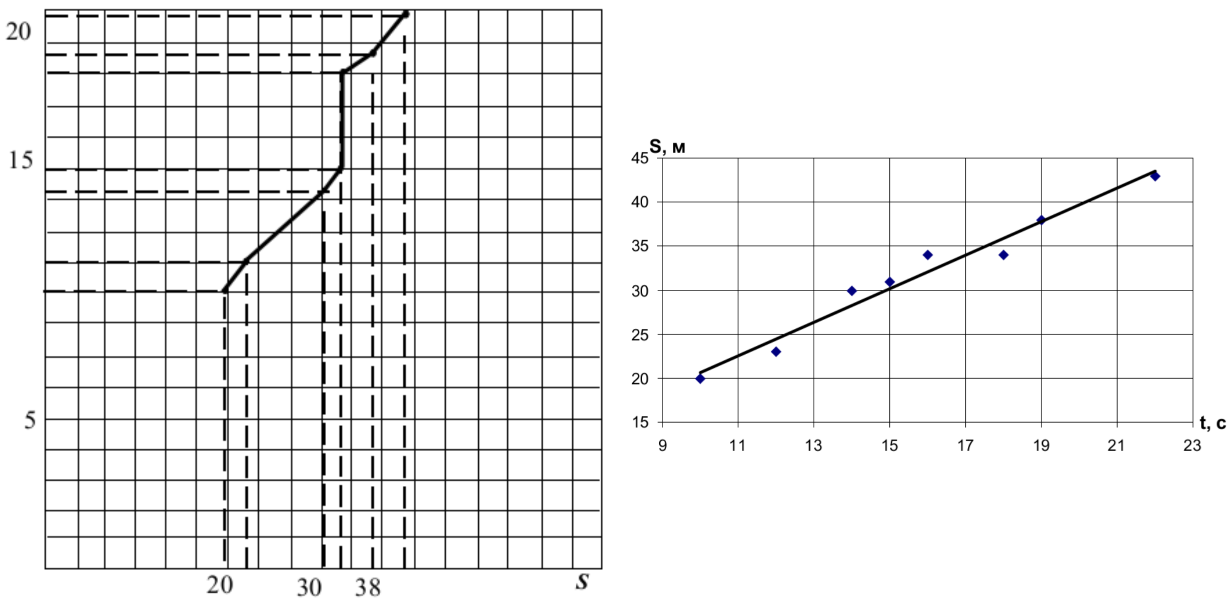
b)



c)

13-сүўрет 3-кестеде келтирилген мағлыўматлар бойынша компьютердиң жәрдеминде соғылған графиклер. a – TableCurve 2D программасы жәрдеминде сызықлы аппроксимация исленген, b - Mathematica 9.0 пакетиниң жәрдеминде алынған график. Бул графиклер дурыс сызылған. c – Excel жәрдеминде стандарт қәтеликлерди көрсетиў менен сызылған. Бул графиктиң дүзилиўинде қәтелик жиберилген (майданның биразы пайдасыз пайдаланылған).

14-сүўретте графиклерди қолдан дүзгенде студентлердиң ең жийи жиберетуғын қәтелиги келтирилген.



14-сүўрет. a) дурыс емес сызылған график, b) дурыс сызылған (қолдан) график.

14-сүўретте келтирилген графикти дүзгенде жиберилген тийкарғы қәтелер мыналардан ибарат:

1. Координаталар көшерлериниң бағытлары дурыс емес сайлап алынған. Ўақыт t ғәрезсиз өзгеретуғын шама болып табылады (аргумент болып табылады) ҳәм сонлықтан бул физикалық шама абсцисса көшерине түсирилиўи, ал функцияның мәниси болса ордината көшерине түсириледи (вертикаль бағытта). Ордината көшеринде усы көшерге түсирилген физикалық шама (t ўақыты), оның өлшем бирлиги (с), ал абсцисса көшеринде болса жолдың өлшем бирлиги (м) көрсетилмеген.

2. Графиктиң майданы толық пайдаланылмаған. Жоқарыдағы кестеде берилген эксперименталлық мағлыўматлардан координаталар көшерлериниң ноллик белгиден басланыўы керек деген жуўмақ келип шықпайды. Сонлықтан координаталар басын жылыстырыў ҳәм соның есабынан масштабты үлкейтиў мүмкин.

3. Эксперименталлық ноқатлар айырып көрсетилмеген.

4. Ордината көшерине масштаблық бөлиўлер емес, ал эксперименталлық ноқатлардың координаталары қойылған. Ал абсцисса көшеринде масштаблық бөлиўлар тең өлшеўли қойылмаған.

5. Эксперименталлық ноқатлар дурыс емес байланыстырылған: тең өлшеўли қозғалыста жолдың ўақыттан ғәрезлигиниң сызықлы екенлиги алдын-ала белгили ҳәм сонлықтан график туўры сызықтан турыўы керек.

14-b сүўретте $S = f(t)$ ғәрезлиги ушын дурыс сызылған график келтирилген.

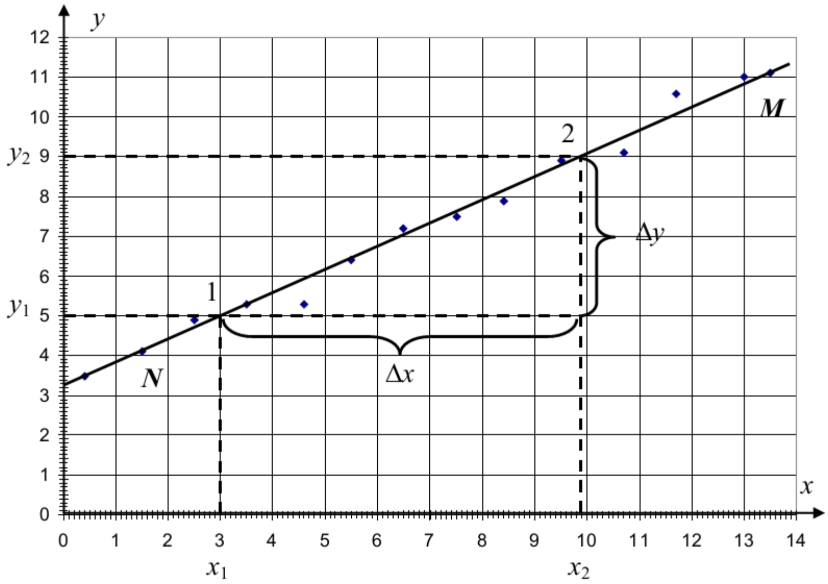
Аналитикалық аңлатпаларды алыў. Тәжирийбелердиң барысында өлшенетуғын еки шаманың $y_1, y_2,$ ..., y_n ҳәм $x_1,$ $x_2,$ ..., x_n түриндеги мәнислери алынған ҳәм олар бир бири менен базы бир $y = f(x)$ функционаллық байланысы менен байланысқан ҳәм бул функцияның түри алдын-ала белгисиз болсын. Сызықлы ғәрезлилик мысалында белгисиз болған аналитикалық байланысты алыўға мүмкиншилик беретуғын бир неше усылды көрсетемиз.

Аналитикалық байланыстың параметрлерин алыўдың графикалық усылы. Бизиң қолымызда бар $y_1, y_2,$ **...,** y_n ҳәм $x_1,$ $x_2,$ **...,** x_n эксперименталлық мағлыўматлар бойынша $y = f(x)$ функционаллық байланыстың графигин дүземиз. Өлшеўлердиң қәтелерин есапқа алған ҳалда алынған байланысты сызықлы байланыс деп есаплаўға болатуғынлығын ямаса болмайтуғынлығын анықлаймыз. Егер биз изертлеп атырған байланысты сызықлы байланыс деп есаплаўға болатуғын болса, онда графикте алынған сызықты $y = ax + b$ формуласының жәрдеминде аңлатыў мүмкин. Бул аңлатпада a менен b арқалы анықланыўы керек болған белгисиз коэффициентлер белгиленген.

Еки көшер бойынша есаплаўдың нолден басланыўы ҳәм еки көшер бойынша да бирдей масштаблардың қолланылыўы бул усылды пайдаланыўда орынланыўы шәрт екенлигин атап өтемиз.

Қурылған графикте $y = ax + b$ сызықлы байланыс бойынша ордината көшери менен кесилисетуғын туўры сызық сызылады. Туўрыны мүмкин болғанынша эксперименталлық ноқатлар арасынан усы ноқатларға мүмкин болғанынша жақын аралықлардан өткереди.

15-сүўретте 6-кестеде келтирилген мәнислер бойынша сызылған график көрсетилген. Бул график тийкарында *a* менен *b* коэффициентлерин анықлаўдың еки усылын көрсетемиз.



15-сүўрет. $y = ax + b$ сызықлы байланыс параметрлерин (коэффициентлери) анықлаў ушын арналған сүўрет.

Биз енди алынған аналитикалық аңлатпалар тийкарында кесте дүземиз (6-кесте) ҳәм бул кестеде 15-сүўреттеги M менен N ноқатларының координаталарына айрықша итибар беремиз. Кестени дүзиў ушын Excel деп пайдаланамыз.

6-кесте.

x	0,40	**1,50**	2,50	3,50	4,60	5,50	6,50	7,50	8,40	9,50	10,70	11,70	13,00	**13,50**
y	3,50	**4,10**	4,90	5,30	5,30	6,40	7,20	7,50	7,90	8,90	9,10	10,60	11,00	**11,10**
		M												**N**

1-усыл. Математикадан масштаблар есапқа алынғанда туўрының абсцисса көшерине қыялығы мүйешиниң тангенсиниң a шамасына, ал туўрының ордината көшери менен кесилисиў ноқатының координатасының b шамасына тең екенлиги белгили.

15-сүўретте туўрының вертикаллық көшерди 3,2 ноқатында кесип өтетуғынлығы көринип тур. Демек b = 3,2.

Туўрының x көшерине қыялығы мүйешиниң тангенсин табыў ушын оның бағыты бойынша бир биринен мүмкин болғанынша үлкен қашықлықта жайласқан 1 ҳәм 2 ноқатларын аламыз ҳәм олардың координаталарын анықлаймыз (аргументтиң мәнислери x_1, x_2 лер менен функциялардың мәнислери болған y_1, y_2 шамаларын). Бундай жағдайда $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Сүўреттен $a = \frac{4}{6,9} = 0,58$ екенлигине ийе боламыз.

Демек биз излеп атырған теңлеме

$$y = 0,58x + 3,2$$

түринде жазылады екен.

2-усыл. a менен b коэффициентлерин анықлаў ушын туўрының үстинде алынған координаталары (x_1, y_1) ҳәм (x_2, y_2) болған еки ноқат жеткиликли. Бул мәнислерди $y = ax + b$ теңлемесине қойыў a ҳәм b коэффициентлери ушын төмендегидей еки алгебралық теңлемени береди:

$$ax_1 + b = y_1,$$

$$ax_2 + b = y_2.$$

Бул теңлемелер системасын шешип a менен b коэффициентлери ушын төмендегидей мәнислерди аламыз:

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \ b = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}.$$

Егер ең кеминде еки эксперименталлық ноқат тегисленген сызықтың үстинде жататуғын жағдайда бул усылды қолланыўға болады. Графикте M ҳәм N ноқатларының тегисленген сызыққа тийисли екенлиги көринип тур. Бул ноқатлардың координаталарының M(1,5;4,1) ҳәм N(13,5;11,1) шамаларына тең екенлиги көринип тур. Усы мағлыўматлардың жәрдеминде a ҳәм b коэффициентлерин былайынша табамыз:

$$a=\frac{y_M-y_N}{x_N-x_M}=\frac{11,1-4,1}{13,5-1,5}=\frac{7}{12}=0,513;$$

$$b=y_M-ax_M=y_N-ax_N=11,1-0,583\cdot 13,5=3,229.$$

Демек биз излеп атырған байланыс былайынша жазылады екен:

$$y=0,583x+3,23.$$

Сызықлы емес функционаллық байланысларды сызықлы байланысқа айландырыў. Ҳәзирги ўақытлары функционаллық байланысларды сызықлы байланысқа айландырыўдың компьютерлик усыллары жүдә кең тарқалған. Биз бул жумыста студентлердиң үйренилип атырған мәселениң мәнисин терең уғыўы ушын есаплаўлардың қалайынша жүргизилетуғынлығын толығы менен беремиз.

Егер эксперимента   ллық ғәрезлик (байланыс) сызықлы емес характерге ийе болса өзгериўшилерди алмастырыў арқалы оны сызықлы түрге алып келиў мүмкин. Бундай жағдайда жаңа координаталық тор алынады. Буннан кейин аналитикалық байланысты табыў ушын қайтадан графикалық усылды пайдаланыў керек болады. Бундай усылды функционаллық байланысларды сызықлы байланысқа айландырыў, яғный линеаризация деп аталады.

Мысал ретинде $y \sim x^2$ түриндеги квадратлық байланысты қараймыз. Егер OY көшерине тең өлшеўли шкаланы, ал OX көшерине $x_1=x^2$ квадратлар шкаласын жайластырсақ, онда парабола теңлемеси туўры сызықтың сүўретиндей түрдеги тор алынады. Бул торда $y \sim x_1$.

Логарифмлик шкалалар айрықша жийи қолланылады. Бундай шкаланың жәрдеминде дәрежели ҳәм көрсеткишли функциялардың графиклерин "туўрыға айландырыў" мүмкин. Мысал ретинде $y=ae^{bx}$; $Ln(y)=bx+Ln(a)$ түриндеги ҳәм басқа да функцияларды көрсете аламыз. $Ln(y)=y_1$, $Ln(a)=A$ деп белгилеп дәслепки теңлемени

$y_1 = A + bx$ түринде жазамыз. Бул жерде x шкаласын тең өлшеўли қалдырып ҳәм y_1 лагорифмлик шакаласын пайдаланып дәслепки функцияны туўры сызықтың жәрдеминде сәўлелендириў мүмкин екенлиги көринеди. Алынған координаталық торды ярым логарифмлик тор деп аталады.

Усындай түрлендириўлердиң улыўма жағдайларда да мүмкин екенлиги өз-өзинен түсиникли.

$$a\varphi(x) + b\psi(y) + c = 0$$

түриндеги анық емес функцияны функционаллық торда туўры сызықтың жәрдеминде сәўлелендириў мүмкин. Бул функцияда a,b,c арқалы турақлы шамалар белгиленген. Графикте OX көшерине $\varphi(x)$ шкаласы, ал OY көшерине $\psi(y)$ шкаласы түсириледи. Бундай жағдайда пайдаланылып атырған $\varphi(x)$ ҳәм $\psi(y)$ функциялары үзликсизлик ҳәм монотонлық шәртлерин қанаатландырыўы керек. 7-кестеде базы бир функцияларды сызықлы функцияларға айландырыўға бир неше мысаллар келтирилген.

7-кесте

Дәслепки формула	Түрлендирилген формула	Өзгериўшилерди алмастырыў	Сызықлы функцияға айландырылған формула
$y = aLn(x) + b$	-	$Ln(x) = x_1$	$y = ax_1 + b$
$y = ax^b$	$Ln(y) = bLn(x) + Ln(a)$	$Ln(y) = y_1$, $Ln(x) + x_1$, $Ln(a) = a_1$.	$y_1 = bx_1 + a_1$
$y = e^{bx+k}$	$Ln(y) = bx + k$	$Ln(y) = y_1$ $b = a$	$y_1 = ax + k$

$y = ae^{bx}$	$Ln(y) = Ln(a) + bx$	$Ln(y) = y_1$ $b = b_1$ $Ln(a) = a_1$	$y_1 = b_1 x + a_1$
$y = \frac{a}{x} + b$	-	$\frac{1}{x} = x_1$	$y = ax_1 + b$
$y = \frac{1}{ax + b}$	$\frac{1}{y} = ax + b$	$\frac{1}{y} = y_1$	$y_1 = ax + b$
$y = \frac{x}{ax + b}$	$\frac{1}{y} = \frac{b}{x} + a$	$\frac{1}{y} = y_1$, $\frac{1}{x} = x_1$	$y_1 = bx_1 + a$

Тәжирийбелердиң барысында алынған эксперименталлық байланыс сызықлы емес иймекликтен турса әдетте көз бенен қарағанда бул иймекликтиң қандай функция менен оны тәрийиплеўдиң мүмкин екенлигин анықлаў қыйын болады. Алынған эксперименталлық мағлыўматларды функционаллық торларға жайластырып сол байланыслардың арасындағы қайсы байланыстың сызықлы байланысқа жақын екенлигине баҳа бериў, яғный қандай функция менен тәрийиплениўиниң мүмкин екенлигин анықлаў мүмкин.

Биз ҳәзирги заман программалаў тиллериниң ямаса экспериментте алынған мағлыўматларды қайта ислеўге (аппроксимациялаўға интеполяциялаўға) мүмкиншилик беретуғын программалардың қәлеген функционаллық байланысларды сызықлы байланысқа түрлендире алатуғынлығыныўын, ал түрлендириў процессиниң жоқарыда келтирилгендей функциялар менен математикалық процедуралардың жәрдеминде әмелге асырылатуғынлығын атап өтемиз.

Функционаллық байланыслардың параметрлерин алыўдың аналитикалық усыллары. Жоқарыда баян етилген функционаллық байланыслардың параметрлерин алыўдың графикалық усылы өзиниң көргизбелилиги ҳәм салыстырмалы әпиўайылығы менен айрылып турады. Бирақ ол усыл белгили бир субъективликти ҳәм төмен дәлликти өз ишине алады.

Аналитикалық усыллар бундай кемшиликлерге ийе емес, функциялардың кең классы ушын үлкен дәлликтеги нәтийжелерди алыўға мүмкиншилик береди. Бирақ өзиниң көрсетпелиги бойынша графикалық усылдан төмен турады.

Биз төменде функционаллық байланыслардың параметрлерин анықлаўдың усылларының бир қатарын көрсетемиз. Биринщиси төмендегиден ибарат:

Мейли тәжирийбениң барысында бурынғыдай x_1, x_2, ..., x_n ҳәм y_1, y_2, ..., y_n шамалары алынған болсын. Олар арасында $y = ax + b$ түриндеги функционаллық байланыс бар деп болжаймыз. Эксприменталлық қәтелердиң бар екенлигине байланыслы алынған y_i шамалары $ax_i + b$ формуласы бойынша алынған шамаға тең болмайды. Сәйкес қәтени Δ_i арқалы белгилеймиз:

$$\Delta_i = y_i - ax_i - b \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

Егер биз a менен b параметрлерин $\sum_{i=1}^{n} \Delta_i = \sum_{i=1}^{n} y_i - ax_i - b$ қәтелери теңлесетуғындай етип алсақ, онда бул иләж тек бир теңлемениң алыныўына алып келеди. Ал a менен b параметрлерин анықлаў ушын бизге еки теңлеме керек болады. Сонлықтан теңликтиң орынланыўы өткерилген барлық бақлаўлар ушын емес, ал бақлаўларда алынған мәнислердиң айырым топарлары ушын (ямаса ярымы ушын) орынланады деп болжаўымыз керек. Бул болжаў төмендегидей теңлемелер системасының алыныўына мүмкиншилик береди:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} y_i - ax_i - b = 0, \\ \sum_{i=m+1}^{n} y_i - ax_i - b = 0. \end{cases}$$

Бул аңлатпада m арқалы биринши группадағы бақлаўлар саны белгиленген. Бул теңлемелер системасын былайынша көширип жазамыз:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{m} x_i + mb = \sum_{i=1}^{m} y_i, \\ a\sum_{i=m+1}^{n} x_i - (n-m)b = \sum_{i=1}^{m} y_i. \end{cases}$$

a менен *b* параметрлерин анықлаў ушын дәслеп қурамалы емес болған төрт сумманы есаплап алып алынған теңлемелер системасын шешиў керек болады.

Графикалық усыл қолланылған жағдай ушын бул усылды демонстрациялаймыз. Есаплаўлардың қолайлы болыўы ушын 15-сүўретте келтирилген мағлыўматларды еки топарға бөлемиз ҳәм 6-кестедегидей етип көширип жазамыз (биз 8-кестени дүзгенде Excel программасынан пайдаландық). 14 өлшеўди екиге бөлемиз, биринши топарда m = 7, ал екинши топарда болса n - m = 7.

8-кесте

n	x	y	n	x	y
1	0,40	3,50	8	7,50	7,50
2	1,50	4,10	9	8,40	7,90
3	2,50	4,90	10	9,50	8,90
4	3,50	5,30	11	10,70	9,10
5	4,60	5,30	12	11,70	10,60
6	5,50	6,40	13	13,00	11,00
7	6,50	7,20	14	13,50	11,10
Суммасы	24,50	36,70	Суммасы	74,30	66,10

Алынған нәтийжелерди теңлемелер системасына қойып төмендегилерди аламыз:

$$\begin{cases} a\cdot 24{,}5+7\cdot b=36{,}7, \\ a\cdot 74{,}3+7\cdot b==66{,}1. \end{cases}$$

Бул системаны a,b параметрлерине қарата шешсек $a=0{,}590,\ b=3{,}176$ шамаларын аламыз. Демек сызықлы байланыс теңлемеси

$$y=0{,}590x+3{,}176$$

түринде жазылады екен.

7-§. Ең киши квадратлар усылы

Ең киши квадратлар усылы (метод наименьших квадратов, OLS, Ordinary Least Squares) экспериментallлық байланыслардың коэффициентлерин анықлаўға мүмкиншилик беретуғын ең исенимли ҳәм илимий жақтан тийкарланған усыл болып табылады. Бул усыл менен коэффициентлер есапланғанда экспериментте алынған y_i $(i=1,2,...,n)$ шамаларының аўысыўлардың квадратларының суммасы изленип атырған $y=ax+b$ байланысы бойынша алынған мәнистен айырмасы минимал болыўы керек.

Усыған байланыслы аўысыўлардың квадратларының суммасын есаплаймыз:

$$S=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-(ax_i+b)\right]^2.$$

Сумма астындағы аңлатпаның квадратын ашамыз. Нәтийжеде төмендегилерге ийе боламыз:

$$S=\sum_{i=1}^{n}(y_i^2-2ax_iy_i-2by_i+a^2x_i^2+2abx_i+b^2)$$

ямаса

$$S=S_{yy}-2aS_{xy}-2bS_y+a^2S_{xx}+2abS_x+nb^2.$$

Бул аңлатпаларда

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{n} y_i^2; S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i; \; S_y = \sum_{i=1}^{n} y_i; \; \; S_x = \sum_{i=1}^{n} x_i; \; S_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Экспериментлерде x_1 $x_2,...,$ x_n ҳәм $y_1,$ $y_2,...,$ y_n мәнислери алынған болсын. Сонлықтан аўысыўлардың квадратларының суммасы болған S шамасы тек a менен b коэффициентлери менен ғана байланыслы болады. Демек аўысыўлардың квадратларының суммасы тек еки a менен b шамаларынан ғана ғәрезли болады деген сөз. $S(a,b)$ функциясының минимумын табыў ушын оның a менен b дан алынған туўындыларын нолге теңеў керек:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2S_{xy} + 2aS_{xx} + 2bS_x = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2S_y + 2aS_x + 2nb = 0.$$

Алынған еки теңлемелер системасын әпиўайыластырғаннан кейин шешиў арқалы a менен b шамаларының мәнислерин есаплаймыз (Mathematica тилиниң жәрдеминде):

$$Solve[\{S_{aa}a + S_x b \,\text{ЉЬ}\, S_{xy}, S_x a + nb \,\text{ЉЬ}\, S_y\}, \{a,b\}]$$

$$a = -\frac{-nS_{xy} + S_x S_y}{nS_{aa} - S_x^2}, \; b = -\frac{S_x S_{xy} - S_{aa} S_y}{nS_{aa} - S_x^2}.$$

Бул методтың қолланылыўын графикалық усылды қолланған мысалда қарап шығамыз. Қолайлы болыўы ушын 4-кестени $x_i^2 = xx$ пенен $x_i y_i$ шамаларын алдын-ала есаплап 9-кесте түринде жазамыз. Өлшеўлер саны n = 14.

9-кесте.

x	y	xx	xy
0,4	3,5	0,16	1,4
1,5	4,1	2,25	6,15
2,5	4,9	6,25	12,25
3,5	5,3	12,25	18,55
4,6	5,3	21,16	24,38
5,5	6,4	30,25	35,2
6,5	7,2	42,25	46,8

7,5	7,5	56,25	56,25
8,4	7,9	70,56	66,36
9,5	8,9	90,25	84,55
10,7	9,1	114,49	97,37
11,7	10,6	136,89	124,04
13	11	169	143
13,5	11,1	182,25	149,85
S_x = 98,8	S_y = 102,8	S_{xx} = 934,26	S_{xy} = 866,15

Зәрүрли болған суммалар Excel электронлық кестесиниң жәрдеминде автомат түрде есапланды (9-кестедеги ең төменги қатар). Өлшеўлер саны n = 14 екенлигин есапқа алып төмендегидей теңлемелер системасын аламыз:

$$\begin{cases} S_{xx}a + S_x b = S_{xy}, \\ S_x a + nb = S_y. \end{cases}$$

Бул теңлемелер системасын шешиў ушын Mathematica компьютерлик системасы ушын

$$Solve[\{S_{xx}a + S_x b \,\text{ЉЪ}\, S_{xy}, S_x a + nb \,\text{ЉЪ}\, S_y\}, \{a, b\}]$$

түрдеги программаны жазсақ, компьютер

$$a = -\frac{nS_{\text{xy}} - S_x S_y}{S_x^2 - nS_{\text{xx}}}, \quad b = -\frac{S_x S_{\text{xy}} - S_{\text{xx}} S_y}{-S_x^2 + nS_{\text{xx}}}$$

шешимлерин береди. Демек $a = 0{,}5934$ ҳәм $b = 3{,}1548$ шамаларын ҳәм туўрының теңлемеси ушын

$$y = 0{,}5934x + 3{,}1548$$

теңлемесин аламыз.

Биз жоқарыда ең киши квадратлар усылының көп санлы есаплаў жумысларын орынлаўды талап ететуғынлығын көрдик. Егер биз усы усыл менен сызықлы емес байланысларды изертлесек, онда есаплаўлардың көлеми және де көбейеди. Мысалы $y = ax^2 + bx + c$ түриндеги квадратлық байланыс (ғәрезлилик) ушын коэффициентлерди есаплағанда

$$S=\sum_{i=1}^{n}(\Delta y)^2=\sum_{i=1}^{n}(y^2-ax_i^2-bx_i-c)^2$$

түриндеги квадратлардың суммасы болған S шамасының минималлық мәнисин табыўымыз керек болады. Демек a,b,c коэффициентлериниң мәнислерин есаплаў ушын

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i+nc-\sum_{i=1}^{n}y_i=0, \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^3+b\sum_{i=1}^{n}x_i^2+c\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=0, \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i^4+b\sum_{i=1}^{n}x_i^3+c\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i=0 \end{cases}$$

түриндеги алгебралық теңлемелер системасын шешиўге туўры келеди.

Ҳәзирги ўақытларда кең тарқалған арнаўлы компьютерлик программаларды қолланғанда ең киши квадратлар усылының жәрдеминде әдеўир қурамалы болған есаплаўларды да аңсат түрде жүргизиўге болады. Мысаллар келтиремиз.

Лабораторияда математикалық маятниктиң жәрдеминде еркин түсиў тезлениўиниң мәнисин анықлаў ушын узынлығы l ҳәр қыйлы болған маятниклер менен өлшеўлер сериясы орынланды. Нәтийжелер 8-кестеде берилген. Бул кестеде маятниктиң узынлығы l пенен маятниктиң тербелиў Т дәўирин анықлаў ушын көп қайтара өлшеўлер өткерилип, алынған нәтийжелердиң орташа арифметикалық мәниси қабыл етилди.

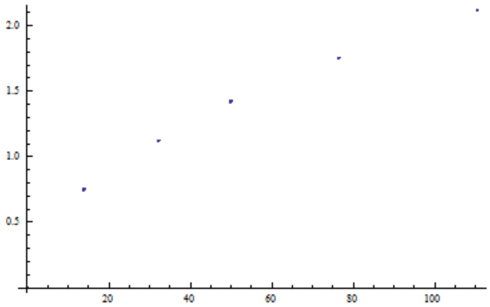
10-кесте. Тәжирийбелердиң барысында математикалық маятниктиң тербелис дәўириниң маятниктиң узынлығына байланысы.

l, sm	0	14	32,3	50	76,5	110,5
T, s	0	0,751	1,12	1,42	1,75	2,12

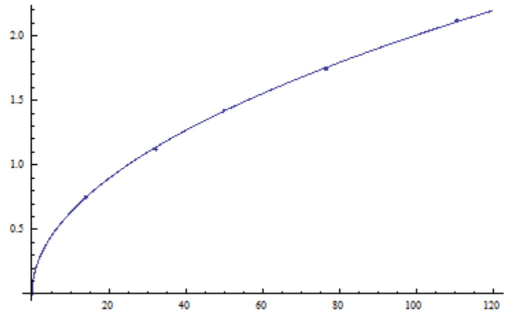
Бул мағлыўматларды Mathematica 9.0 компьютерлик алгебра системасына

$$Data=\{\{0,0\},\{14,0.751\},\{32.3,1.12\},\{50,1.42\},\{76.5,1.75\},\{110.5,2.12\}\}$$

түринде бериледи. Биз $ListPlot[Data]$ командасының жәрдеминде бул мағлыўматлар ушын график те дүзе аламыз (16-а сүўрет).



a)



b)

16-сүўрет. Математикалық маятниктиң узынлығы менен тербелиў дәўири арасындағы байланыс ушын алынған мағлаўматлар. а – экспериментте алынған ноқатлар, b – ең киши квадратлар усылы менен аппроксимация нәтийжеси.

Биз маятниктиң узынлығы менен тербелис дәўири арасында $y \sim \sqrt{x}$ түриндеги байланыс бар деп болжаймыз. $parabola = Fit[Data, \{1, x^{1/2}\}, x]$ түринде жазылады. Бул команда бойынша компьютер бизге

$$-0.005721 + 0.201243\sqrt{x}$$

түриндеги байланысты береди. Биз бул жерде -0,005721 шамасын киши екенлигин есапқа алған ҳалда есапқа алмасақ та болады. Ал 0,201 шамасы болса $2\pi / \sqrt{g} = 2\pi / \sqrt{981}$ = 0,2006 ≈ 0,201 шамасына тең. Солай етип биз $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ формуласына сәйкес келетуғын байланысты алдық. Нәтийже 16-b сүўретте келтирилген.

Және бир мысалды көремиз ҳәм бул мысалдың есаплаўларының барлығын Mathematica тилинде орынлаймыз.

Айланбалы қозғалыс динамикасының тийкарғы теңлемеси $\varepsilon = \dfrac{M}{J}$ (яғный ε = kM, k = 1/J) изертленди (координата басы арқалы өтетуғын туўры сызық). Момент M ниң ҳәр қыйлы мәнислериндеги базы бир дененің мүйешлик тезлениўи ε өлшенди. Усы дененің инерция моментин табыў керек. Күш моментин ҳәм мүйешлик тезлениўди өлшеўдиң нәтийжелери 11-кестеде берилген.

11-кесте. Күш моменти менен мүйешлик тезлениўди өлшеў нәтийжелери

n	M, H · м	ε, c^{-1}	M^2	M · ε	ε – kM	(ε - kM)^2
1	1.44	0.52	2.0736	0.7488	0.039432	0.001555
2	3.12	1.06	9.7344	3.3072	0.018768	0.000352
3	4.59	1.45	21.0681	6.6555	-0.08181	0.006693
4	5.90	1.92	34.81	11.328	-0.049	0.002401
5	7.45	2.56	55.5025	19.072	0.073725	0.005435
∑	–	–	123.1886	41.1115	–	0.016436

M менен ε арасындағы байланыс ε = kM түрине ийе екенлигин көрдик. Усыған байланыслы

$$k=\frac{1}{J}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}M_i\varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{n}M_i^2}=0{,}333728\ \text{кг}^{-1}\cdot\text{м}^{-2}.$$

шамасына ийе боламыз. Буннан J = 2,99645 кг·м^2.

Сызықлы байланыста a ҳәм b шамаларындағы орташа квадратлық қәтелерди

$$S_b=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-bx_i-a)^2}{(n-2)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}} \tag{M.1}$$

ҳәм

$$S_a=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-bx_i-a)^2}{(n-2)}\left(\frac{1}{n}+\frac{\overline{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\right)} \tag{M.2}$$

формулаларының жәрдеминде табамыз.

Биз қарап атырған жағдайда орташа квадратлық қәтени есаплаў ушын төмендеги формуладан пайдаланамыз:

$$S_{1/J} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - kx_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}} = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \frac{\sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i - kM_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} M_i^2}} = 0{,}00577547 \text{ кг}^{-1}\cdot\text{м}^{-2}.$$

Анықлама бойынша

$$S_J = J\sqrt{\left(\frac{S_{1/J}}{1/J}\right)^2} = J\frac{S_{1/J}}{1/J} = 0{,}05185 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

P = 0.95 исенимлигин берип Стьюдент коэффициентлери кестесинен n = 5 ушын

$$\Delta J = 2.78 \cdot 0.05185 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 = 0.1441 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \approx 0.2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

екенлигин табамыз.

Нәтийжелерди былайынша жазамыз:

$$J = (3.0 \pm 0.2) \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Салыстырмалы қәтелик

$$\varepsilon = \frac{\Delta J}{J} \cdot 100\% = \frac{0{,}2}{3} \cdot 100\% \approx 7\%.$$

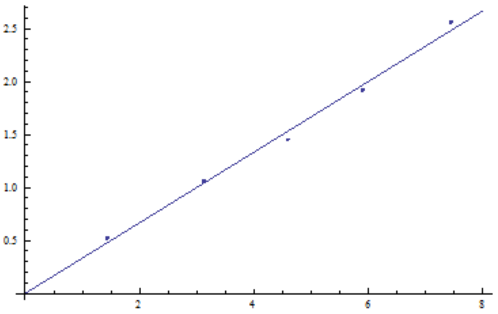
Биз мәселени Mathematica 9.0 пакетиниң жәрдеминде жүдә аңсат шешемиз. Мағлыўматларды бериў ушын

$$Data = \{\{1.44, 0.52\}, \{3.12, 1.06\}, \{4.59, 1.45\}, \{5.9, 1.92\}, \{7.45, 2.56\}\};$$

түриндеги аңлатпа жазылады. Ал тийкарғы программа

$$line = Fit[Data, \{1, x\}, x]$$
$$r1 = Plot[0.001255 + 0.3335x, \{x, 0, 8\}];$$
$$r2 = ListPlot[Data];$$
$$Show[r1, r2]$$

түринде жазылады. Компьютер $y = 0.0013 + 0.3335x$ түриндеги аналитикалық формуланы береди (программадағы екинши қатарға усы мәнис берилген). Бул формуладағы 0,3335 жоқарыдағы k ның мәниси болып табылады, ал 0,0013 санын есапқа алмаймыз. Mathematica пакети жәрдеминде алынған график 17-сүўретте берилген.



17-сүўрет.

5-кесте. Күш моменти менен мүйешлик тезлениўди өлшеў нәтийжелери бойынша алынған экспериментаKллық ноқатлар менен аппроксимацияланған туўры.

2-мысал. Металдың қарсылығының температуралық коэффициентин ең киши квадратлар усылы менен есаплаймыз. Қарсылық пенен температура арасындағы байланыстың сызықлы екенлиги мәлим:

$$R_t = R_0(1+\alpha t) = R_0 + R_0\alpha t.$$

Еркин ағза 0^0C температурадағы изертленип атырған метал үлгиниң қарсылығы R_0 ди анықлайды. Ал мүйешлик коэффициент болса температуралық коэффициент α ның R_0 қарсылығына көбеймесине тең.

Өлшеўлер менен есаплаўлардың нәтийжелери 12-кестеде келтирилген.

12-кесте.

n	$t, ^0C$	r, Ом	$t-\bar{t}$	$(t-\bar{t})^2$	$(t-\bar{t})r$	$r-bt-a$	$(r-bt-a)^6 \cdot 10^{-6}$
1	23	1.242	-62.8333	3948.028	-78.039	0.007673	58.8722
2	59	1.326	-26.8333	720.0278	-35.581	-0.00353	12.4959
3	84	1.386	-1.83333	3.361111	-2.541	-0.00965	93.1506
4	96	1.417	10.16667	103.3611	14.40617	-0.01039	107.898
5	120	1.512	34.16667	1167.361	51.66	0.021141	446.932
6	133	1.520	47.16667	2224.694	71.69333	-0.00524	27.4556
∑	515	8.403	–	8166.833	21.5985	–	746.804
∑/n	85.8333	1.4005	–	–	–	–	–

$y = a + bx$ сызықлы байланысы бар болған жағдайда $b = \dfrac{\sum (x_i - \overline{x}) y_i}{\sum (x_i - \overline{x})^2}$ ҳәм $a = \overline{y} - b\overline{x}$ теңликлери орынланатуғын болғанлықтан бул кестеде $b = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (t_i - \overline{t}) r_i}{\sum_{i=1}^{n} (t_i - \overline{t})^2}$ ҳәм $a = R_0 = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{r_i}{n} - \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (t_i - \overline{t}) r_i}{\sum_{i=1}^{n} (t_i - \overline{t})^2} \overline{t}$. Бул аңлатпаларда $\overline{t}$ арқалы температураның орташа мәниси белгиленген.

6-кестени Mathematica 9.0 тилинде де дүзиў мүмкин. Оның ушын

$$n = 6; t_1 = 23; t_2 = 59; t_3 = 84; t_4 = 96; t_5 = 120; t_6 = 133;$$
$$r_1 = 1.242; r_2 = 1.326; r_3 = 1.386; r_4 = 1.417; r_5 = 1.512; r_6 = 1.52;$$

```
t1 = Sum[t_i, {i, 1, n}]; tort = N[t1 / 6, 6];

Table[Print[" i =  ", i, "; t_i-t̄ = ",
  t_i - tort, "; (t_i-t̄)^2 = ", (t_i - tort)^2, "; (t_i-t̄) r_i = ",
  (t_i - tort) r_i, "; r_i-bt-R0 =   ", r_i -
  (Sum[((t_i - tort) r_i), {i, 1, n}] / Sum[(t_i - tort)^2, {i, 1, n}]) t_i - R0, "; (r_i-bt-R0)^2 10^6 =  ",
  (r_i - (Sum[((t_i - tort) r_i), {i, 1, n}] / Sum[(t_i - tort)^2, {i, 1, n}]) t_i - R0)^2 10^6, ";"], {i, 1, n}]
```

Нәтийжелер төмендегидей түрге ийе болады:

```
i =  1; t_i-t̄ = -62.8333; (t_i-t̄)^2 = 3948.0; (t_i-t̄)r_i =
-78.039; r_i-bt-R0 =   0.00767282; (r_i-bt-R0)^2 10^6 =  58.8722;

i =  2; t_i-t̄ = -26.8333; (t_i-t̄)^2 = 720.03; (t_i-t̄)r_i =
-35.581; r_i-bt-R0 =   -0.00353495; (r_i-bt-R0)^2 10^6 =  12.4959;

i =  3; t_i-t̄ = -1.8333; (t_i-t̄)^2 = 3.361; (t_i-t̄)r_i =
-2.541; r_i-bt-R0 =   -0.00965146; (r_i-bt-R0)^2 10^6 =  93.1506;

i =  4; t_i-t̄ = 10.1667; (t_i-t̄)^2 = 103.36; (t_i-t̄)r_i =
14.4062; r_i-bt-R0 =   -0.0103874; (r_i-bt-R0)^2 10^6 =  107.898;

i =  5; t_i-t̄ = 34.1667; (t_i-t̄)^2 = 1167.36; (t_i-t̄)r_i =
51.66; r_i-bt-R0 =   0.0211408; (r_i-bt-R0)^2 10^6 =  446.932;

i =  6; t_i-t̄ = 47.1667; (t_i-t̄)^2 = 2224.69; (t_i-t̄)r_i =
71.6933; r_i-bt-R0 =   -0.00523981; (r_i-bt-R0)^2 10^6 =  27.4556;
```

Бул аңлатпаларда tort арқалы температураның орташа мәниси белгиленген.

Қәтелерди есаплаў бойынша төмендегидей аңлатпаларды жазамыз:

$$\alpha R_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i - \overline{t})r_i}{\sum_{i=1}^{n}(t_i - \overline{t})^2} = 0{,}002645 \text{ Ом/град.}$$

$$R_t = R_0(1+\alpha t) = R_0 + R_0 \alpha \overline{t} = 1.1735 \text{ Ом}.$$

Буннан

$$\alpha = \frac{\alpha R_0}{R_0} = 0{,}00225 \text{ град}^{-1}.$$

α шамасын анықланғанда жиберилген қәтеликти табамыз ҳәм (М.1) және (М.2) аңлатпаларынан пайдаланамыз. $\alpha = \frac{\alpha R_0}{R_0}$ болғанлықтан жоқарыдағы формулалардан

$$S_\alpha = \sqrt{\left(\frac{S_{\alpha R_0}}{\alpha R_0}\right)^2 + \left(\frac{S_{R_0}}{R_0}\right)^2}.$$

$$S_{\alpha R_0} = \sqrt{\frac{\sum (R_i - bt_i - a)^2}{(n-2)\sum (t_i - \overline{t})^2}} = \sqrt{\frac{0{,}000746804}{(6-2)8166{,}833}} = 1{,}54 \cdot 10^{-4}$$

$$S_{R_0} = \sqrt{\frac{\sum (R_i - bt_i - a)^2}{n-2}\left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{t}^2}{\sum (t_i - \overline{t})^2}\right)} = 0{,}014126 \text{ Ом}.$$

Бундай жағдайда

$$S_\alpha = 0{,}002254\sqrt{\left(\frac{1{,}51 \cdot 10^{-4}}{26{,}45 \cdot 10^{-4}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}014126}{1{,}1735}\right)^2} = 1{,}32 \cdot 10^{-4} \text{ град}^{-1}.$$

Стьюдент кестеси бойынша P = 0,95 исенимлигин берип n = 6 ушын t = 2,57 екенлигин табамыз ҳәм салыстырмалы қәтеликти табамыз: Δα = 2.57 · 0.000132 = 0.000338 град$^{-1}$.

P = 0.95 болғанда α = (23 ± 4) · 10^{-4} град$^{-1}$.

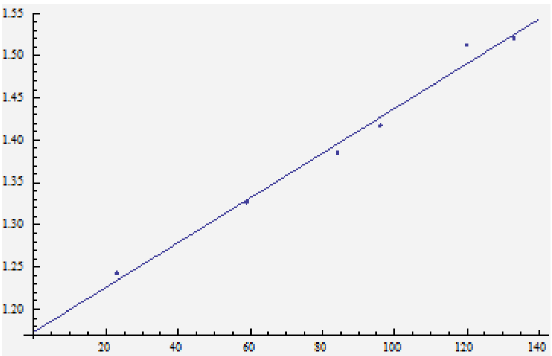
$$\varepsilon = \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \cdot 100\% = \frac{4}{23} 100\% \approx 20\%.$$

Енди ең киши квадратлар усылы менен R = R(t) функциясы ушын аналитикалық аңлатпаны алыўымыз керек. Бунның ушын төмендегидей программа дүземиз:

$$Data = \{\{23,1.242\},\{59,1.326\},\{84,1.386\},\{96,1.417\},\{120,1.512\},\{133,1.520\}\};$$
$$line = Fit[Data,\{1,x\},x]$$
$$r1 = Plot[1.1735\ +0.00264x,\{x,0,140\}];$$
$$r2 = ListPlot[Data];$$

$$Show[r1,r2]$$

Компьютер бизге $1.1735+0.002645x$ функционаллық байланысын ҳәм сәйкес графикти береди (18-сүўрет). Бул аңлатпадағы 1,1735 Ом өткизгиштиң 0^0С температурадағы қарсылығына тең. 0,002645 саны α коэффициентине тең (жоқарыдағы мағлыўматлар менен салыстырыў керек).



18-сүўрет. 6-кестеде берилген мағлыўматлар бойынша табылған $R(t)$ функционаллық байланысы. Ноқатлар экспериментте алынған нәтийжелер, туўры сызық $1.1735+0.002645x$ функциясының графиги.

3-мысал. Ньютон сақайналары бойынша линзаның иймеклик радиусын анықлаймыз. Нь.тон сақыйналарының радиусы r_m өлшенди ҳәм бул сақыйналардың номерлери m анықланды. Ньютон сақыйналарының радиусы сақыйнаның номери менен былайынша байланысқан

$$r_m^2 = m\lambda R - 2d_0 R.$$

Бул аңлатпада d_0 арқалы линза менен тегис параллель пластинка арасындағы қашықлық (ямаса линзаның деформациясы), λ арқалы жақтылықтың толқын узынлығы белгиленген. Мейли λ = (600 ± 6) нм болсын. $r_m^2 = y$, $m = x$ белгилеўлерин қабыл етейик. $\lambda R = b,\ -2d_0 R = a.$

Бундай жағдайда теңлеме $y = ax + b$ түрине енеди. Өлшеўлер менен есаплаўлар нәтийжелери 13-кестеде берилген.

13-кесте.

n	$x = m$	$y = r^2$, 10^{-2} мм^2	$m - \overline{m}$	$(m - \overline{m})^2$	$(m - \overline{m})y$	$y - bx - a$, 10^{-4}	$(y - bx - a)^2$, 10^{-6}
1	1	6.101	-2.5	6.25	-0.15252	12.01	1.44229
2	2	11.834	-1.5	2.25	-0.17751	-9.6	0.930766
3	3	17.808	-0.5	0.25	-0.08904	-7.2	0.519086
4	4	23.814	0.5	0.25	0.11907	-1.6	0.0243955
5	5	29.812	1.5	2.25	0.44718	3.28	0.107646
6	6	35.760	2.5	6.25	0.894	3.12	0.0975819
∑	21	125.129	–	17.5	1.04117	–	3.12176
∑/n	3.5	20.8548333	–	–	–	–	–

$y = a + bx$ сызықлы байланысы бар болған жағдайда $b = \dfrac{\sum (x_i - \overline{x}) y_i}{\sum (x_i - \overline{x})^2}$ ҳәм $a = \overline{y} - b\overline{x}$ теңликлериниң орынланатуғынлығын есапқа аламыз ҳәм усындай тийкарда a менен b шамалары ушын мыналарға ийе боламыз:

$$b=\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})r_i}{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})^2}=\frac{1,0412}{17,5}=0,0595 \text{ Ом.град.}$$

$$a=\overline{r}^2-b\overline{m}=0,20855-0,0595\cdot 3,5=0,00313 \text{ мм}^2.$$

a менен b шамаларындағы орташа квадратлық қәтелерди табыў ушын (М.1) ҳәм (М.2)-аңлатпалардан пайдаланамыз.

$$S_b=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(r^2-bm-a)^2}{(n-2)\sum_{i=1}^{n}(m-\overline{m})^2}}=\sqrt{\frac{3,12176\cdot 10^{-6}}{(6-2)\cdot 17,5}}=0,000211179 \text{ мм}^2.$$

$$S_a=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(r^2-bm-a)^2}{(n-2)}\left(\frac{1}{n}+\frac{\overline{m}^2}{\sum_{i=1}^{n}(m-\overline{m})^2}\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{3,12176\cdot 10^{-6}}{6-2}\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{3,5^2}{17,5}\right)}= \text{ мм}^2.$$

P = 0.95 исенимлиги ушын кестелерден n = 6 болған жағдайда Стьюдент коэффициенти t = 2.57 екенлигин табамыз ҳәм абсолют қәтелерди табамыз.

$\Delta b = 2.57 \cdot 0.000211179 = 6\cdot 10^{-4}$ мм^2;

$\Delta a = 2.57 \cdot 0.000822424 = 3\cdot 10^{-3}$ мм^2.

Нәтийжелерди төмендегидей түрде жазамыз:

P = 0.95 болған жағдайда

$b = (595 \pm 6)\cdot 10^{-4}$ мм^2,

$a = (0.3 \pm 3)\cdot 10^{-3}$ мм^2.

Тәжирийбелерде алынған нәтийжелер бойынша қәтелер шеклеринде $r_m^2=f(m)$ туўрысы координата басынан өтеди. Себеби қандай да бир параметрдиң мәнисин анықлағандағы жиберилетуғын қәте усы параметрдиң мәнисине шама менен тең ямаса усы параметрдиң мәнисинен үлкен болса, онда бул жағдайдан параметрдиң мәнисиниң нолге тең екенлигин билдиреди.

Бул эксперименттиң шараятларында a параметриниң мәниси қызығыўшылық пайда етпейди. Сонлықтан бул шаманың мәнисин есаплаў менен енди шуғылланбаймыз.

Линзаның иймеклик радиусын есаплаймыз:

$$R = b / \lambda = 594.5 / 6 = 99.1 \text{ мм.}$$

Толқын узынлығы ушын системалық қәте берилген болғанлықтан R ушын да системалық қәтени есаплаймыз. Буның ушын b шамасының системалық қәтеси ушын оның тосаттан жиберилетуғын Δb қәтесин аламыз:

$$\delta R = \left(\frac{\Delta b}{b} + \frac{\delta\lambda}{\lambda} \right) = 100{,}3 \left(\frac{0{,}05 \cdot 10^{-2}}{6{,}02 \cdot 10^{-2}} + \frac{6}{600} \right) = 1{,}84 \approx 2 \text{ мм.}$$

Ең ақырғы нәтийжени

$$P = 0.95 \text{ болғанда } R = (99 \pm 2) \text{ мм}, \quad \varepsilon \approx 3\%.$$

8-§. Интерполяция ҳәм эксперимент нәтийжелерин статистикалық қайта ислеў мәселелерин Mathematica алгебралық системасының жәрдеминде шешиў технологиялары

Компьютерлик интерполяцияның түрлери ҳәм басқышлары. Математикада интерполяция деп аналитикалық ямаса кесте түринде берилген $y = f(x)$ функциясын аргументтиң базы бир областында усы функция менен бирдей болған $y = \varphi(x)$ функциясы менен көрсетиўге айтады. Уқсаслық теориясы менен бирликлер теориясы менен бир қатарда интерполяция моделлестириўдиң, алынған эксперименталлық нәтийжелерди қайта ислеўдиң илимий тийкары болып табылады.

Биз график пенен кестениң объекттиң ямаса қубылыстың модели бола алмайтуғынлығын билемиз. Тек математикалық функция ғана үйренилип атырған физикалық объекттиң ямаса қубылыстың модели бола алады. бирақ интерполяция тек моделлестириўде ғана емес, ал экспериментти планластырыўда ҳәм оның нәтийжелерин статистикалық қайта ислеўде, қурамалы аналитикалық функцияларды әпиўайырақ функциялар менен алмастырыўда әҳмийетли орынды ийелейди.

Компьютерлик интерполяция технологияларының тийкарғы басқышлары төмендегилерден ибарат:

1). Интерполяция функциясының түрин сайлап алыў;

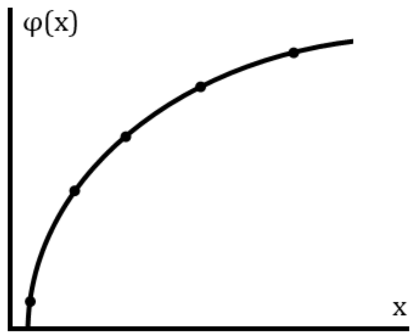
2). Интерполяция функцияларының коэффициентлерин анықлаў;

3). Сайлап алынған интерполяция функциясының ҳақыйқый қубылысларға ямаса нызамлықларға туўры келетуғынлығын анықлаў.

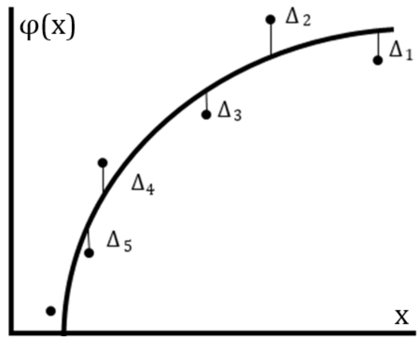
Mathematica компьютерлик алгебра системасы интерполяциялаўдың ҳәр қыйлы технологиялары менен усылларын қолланыўға мүмкиншилик береди. Олардың бир қатарын экспериментлер нәтийжелерин қайта ислеўге пайдаланыў мақсетинде қарап шығамыз.

Интерполяцияның тийкарғы еки түри бар: бириншиси түйинлердеги дәл интерполяция, ал екиншиси түйинлердеги жуўық интерполяция деп аталады.

Түйинлердеги дәл интерполяция деп нәтийжеси интерполяция түйинлеринде $y = f(x)$ функциясына дәл сәйкес келетуғын $y = \varphi(x)$ функциясына айтамыз. Бундай интерполяция 8-1 сүўретте көрсетилген.



8-1 сүўрет.
Түйинлерде дәл болған интерполяция.



8-2 сүўрет.
Түйинлерде жуўық интерполяция.

Түйинлерде дәл интерполяцияны тийкарынан аргументтиң киши диапазонында қурамалы функцияны әпиўайырақ функция менен алмастырыў зәрүрлиги бар болған жағдайларда қолланады. Бундай интерполяцияны қолланыўға мысал ретинде жоқары дәлликтеги экспериментаўлық мағлыўматлар алынған жағдайда объекттиң математикалық моделин дүзиў мәселесин шешиўди көрсетиўге болады.

Түйинлерде жуўық интерполяцияда $y = \varphi(x)$ функциясының түйинлердеги мәнислери дәслепки $y = f(x)$ функциясының түйинлердеги мәнислерине дәл сәйкес келмейтуғын жағдайлар орын алады. Бундай интерполяция басланғыш мағлыўматлардың дәл емес мәнислерин тегислиў ушын қолланылады. Математикада бундай операцияны аппроксимация деп атайды. Аппроксимацияның геометриялық мәниси 8-2 сүўретте келтирилген.

8-2 сүўретте мынадай белгилеўлер пайдаланылған: φ(x) арқалы эмперикалық функция, ноқатлар арқалы экспериментте алынған функцияның мәниси, Δ_i арқалы φ(x) функциясы менен экспериментаֆллық мәнис арасындағы айырма белгиленген.

$y = \varphi(x)$ интерполяция функциясы эмперикалық $\varphi(x)$ функциясының ҳәм эксперименталлық ямаса басқа да жоллар менен алынған басланғыш функция менен жақын болыў критерийлери тийкарында табылады. Усындай критерийлер сыпатында төмендегилерди көрсетемиз:

а) аўысыўлардың алгебралық суммасы нолге тең, яғный $\Delta_c = \sum_{i=1}^{n} y_i = 0$;

b) аўысыўлардың квадратларының шамасы минималлық мәниске ийе, яғный $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \min$;

c) аўысыўлардың орташа мәниси минималлық, яғный $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \min$.

Интерполяция мәселесин шешиўдиң компьютерлик технологиялары басланғыш ҳәм эмперикалық функциялардың түрлериниң жақынлығы менен анықланады. Бундай жағдайда қәтелерди баҳалаў усылы биринши планға шығады.

Интерполяция функциясының түрин сайлап алыў. Интерполяция функциясының түрин сайлап алыў интерполяцияның ең әҳмийетли басқышы болып табылады. Себеби сайлап алынған $\varphi(x)$ функциясы үйренилип атырған объекттиң ямаса қубылыстың математикалық моделин анықлайды.

Әмелий есаплаўларда $\varphi(x)$ функциясының түрин анықлаўда төмендегидей усыллар қолланылады:

a) графоаналитикалық;

b) сызықлы емес функцияларды сызықлы функцияларға айландырыў (линеаризация, 7-параграфқа қараңыз);

c) кестелерде келтирилген айырмаларды таллаў усылы;

d) $\varphi(x)$ функциясының түрин автомат түрде анықлап беретуғын программаларды қолланыў.

Биз төменде усы усылларды қарап өтемиз.

Графоаналитикалық усыл. $y = f(x)$ функциясы график түринде бериледи. Ал бул график белгили математикалық функциялардың графиклери менен салыстырылады ҳәм усындай салыстырыўлардың нәтийжесинде ең жақын келетуғын функция сайлап алынады.

Сызықлы емес функцияларды сызықлы функцияларға айландырыў жоллары 7-параграфта айтып өтилди.

Кестелерде келтирилген айырмаларды таллаў усылы. Бул усыл полиномиаллық интерполяциядағы көп ағзалының дәрежесин сайлап алыўға мүмкиншилик береди. Егер $y = f(x)$ функциясының n-кестелик айырмалары бирдей мәнислерге ийе болатуғын болса, онда көп ағзалының дәрежеси n шамасынан үлкен болмайды.

Бул мәселени толығырақ түсиндиремиз. 14-кестениң 1- ҳәм 2-бағаналарында интерполяция функциясы кесте түринде, ал 3-5 бағаналарында функцияның мәнислериниң айырмалары келтирилген. Бул жерде биз үшинши кестелик айырмалардың турақлы ҳәм 0,66 шамасына тең екенлигин көремиз. Бул жағдай интерполяциялық полиномның үшинши дәрежеден жоқары болмайтуғынлығын, яғный полиномды $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ түринде жазыўымыздың керек екенлигин аңғартады.

14-кесте.

x	y	1	2	3
1	1,69	1,81	1,78	0,66

2	3,50	3,59	2,44	0,66
3	7,09	6,03	3,10	0,66
4	13,12	9,13	3,76	0,66
5	22,25	12,89	4,42	0,66
6	35,14	17,31	5,08	0,66
7	52,45	22,39	5,74	0,66
8	74,84	28,13	6,40	0,66
9	102,97	34,53	7,06	0,66
10	137,50	41,59	7,72	0,66
11	179,09	49,31	8,38	0,66
12	228,40	57,69	9,04	0,66
13	286,09	66,73	9,70	0,66
14	352,82	76,43	10,36	0,66
15	429,25	86,79	11,02	0,66
16	516,04	97,81	11,68	0,66
17	613,85	109,49	12,34	0,66
18	723,34	121,83	13,00	
19	845,17	134,83		

Интерполяцияны автоматластырыўдың арнаўлы программаларын пайдаланыў. Егер басланғыш функция кесте түринде берилсе интерполяция функциясын сайлап алыўдың көп санлы арнаўлы программаларының бар екенлигин атап өтемиз. Бундай программалық қураллар ишинде SIMPLE FORMULA, TableCurve, Curve Expert сыяқлы кең тарқалған программаларды көрсетиўге болады. Олар қәтелерин көрсетиў менен ҳәр қыйлы болған мыңнан аслам функцияларды береди.

Интерполяция функциясының коэффициентлериниң мәнислерин анықлаў. $\varphi(x)$ функциясының коэффициентлериниң мәнислерин анықлаўдың жүдә көп усыллары бар. Функцияның түрин сайлап алыў усылы $\varphi(x)$ функциясының түринен (бул функция сызықлы, сызықлы емес, полиномиаллық, экспоненталық ҳәм басқа да болыўы мүмкин), интерполяцияның талап етилетуғын дәллигинен, пайдаланылып атырған универсаллық математикалық системаның мүмкиншиликлеринен ғәрезли болады.

Mathematica компьютерлик алгебра системасы интерполяция мәселелерин шешиўдиң оғада бай мүмкиншиликлерине ийе. Биз төменде сол мүмкиншиликлерди айқын мысаллар келтириў менен баянлаймыз.

Интерполяция функциясының адекватлығын (туўры келетуғынлығын) анықлаў.

Алынған шешимниң адекватлығы $\varphi(x)$ функциясының қәтелигиниң шамасы бойынша анықланады. Функцияның жақынлығы критерийи сыпатында

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2} \tag{8.1}$$

ҳәм

$$\delta = \frac{\varepsilon}{y_{\min}} \times 100\% \tag{8.2}$$

формулаларының жәрдеминде есапланатуғын абсолют (ε) ҳәм салыстырмалы (δ) орташа квадратлық қәтелер хызмет етеди. Бул формулаларда $\Delta_i = f(x_i) - \varphi(x_i)$ арқалы $f(x_i)$ басланғыш функция менен $\varphi(x_i)$ интерполяция функциясы арасындағы айырма, n арқалы $f(x)$ функциясының аргументлериниң саны, $y_{\min}$ арқалы $f(x)$ функциясының ең минималлық мәниси белгиленген. Егер биз $\delta_{jol\ qoyi'g'an}$ қәтесиниң кетиўине мүмкиншилик беретуғын болсақ, онда $\delta \le \delta_{jol\ qoyi'g'an}$ шәртиниң орынланыўы керек. Бундай жағдайда шешим адекватлық болып есапланады. Бирақ усы $\delta \le \delta_{jol\ qoyi'g'an}$ шәрти орынланған жағдайда да моделлестириўдиң нәтийжесинде алынған $y = \varphi(x)$ функциясын изертленип атырған объекттиң ямаса қубылыстың модели деп айтыўға болмайды. $y = f(x)$ функциясы жүдә жоқары дәлликте алынған жағдайда ғана моделлестириўдиң нәтийжесин объектке ямаса қубылысқа дәл сәйкес келеди деп айта аламыз.

9-§. Mathematica компьютерлик алгебра системасы орталығындағы интерполяциялаўдың технологиялары

Түйинлердеги дәл интерполяция (бул усылда алынған нәтийжелердиң интерполяцияның түйинлерде дәл дурыс мәнислерге ийе болатуғынлығын, бирақ түйинлер арасындағы интервалларда дәл дурыс мәнислерге ийе болмайтуғынлығын атап өтемиз). Mathematica орталығында бундай интерполяция еки усылдың жәрдеминде әмелге асырылады. Олардың биринширсин универсаллық усыл деп атаймыз. Ал екиншиси InterpolatingPolynomial ҳәм Inpolation универсаллық функцияларының жәрдеминде шешиледи.

Универсаллық усыл кесте ямаса матрица түринде берилген $y = f(x)$ функциясының мағлыўматлары тийкарында алынған алгебралық теңлемелер системасын шешиўди талап етеди. Бул усылдың технологиясы төмендегидей әмеллерди ислеўден турады:

Теңлемелер системасын дүзиў (интерполяция функциясын белгили деп болжаймыз).

Теңлемелер системасының шешимлерин шығарыў (буны <Shift>+-<Enter> клавышларының комбинациясын бирден басыў арқалы әмелге асырады). Мысал келтиремиз (15-кесте).

15-кесте.

x	1	2	3	4	5
y	1,8578	6,1848	20,6818	56,0768	127,125

$y = f(x)$ функциясы полином болып табылатуғын жағдай ушын түйинлерде дәл мәнислерди беретуғын интерполяция мәселесин шешиў талап етиледи.

Түйинлер саны n = 5 болғанлықтан полином

$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ түрине ийе болыўы керек. Демек бул полиномның коэффициентлерин табыў ушын

$$\begin{aligned}
&a_0 + a_1 1 + a_2 1^2 + a_3 1^3 + a_4 1^4 = 1{,}8578;\\
&a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 = 6{,}1848;\\
&a_0 + a_1 3 + a_2 3^2 + a_3 3^3 + a_4 3^4 = 20{,}6818;\\
&a_0 + a_1 4 + a_2 4^2 + a_3 4^3 + a_4 4^4 = 56{,}0768;\\
&a_0 + a_1 5 + a_2 5^2 + a_3 5^3 + a_4 5^4 = 127{,}125
\end{aligned}$$

алгебралық теңлемелер системасын дүзиўимиз керек болады. Бул теңлемелер системасын Mathematica пакети жәрдеминде шешиў ушын

$$\begin{aligned}
&Solve[\{a_0 + a_1 1 + a_2 1^2 + a_3 1^3 + a_4 1^4 \text{Љ} 1.8578, a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 \text{Љ} 6.1848,\\
&a_0 + a_1 3 + a_2 3^2 + a_3 3^3 + a_4 3^4 \text{Љ} 20.6818, a_0 + a_1 4 + a_2 4^2 + a_3 4^3 + a_4 4^4 \text{Љ} 56.0768,\\
&a_0 + a_1 5 + a_2 5^2 + a_3 5^3 + a_4 5^4 \text{Љ} 127.125\}, \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4\}]
\end{aligned}$$

түриндеги аңлатпаны жазамыз. Бул теңлемелер системасының шешимлери

$$\begin{aligned}
&a_0 \to 0.9999999999999,\\
&a_1 \to 0.35000000000003,\\
&a_2 \to 0.2299999999999,\\
&a_3 \to 0.11000000000000,\\
&a_4 \to 0.1677999999999999
\end{aligned}$$

түрине ийе (биз компьютер берген мағлыўматлардың жоқары дәлликте екенлигин көрсетиў мақсетинде үтирден кейинги 15 тей ағзаны келтирдик). Нәтийжеде интерполяциялық функция ушын алынған санлы мағлыўматларды бир қанша жуўықлаўдан кейин

$$y = 1 + 0{,}35x + 0{,}23x^2 + 0{,}11x^3 + 0{,}1678x^4$$

түриндеги аңлатпаны аламыз. Бул аңлатпа менен 15-кестеде келтирилген мағлыўматлар бойынша Mathematica пакетиниң жәрдеминде сәйкес графиклерди аламыз (8-3 сүўрет).

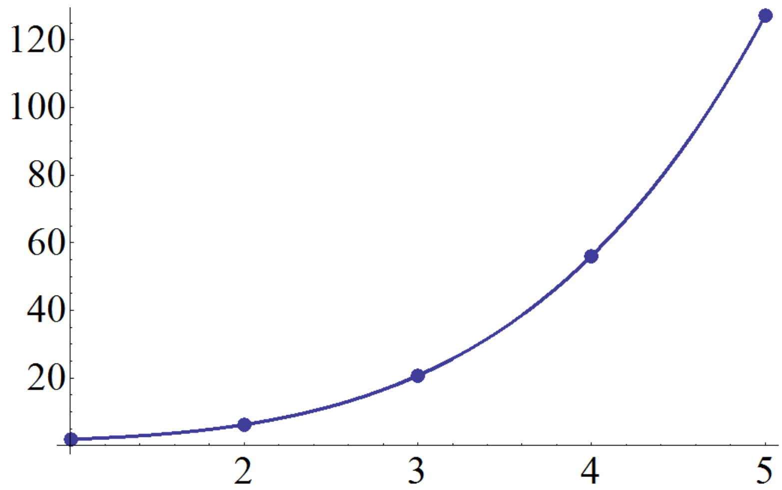
$data = \{\{1,1.8578\},\{2,6.1848\},\{3,20.6818\},\{4,56.0768\},\{5,127.125\}\};$

$f1 = ListPlot[data, PlotStyle \to PointSize[0.02], AxesStyle \to Directive[Black,30]];$

$f2 = Plot[1+0.35x+0.23x^2+0.11x^3+0.1678x^4,\{x,1,5\},$

$AxesStyle \to Directive[Black,15], PlotStyle \to Thickness[0.005]];$

$Show[f1, f2, ImageSize \to 600]$



8-3 сүўрет. 15-кестеде келтирилген санлы мағлыўматлар тийкарында түйинлерде дәл сәйкес келетуғын интерполяциялаўдың нәтийжесинде алынған график.

Түйинлерде дәл нәтийжелерди беретуғын интерполяцияны сызықлы алгебралық теңлемелерди шешиў ушын арналған матрицалық усыл менен де шешиў мүмкин. Матрицалық усыл менен шешиў технологиясын студентлердиң өз бетинше үйрениўи ушын қалдырамыз.

Интерполяция мәселесиниң ҳақыйқатлығын тексерип көриў. Шешимниң дурыс екенлигин тексерип көриў ушын алынған формуланың табуляциясын орынлаймыз ҳәм нәтийжелерди дәслепки мағлыўматлар менен салыстырамыз. Mathematica системасында табуляцияның

$$\text{Table}[f[x],\{x, x_{\text{basl}}, x_{\text{qi'rg'}i'}, h\}]$$

командасының жәрдеминде әмелге асыралатуғынлығын нәзерде тутамыз. Бул аңлатпада $f[x]$ арқалы табуляцияланатуғын функция, x арқалы сол функциясының аргументи, $x_{\text{basl}}, x_{\text{qi'rg'}i'}$ шамалары арқалы аргументтиң дәслепки ҳәм ең ақырғы мәнислерин, h арқалы кестениң адымы белгиленген (егер h = 1 болса оны жазыўдың кереги жоқ).

Table функциясы вектор-қатар түринде жуўап береди.

Табуляцияладың басқа функциясы былайынша жазылады:

$$Do[\Pr\mathrm{int}[f[x]],\{x,x_{\mathrm{basl}},x_{\mathrm{qi'rg'}i'},h\}]$$

Бул функция шешимди вектор-бағана түринде береди.

Биз интерполяция мәселесин шешкенде алынған нәтийжениң

$$y=1+0{,}35x+0{,}23x^2+0{,}11x^3+0{,}1678x^4$$

түрине ийе екенлигин еске алып бул функцияны табуляциялаймыз. Табуляциялаў ушын еки усылда да пайдаланамыз. Оның ушын Mathematica системасы ушын

$$y[x\_]=1+0.35x+0.23x^2+0.102x^3+0.1678x^4;$$
$$Table[y[x],\{x,1,5\}]$$
$$Do[Print[y[x]],\{x,1,5\}]$$

түриндеги аңлатпаларды жазамыз. Компьютер төмендегидей нәтийжелерди береди:

Программаның екинши қатарының нәтийжеси (вектор-қатар)

{1.8498, 6.1208, 20.4658, 55.5648, 126.125}

Программаның үшинши қатарының нәтийжеси (вектор-бағана)

1.8498
6.1208
20.4658
55.5648
126.125

Алынған нәтийжелерди дәслепки мағлыўматлар менен салыстырып интерполяция мәселесиниң шешиминиң дурыс екенлигине исенемиз.

Биз жоқарыда көрген мысалда теңлемелер саны менен белгисизлердиң саны бирдей. Ал әмелде интерполяция мәселесин шешкенде пүткиллей басқа ситуацияға ийе боламыз. Дерлик барлық ўақытта да дәслепки мағлыўматлардан ибарат кестениң өлшемлери алгебралық теңлемелердиң санынан (яғный интерполяция түйинлериниң санынан) әдеўир үлкен, демек интерполяцияның дәрежеси кестениң өлшеминен киши болады.

Бундай жағдайда интерполяцияның түйинлериниң санын дәслепки мағлыўматлардың барлығынан сайлап алыўға туўры келеди. Әдетте бундай жағдай интерполяцияда қәтелердиң пайда болыўына алып келеди.

Мысал келтиремиз. Кублық структураға ийе унталған $Sm_{0,8}Gd_{0,2}$ кристаллары ушын рентгенографиялық жоллар менен алынған кристаллық пәнжере турақлысы a ның температурадан ғәрезлиги 16-кестеде берилген.

16-кесте. $Sm_{0,8}Gd_{0,2}$ кристаллары ушын кристаллық пәнжере турақлысы a ның температурадан ғәрезлиги

130	140	150	160	170	180	190	200	210	220
5,712	5,705	5,701	5,6975	5,695	5,6935	5,6915	5,692	5,6925	5,6939

16-кестениң даўамы

230	240	250	260	270	280	290
5,6955	5,6972	5,6992	5,71	5,728	5,745	5,762

Mathematica системасындағы Fit операторының жәрдеминде өткерилген алдын-ала тексерип көриў жоқарыдағы 16-кестеде келтирилген мағлыўматлардың 3-дәрежели полиномға сәйкес келетуғынлығын көрсетти. Буның ушын ҳәр қыйлы дәрежеге ийе полиномға сәйкес келиў мәселеси шешиледи ҳәм төмендегидей нәтийжелер алынады:

Екинши дәрежели полином ушын

$$5.79481 - 0.000965x + 0.00000229x^2$$

Үшинши дәрежели полином ушын

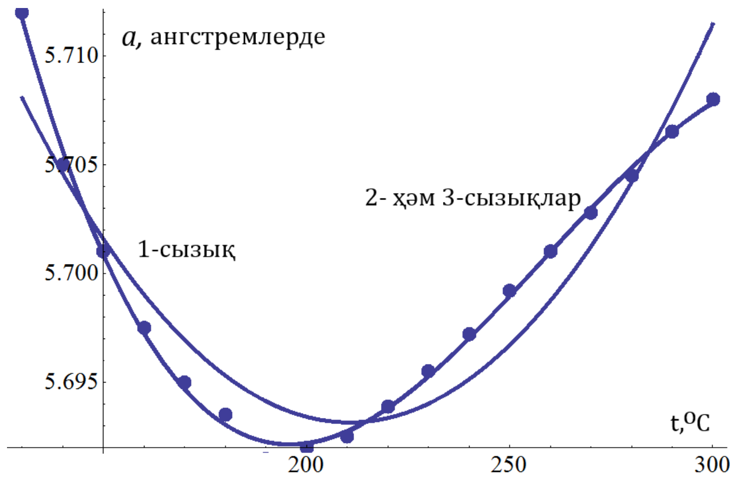
$$5.95365 - 0.0033536x + 0.0000138x^2 - 1.78448 \times 10^{-8} x^3$$

Төртинши дәрежели полином ушын

$$5.96542 - 0.00359x + 0.000015545x^2 - 2.33918 \times 10^{-8}x^3 + 6.4499 \times 10^{-12}x^4$$

функциялары алынады. Әлбетте жүдә киши екенлигине байланыслы 10^{-8} ҳәм 10^{-12} көбейтиўшилери бар коэффициентлерди есапқа алмаўымыз керек. Сонлықтан интерполяциялық функция ретинде тек квадрат функцияны аламыз.

Алынған нәтийжелер 8-4 сүўретте келтирилген.



8-4 сүўрет.
16-кестеде келтирилген санлы мағлыўматларды интерполяциялаў нәтийжелери. 1-сызық екинши дәрежели полиномға, ал 2- ҳәм 3-сызықлар үшинши ҳәм төртинши дәрежели полиномларға сәйкес келеди.

8-4 сүўретте барлық ноқатлардың интерполяция иймеклигиниң бойынша жатпайтуғынлығы көринип тур. Бирақ соның менен бирге интерполяцияның қәтесиниң киши екенлигин де аңғарыўымызға болады. Енди сол қәтениң мәнислерин анықлаўымыз керек болады. Буның ушын абсолют ҳәм орташа квадратлық қәтелер ушын жазылған (8.1)- ҳәм (8.2)-формулалардан пайдаланамыз ҳәм оны Mathematica орталығында төмендегидей жазыўлардың жәрдеминде жүзеге келтиремиз:

Бизиң дәслепки санларымыз (яғный кублық кристалдың кристаллық пәнжересиниң турақлысы)

$v1=\{5.712,\ 5.705, 5.701, 5.6975, 5.695, 5.6935, 5.6915,$
$5.692, 5.6925, 5.6939, 5.6955, 5.6972, 5.6992, 5.701, 5.7028, 5.7045, 5.7065, 5.708\};$

Интерполяциялық функцияға аргументтиң сәйкес мәнислерин бериў арқалы алынған мәнислер:

$$v2=\{5.71169,5.70566,5.70089,5.697273,5.69470,5.69307,$$
$$5.69227,5.692198,5.69274,5.693798,5.695258,5.697015,$$
$$5.69896,5.70099,5.702996,5.704869,5.70650,5.70779\}$$

Олардың айырмасы ($z=v1-v2$):

$\{0.000303,\ -0.000663,\ 0.000108,\ 0.000226,\ 0.000298,\ 0.000429,\ -0.000771,$
$-0.000197,\ -0.000242,\ 0.000101,\ 0.000241, 0.\ 000184,\ 0.000237,\ 0.000008,$
$-0.000196,\ -0.000369,\ -0.000003,\ 0.000207\}$

Айырманың квадраты ($z\,^\wedge 2$):

$$\{9.195599\times10^{-8}, 4.401758\times10^{-7}, 1.18150\times10^{-8}, 5.14587\times10^{-8}, 8.88788\times10^{-8},$$
$$1.846219\times10^{-7}, 5.95000\times10^{-7}, 3.9146225\times10^{-8}, 5.88830\times10^{-8},$$
$$1.027452\times10^{-8}, 5.824949\times10^{-8}, 3.401753\times10^{-8}, 5\ .653430\times10^{-8}, 7.192749\times10^{-11},$$
$$3.85290\times10^{-8}, 1.36455\times10^{-7}, 1.37904\times10^{-11}, 4.322555\times10^{-8}\}$$

Бул шамалардың суммасы $1{,}93931\cdot10^{-6}$ шамасына тең (оны Plus[y] командасының жәрдеминде әмелге асырамыз). Бул шаманы өлшеўлер саны 18 ге бөлемиз ҳәм оннан квадрат түбир аламыз (бул операция $Sqrt[\%/18]$ командасының жәрдеминде әмелге асырылады). Нәтийже 0,000328237 шамасына тең болып шығады. Демек абсолют қәте усы ε = 0,000328237 шамасына тең деген сөз. Ал орташа квадратлық қәте [яғный (8.2)-формула] $\delta=\dfrac{\varepsilon}{y_{\min}}\cdot100\%=\dfrac{0{,}000328}{5{,}6915}\cdot100\%=0{,}005767\%$ шамасына тең болып шығады. Бул оғада киши шама ҳәзирги заман кристаллар рентгенографиясындағы өлшеўлердиң қандай үлкен дәлликте өткерилетуғынлығын айқын көрсетеди.

Енди екинши мысалды келтиремиз. Улыўма физиканың электр ҳәм магнетизм лабораториясында тәбияты белгисиз болған қатты денениң қарсылығының температураға байланыслы өзгериси изертленди ҳәм төмендегидей нәтийжелер алынды:

17-кесте.

x	14	19	24	29	34	39	44	49
y	1620	1320	1220	1005	920	820	730	650

Даўамы:

54	59	64	69	74	79	84
580	525	480	440	390	350	320

Бул мағлыўматларды Mathematica системасына киргизиўимиз ушын

$data=\{\{14,1620\},\{19,1320\},\{24,1220\},\{29,1005\},\{34,920\},\{39,820\},\{44,730\},\{49,650\},\{54,580\},\{59,525\},\{64,480\},\{69,440\},\{74,390\},\{79,350\},\{84,320\}\};$

түриндеги аңлатпаны жазамыз (фигуралық қаўсырмалардың ишиндеги биринши сан Цельсий шкаласындағы температураны, ал екинши сан омлардағы қарсылықтың мәнисин билдиреди). Бул нәтийжелерде температураның артыўы менен қарсылықтың кемейетуғынлығы көринип тур.

Mathematica пакетиниң жәрдеминде интерполяция қарсылық пенен температура арасында

$$\frac{7189.2054}{x^{0.55}}-3.81259x$$

түриндеги байланыстың бар екенлигин көрсетти. Бул шамалар тийкарында қарсылықтың температураға ғәрезлигиниң графиги сызылды (8-5 сүўрет).

Биз қәтелерди анықлаў мақсетинде жоқарыда келтирилген процедураларды қайталаймыз.

$v1=\{1620,\ 1320,\ 1220,\ 1005,\ 920,\ 820,\ 730,\ 650,\ 580,\ 525,\ 480,\ 440,\ 390,\ 350,\ 320\};$

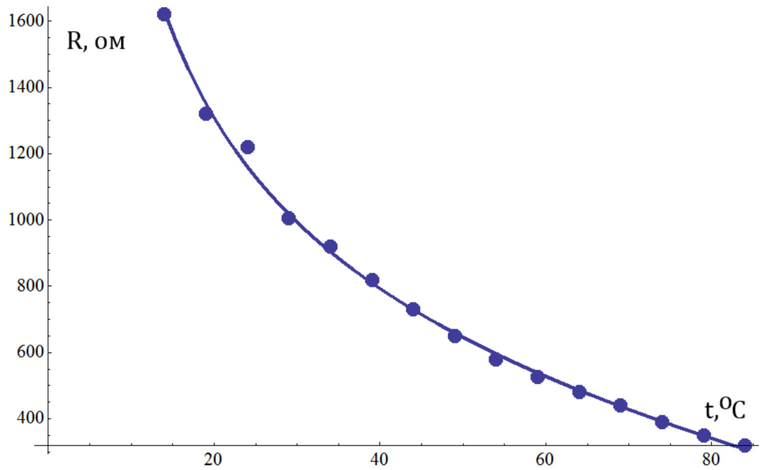
$v2=\{1630.50116,\ 1351.09009,\ 1160.38361,\ 1017.57226,\ 904.00758,\ 809.81611,\ 729.22427,\ 658.60408,\ 595.54775,\ 538.38706,\ 485.92534,\ 437.27922,\ 391.78067,\ 348.91403,\ 308.2742\};$

$z = v1 - v2 = \{-10.50116, -31.09008, 59.61638, -12.57226, 15.99242, 10.18389, 0.77572, -8.60407, -15.54774, -13.38706, -5.92534, 2.72077, -1.78066, 1.08596, 11.72579\}$

Буннан кейин z шамасының квадраты, квадратлардың суммасы табылады.

Абсолют қәтелик $z2 = Sqrt[5828.45/15] = 19{,}172$, ал салыстырмалы қәтелик 6,16 % шамасына тең. Бул жағдайлар физикалық практикумдағы алынған шамалардың қәтесиниң үлкен екенлигин айқын түрде көрсетеди.

8-5 сүўрет. Қарсылықтың температурадан ғәрезлиги. Ноқатлар экспериментте алынған нәтийжелер, тутас сызық интерполяцияның нәтийжеси.



InterpolatingPolynomial функциясы. Mathematica системасында полиномлар менен интерполяция InterpolatingPolynomial функциясының жәрдеминде аңсат әмелге асырылады. Бул функция

$$InterpolatingPolynomial[y, x]$$

түрине ийе. Бул функцияда y арқалы дәслепки мағлыўматлардың матрицасы, ал x арқалы y функциясының аргументи белгиленген. Бирден мәселелер шешиўге өтемиз ҳәм мысал ретинде 18-кестеде келтирилген мағлыўматларға итибар беремиз.

18-кесте.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	1	8	27	64	125	216	343

Бул кестеде келтирилген мағлыўматларды Mathematica системасына киргизиў ушын

$$y=\{\{1,1\},\{2,8\},\{3,27\},\{4,64\},\{5,125\},\{6,216\},\{7,343\}\}$$

түриндеги аңлатпаны жазамыз. Буннан кейин

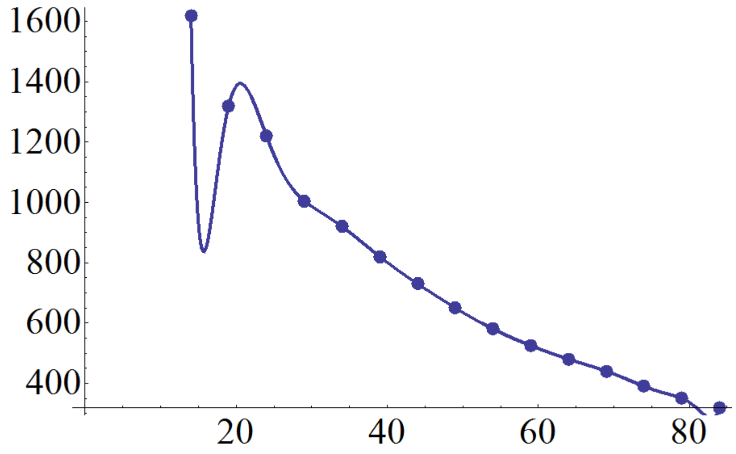
$$InterpolatingPolynomial[y,x]$$

функциясын киргиземиз. Шешимди алыў ушын енди тек <Shift> + <Enter> клавишлерин басыў жеткиликли ҳәм экранда $1+(-1+x)(7+(-2+x)(3+x))$ жазыўына ийе боламыз. Ал әпиўайыластырылған нәтийжени алыў ушын $InterpolatingPolynomial[y,x]$ жазыўынан кейин $Simplify[\%]$ қатарын қосыўымыз керек. Нәтийжеде ең ақырғы x^3 шешимин аламыз.

Енди тап усындай жоллар менен 17-кестеде келтирилген мағлыўматларды интерполяциялаймыз. Оның ушын

$$y=\{\{14,1620\},\{19,1320\},\{24,1220\},\{29,1005\},\{34,920\},\{39,820\},$$
$$\{44,730\},\{49,650\},\{54,580\},\{59,525\},\{64,480\},\{69,440\},\{74,390\},$$
$$\{79,350\},\{84,320\}\};$$
$$InterpolatingPolynomial[y,x];$$
$$Plot[\%,\{x,14,84\}]$$

түриндеги аңлатпаны жазыўымыз жеткиликли ҳәм компьютер 8-6 сүўретте келтирилгендей графикти береди. Бул графиктиң 8-5 сүўретте келтирилген графикке усамайтуғынлығы айқын түрде көринип тур. Усының нәтийжесинде эксперименталлық мағлыўматларды интерполяциялаўда InterpolatingPolynomial функциясын абайлап пайдаланыўдың керек екенлигин атап өтемиз.



8-6 сүўрет.
17-кестеде келтирилген мағлыўматларды Interpolating- Polynomial функциясының жәрдеминде интерполяциялаўдың нәтийжеси.

Түйинлерде жуўық нәтийже беретуғын интерполяция. Түйинлерде жуўық нәтийже беретуғын интерполяция (аппроксимация) орташа квадратлық қәтениң минимумы критерийи, яғный ең киши квадратлар усылы бойынша әмелге асырылады. Mathematica системасында бул интерполяция Fit функциясының жәрдеминде әмелге асырылады. Бул функция

Fit[data, {X}, x]

түрине ийе. Бул аңлатпада data арқалы дәслепки мағлыўматлар матрицасы, X арқалы базислик өзгериўшилер дизими, x арқалы функцияның аргументи белгиленген. Айқын мысал ретинде 18-кестеде келтирилген мағлыўматларды интерполяциялаўды келтиремиз.

Биз изленип атырған функцияны 4-дәрежели полином, яғный $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$ түрине ийе деп болжаймыз ҳәм сонлықтан Mathematica тилинде

$$data = \{\{1,1\},\{2,8\},\{3,27\},\{4,64\},\{5,125\},\{6,216\},\{7,343\}\};$$
$$Fit[data,\{1,x,x\verb|^|2,x\verb|^|3,x\verb|^|4\},x]$$

туриндеги аңлатпаны жазамыз. Компьютер бизге

$$3.387545\times10^{-13} - 4.828166\times10^{-13}x + 2.109351\times10^{-13}x^2 + 1.0x^3 + 2.029032\times10^{-15}x^4$$

нәтийжесин береди. Бул аңлатпадағы a_0 ҳәм басқа да коэффициентлердиң x^3 шамасының алдында турған коэффиценттен (яғный 1 ден) жүдә киши екенлигин есапқа алып излеп атырған функциямыздың $y = x^3$ түриндеги функция екенлигине көз жеткеремиз.

Биз енди 18-кестеде келтирилген полиномды үшинши тәртипке ийе, яғный $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ түрине ийе деп болжаймыз. Бундай жағдайда мәселени шешиў ушын

$$data = \{\{1,1\},\{2,8\},\{3,27\},\{4,64\},\{5,125\},\{6,216\},\{7,343\}\};$$
$$Fit[data,\{1,x,x\,\hat{}\,2,x\,\hat{}\,3\},x]$$

түриндеги аңлатпаны жазыўымыз керек. Компьютер

$$-1.255589\times10^{-13} + 7.446425\times10^{-14}x - 1.870361\times10^{-14}x^2 + 1.0x^3$$

нәтийжесин береди. Ал алынған аңлатпадағы киши екенлигин есапқа алып $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ деп есапласақ, онда

$$1.0000000000000002x^3$$

аңлатпасын аламыз.

Демек ең киши квадратлар усылын өз ишине қамтыйтуғын *Fit* функциясы менен эксперимент нәтийжелерин интерполяциялаў жоқары дәлликте жүргизиледи екен.

Пайдаланылған әдебиятлар дизими

Э.Уиттекер, Г.Робинсон. Математическая обработка результатов наблюдений. Государственное технико-теоретичесеой издательство. Москва-Ленинград. 1933. 364 с.

1. Ferdinand F. Cap. Mathematical Methods in Physics and Engineering with Mathematica. A CRC Press Company Boca Raton London New York Washington, D.C. 2003. 339 p.

2. Stephen Wolfram. Mathematica Book. 5th ed. Wolfram Media. 2003. 1301 p.

3. Gerd Baumann. Mathematica in Teoretical Physics. Electrodinamics, Quantum Mechanics, General Relativity and Fractals. Second Edition. Springer-Verlag. 1993. P. 544-942.

4. James M.Feagin. Quantum Methods with Mathematica. Springer-Verlag. 1993. 482 p.

5. Джон Уокенбах. Mirosoft Excel 2010. Библия пользователя. Издательство "Диалектика". Москва. 2011. 912 с. Д.М.Златопольский. 1700 заданий по Microsoft®Excel. Издательство "БХВ-Петербург". Санкт-Петербург. 2003. 544 с.

6. Конрад Карлберг. Бизнес-анализ с использованием Excel. Решение практических бизнес-задач. Издательство "Вильямс". Москва. 2012. 576 с.

7. Билл Джелен, Майкл Александер. Сводные таблицы в Microsoft Excel 2010. Издательство "Вильямс". 2011. 464 с.

8. Дж.Сквайрс. Практическая физика. Издательство "Мир". Москва. 1971. 246 с.

9. Н.С.Кравченко, О.Г.Ревинская. Методы обработки результатов измерений и оценки погрешностей в учебном лабораторном практикуме. Издательство Томского политехнического университета. 2011. 88 с.

10. В.И.Шутов, В.Г.Сухов, Д.В.Подлесный. Экспериментальная физика. Издательство ФИЗМАТЛИТ. Москва. 2005. 184 с.

11. З.И.Авдусь, М.М.Архангельский, Н.И.Кошкин, О.Д.Шебалин, В.Ф.Яковлев. Практикум по общей физике. Под редакцией профессора В.Ф.Ноздрева. Издательство "Просвещение". Москва. 1971. 312 с.

12. А.В.Кортнев, Ю.Б.Рублев, А.Н.Куценко. Практикум по физике. Издательство "Высшая школа". Москва. 1965. 568 с.

13. А.Н.Зайдель. Элементарные оценки ошибок измерений. Издательство "Наука". Ленинградское отделение. Ленинград. 1968. 98 с.

14. О.Н.Касаандрова, В.В.Лебедев. Обработка результатов наблюдений. Издательство "Наука". Москва. 1970. 104 с.

15. М.А.Никитин, С.В.Анферова. Физический практикум по механике. Издательство Калининградского государственного университета. Калининград. 2001.102 с.

16. В.Г.Сидякин, Ю.М.Алтайский. Техника физического экспериментa. Издательство Киевского университета. Киев. 1965. 192 с.

17. М.А.Фаддеев. Элементарная обработка результатов эксперимента (учебное пособие). Издательство Нижегородского государственного университети имени Н.И.Лобачевского. Нижний Новогород. 2010. 122 с.

18. В.А.Яворский. Планирование научного эксперимента и обработка экспериментальных данных. Издательство Московского физико-технического института (государственный университет). Долгопрудный. 2006. 24 с.

19. П.В.Новицкий, И.А.Зограф. Оценка погрешностей результатов измерений. Энергоатомиздат. Ленинград. 1991. 304 с.

20. Ю.В.Линник. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. Государственное издательство физико-математической литературы. Москва. 1958. 334 с.

21. Л.Н.Третьяк. Обработка результатов наблюдений. Издательство Оренбургского государственного университета. Оренбург. 2004. 78 с.

22. Г.М.Серопян, И.С. Позыгун. Обработка результатов измерения физических величин: Лабораторный практикум (для студентов физического факультета). Издательство Омского государственного университета. Омск. 2004. 20 с.

23. Он-лайн расчет линейной регрессии методом наименьших квадратов.http://www.chem-astu.ru/science/lsq/

24. http://reference.wolfram.com/mathematica/ref/Fit.html