1916

А.Эйнштейн

УЛЫЎМАЛЫҚ САЛЫСТЫРМАЛЫҚ ТЕОРИЯСЫНЫҢ ТИЙКАРЛАРЫ[*]

Қарақалпақ тилине аўдарған Б.Абдикамалов

Бул жерде баянланатуғын теория ҳәзирги ўақытлары бәршеге мәлим болған «салыстырмалық теория» сының ең радикал түрдеги улыўмаластырыўы болып табылады. Сол «салыстырмалық теория» сын бул жаңа теориядан айырыў ушын «Арнаўлы салыстырмалық теориясы» деп атайман ҳәм оқыўшы оның менен таныс деп болжайман. Салыстырмалық теориясын улыўмаластырыў математик Минковскийдиң жумысларына байланыслы әдеўир аңсатласты. Ол биринши болып арнаўлы салыстырмалық теориясындағы кеңисликлик координаталар менен ўақытлық координатаның формал түрдеги тең ҳуқықлығын ашып көрсетти ҳәм бул тең ҳуқықлылықты теорияны дүзиў ушын пайдаланды. Улыўмалық салыстырмалық теориясы ушын зәрүрли болған жәрдемши математикалық аппарат «абсолют дифференциал есаплаў» формасында Гаусс, Риман ҳәм Кристоффелдиң Евклидлик емес кеңисликлерге бағышланған жумысларында дөретилди. Риччи ҳәм Леви-Чивита тәрепинен системаға түсирилген бул есаплаўлар теориялық физиканың мәселелерин шешиў ушын пайдаланыла баслады. Бул жумыстың Б бөлиминде бизге зәрүрли болған, бирақ физиклерге белгисиз жәрдемши математикалық аппарат мүмкин болғанынша әпиўайы ҳәм түсиникли усыл менен баянланған. Сонлықтан бул жумысты түсиниў ушын математикалық әдебиятты үйрениўдиң зәрүрлиги болмайды. Соның менен бирге мен бул жерде өзимниң достым, математик М.Гроссманға алғыс айтаман. Ол менен арнаўлы математикалық аппаратты үйрениўден қутқарыў менен бир қатар гравитациялық майданның теңлемесин келтирип шығарыўда қоллап-қуўатлады.

А. Салыстырмалық постулаты ҳаққындағы принципиаллық көз-караслар

§ 1. Арнаўлы салыстырмалық теориясы бойынша ескертиўлер

Арнаўлы салыстырмалық тоериясының тийкарында Галилей-Ньютон механикасын да қанаатландыратуғын мынадай постулат жатады. Егер К координаталар системасы усы системадағы физикалық нызамлар өзиниң ең әпиўайы формасында дурыс болатуғындай етип сайлап алынған болса, онда усы К системасына салыстырғанда туўры сызықлы ҳәм тең өлшеўли қозғалатуғын К’ системасында да дурыс болады. Биз бул постулатты «арнаўлы салыстырмалық принципи» деп атаймыз. «Арнаўлы» сөзи менен К’системасының К системасына салыстырғанда тең өлшеўли ҳәм туўры сызықлы қозғалатуғынлығы атап өтилген. Соның менен бирге К’ ҳәм К системаларының бирдей баҳада екенлиги К’ системасының К системасына салыстырғандағы тең өлшеўли емес қозғалысына тийисли емес.

Солай етип арнаўлы салыстырмалық теориясы классикалық механикадан тек салыстырмалық постулаты менен емес, ал тийкарынан жақтылықтың бослықтағы тезлигиниң турақлылық постулаты менен айрылады. Буны арнаўлы салыстырмалық принципи менен байланыстырғанда бир ўақытлылықтың салыстырмалылығы, Лоренц түрлендириўлери ҳәм қозғалыўшы қатты денелер менен саатлардың қәсийетлерине бай-

---

[*] Die Grundlage der altgemetnen Rslattvitatstneone. Aim. Pbys., 1916, 49, 769—822, (Бул жумыс германияда бир неше рет жарық көрди; 1929-жылы 5-рет басылды (Barth Verlag). Орысша аўдармасы «Принцип относительности» топламында басылды (ГТТИ, 1935-жыл)) (рус тилине аўдармасының редакторының ескертиўи).

ланыслы болған нызамлар келип шығады.

Кеңислик пенен ўақыт арнаўлы салыстырмалық теориясының тәсиринде терең өзгерислерге ушыраған болса да, бир әҳмийетли пункт өзгериссиз қалды. Арнаўлы салыстырмалық теориясы бойынша геометрияның нәтийжелери (тынышлықтағы) қатты денелердиң бир бирине салыстырғандағы жағдайларына тийисли болған нызамлар әҳмийетине, ал кинематиканың улыўмалық қағыйдалары өлшеў әсбаплары менен саатлардың қәсийелерин тәриплеўши назымлар әҳмийетине ийе. Усындай жағдайларда тынышлықтағы (қатты) дениниң сайлап алынған еки материаллық ноқатына усы дениниң ийелеп турған орнынан ҳәм ориентациясынан, соның менен бирге ўақыттан ғәрезсиз болған толық анықланған узынлықтағы базы бир кесинди сәйкес келеди. Базы бир координаталар системасына салыстырғанда тынышлықта турған сааттың еки көрсетиўине усы орыннан ҳәм ўақыттан ғәрезсиз барлық ўақытта да белгили бир шамадағы ўақыт интервалы сәйкес келеди. Биз тез арада улыўмалық салыстырмалық теориясының кеңислик пенен ўақытты усындай етип әпиўайы физикалық таллаўды қуўатламайтуғынлығын көремиз.

§ 2. Салыстырмалық постулатын кеңейтиўдиң салдарынан келип шығатуғын базы бир тийкарлар ҳаққында

Классикалық механикаға ҳәм мәлим бир дәрежеде арнаўлы салыстырмалық теориясына биринши рет Э.Мах тәрепинен атап өтилген бир кемшилик тән. Буны биз төмендеги мысалда анықлаймыз. Мейли бирдей үлкенликтеги ҳәм бирдей қурамдағы еки суйық дене кеңисликте бир биринен сондай қашықлықта турған болсын (ҳәм барлық басқа да массалардан), бундай қашықлықта тек *бир дениниң ҳәр қыйлы бөлимлери арасындағы гравитациялық күшлер ғана* есапқа алынатуғын болсын. Мейли сол еки дене арасындағы қашықлық өзгериссиз қалсын. Сондай-ақ бир дениниң ҳәр қыйлы бөлимлери бир бири менен араласпайтуғын да болсын. Енди бақлаўшы алайық ҳәм бир суйық денеге салыстырғанда тыныш турған бул бақлаўшыға салыстырғанда екинши суйық дене усы еки денени тутастыратуғын сызық дөгерегинде турақлы мүйешлик тезлик пенен айланатуғын болсын (бул салыстырмалы қозғалысты барлық ўақытта да табыў мүмкин). Енди еки дениниң де бетлери (S_1 ҳәм S_2) усы денелерге салыстырғанда тыныш турған масштабларға салыстырғанда өлшенген болсын; мейли сол өлшеўлер нәтийжесинде S_1 бети шар, ал S_2 бети айланыў эллипсоиды болып шықсын.

Енди сораў пайда болады: қандай себеплерге байланыслы S_1 ҳәм S_2 бетлери ҳәр қыйлы болып шықты. Егер себеп сыпатында көрсетилген жағдай *тәжирийбеде бақланатуғын факт* болып табылатуғын болса, онда бул сораўға жуўап теориялық-билиў көз-қарасынан қанаатландырарлық деп табылыўы мүмкин[1]. Себеби себеплилик принципи ақырғы есапта себеп пенен нәтийже тек бақланатуғын фактлер болып шығатуғын жағдайларда ғана дүньядағы қубылыслар ҳаққындағы талқылаў мәнисине ийе болады.

Ньютон механикасы бул сораўға қанаатландырарлық жуўап бере алмайды. Ол былай дейди. Механиканың нызамлары S_1 денеси тынышлықта турған R_1 кеңислигинде ғана орынланады, ал S_2 денеси тынышлықта турған R_2 кеңислиги ушын орынланбайды. Бирақ усы жағдайлар ушын қолланылатуғын R_1 Галилей кеңислиги ушын (ҳәм оған салыстырғандағы қозғалыс) бақланатуғын факт емес, ал *жалған* себеп болып табылады. Солай етип биз қарап атырған жағдайда Ньютон механикасының себеплилик принципиниң табапларын туўрыдан-туўры емес, ал тек көринерликтей етип қанаатландыратуғынлығы түсиникли болады (S_1 ҳәм S_2 бетлериниң ҳәр қыйлылығы ушын жуўапкершиликти жалған себепке - R_1 кеңислигине аўдарады).

Жоқарыда қойылған сораўға қанаатландырарлық жуўап тек мынадай болады:

S_1 ҳәм S_2 денелеринен туратуғын физикалық система усы S_1 ҳәм S_2 денелериниң ҳәр қыйлы болыў себебин анықлаў мүмкиншилигин бере алмайды. Демек себеп усы система-

---

[1] Басқа тәжирийбелерге сәйкес келмеген жағдайларда теориялық-билиў көз-қарасынан қанаатландырарлық деп табылған жуўап әлбетте физикалық жақтан дурыс емес болып табылады.

дан сыртта жайласқан болады. Буннан S_1 ҳәм S_2 денелериниң формаларын анықлайтуғын қозғалыстың улыўмалық нызамларының усы S_1 ҳәм S_2 денелериниң механикалық қәсийетелериниң биз қарап атырған системаға қоспаған алыстағы массаларға белгили бир дәрежеде байланыслы болатуғынлығы келип шығады. Бул алыстағы массалар (ҳәм олардың биз қарап атырған денелерге салыстырғандағы салыстырмалы қозғалысы) усындай жағдайларда S_1 ҳәм S_2 денелериниң ҳәр қыйлы минез-қулқының принципиаллық жақтан бақланатуғын себеби сыпатында қаралыўы тийис және олар R_1 жалған шамасының орнына келеди. Егер биз көрсетилген теориялық-билиў кемшилигин сапластырғымыз келсе, онда бир бирине салыстырғанда қәлеген түрдеги қозғалыстағы ойымызға сәйкес келиўши R_1, R_2, R_3 ҳәм басқа да кеңисликлердиң ҳеш кайсысына да артықмашлықтың берилмеўи керек. Физиканың нызамлары бир бирине салыстырғанда ықтыярлы түрде қозғалыўшы координаталар системасы ушын дурыс болатуғындай етип дөретилиўи тийис. Тап усындай жоллар менен биз салыстырмалық принципин кеңейтиўге келемиз.

Бул әҳмийетли теориялық-билиў аргументинен басқа салыстырмалық принципин кеңейтиў зәрүрлигин және бир жақсы белгили болған физикалық факт көрсетеди. Мейли K координаталар системасы Галилей координаталар системасы болсын, яғный усы координаталар системасына салыстырғанда (ең keминде қарап атырылған төрт өлшемли областта) басқа массаларға салыстырғанда жеткиликли дәрежеде қашықлаған базы бир масса туўры сызықлы ҳәм тең өлшеўли қозғалатуғын болсын. Мейли K’ координаталар системасы K координаталар системасына салыстырғанда тең өлшеўли тезлениў менен қозғалсын. Бундай жағдайда басқа массалардан жеткиликли түрде изоляцияланған масса K’ системасына салыстырғанда тезлениў менен қозғалады. Қала берсе тезлениў де, бул тезлениўдиң бағыты да усы массаның химиялық қурамынан ҳәм физикалық ҳалынан ғәрезли емес.

Бул жағдайда K’ координаталар системасына салыстырғанда тынышлықта турған бақлаўшы «ҳақыйқатында» да тезлениўши системада турман деп жуўмақ шығара ала ма? Бул сораўға терис жуўап бериледи. Себеби K’ координаталар системасына салыстырғанда еркин қозғалыўшы массаның жаңа ғана көрсетилген қәсийети мынадай тәртипте де жақсы түсиндириле алады. K’ координаталар системасы тезлениўге ийе емес, бирақ қарап атырылған кеңислик-ўақытлық областта гравитация майданы бар, ал бул гравитация майданы K’ есаплаў системасына салыстырғанда денелердиң тезлениўши қозғалысын тәмийинлейди.

Түсиндириўдиң тап усындай түри мынаған байланыслы келип шығады: тәжирийбелерден барлық денелерге бирдей тезлениў бериў қәсийетине ийе күш майданының (атап айтқанда гравитация майданының) бар екенлиги белгили[2]. K’ координаталар системасына салыстырғандағы денелердиң механикалық қәсийетлери бизлер «тынышлықтағы» ямаса «нызамлы» деп қараўға үйренген есаплаў системаларына қарата да тәжирийбелерде бирдей болып шығады. Сонлықтан физикалық көз-караслар бойынша K ҳәм K’ системаларының екеўин де бирдей ҳуқық пенен «тынышлықтағы» деп қараў тәбийий болып табылады. Басқа сөз бенен айтқанда еки система да координата системалары сыпатында процесслерди физикалық тәриплеў ушын бирдей ҳуқыққа ийе.

Усындай көз-караслардан улыўмалық салыстырмалық теориясын дөретиў тартылыс теориясына да алып келеди. Себеби гравитациялық майданды координаталар системасын эпиўайы өзгертиў жолы менен «пайда етиў» мүмкин. Буннан кейин бослықтағы жақтылықтың тезлигиниң турақлылығы принципиниң өзгертилиўиниң керек екенлиги дәрҳәл көзге түседи. Өйткени егер жақтылық K есаплаў системасына салыстырғанда туўры сызықлы ҳәм турақлы тезлик пенен тарқалатуғын болса, онда K’ есаплаў системасына салыстырғанда нурдың траекториясының иймек болатуғынлығына аңсат исениўге болады.

---

[2] Этвиш экспериментте гравитация майданының бундай қәсийетке үлкен дәлликте ийе екенлигин көрсетти.

§ 3. Кеңислик-ўақытлық континуум.
Тәбияттың улыўмалық нызамларын аңлататуғын теңлемелердиң улыўмалық ковариантлығы талабы

Арнаўлы салыстырмалық теориясындағыдай классикалық механикада кеңисликлик ҳәм ўақытлық координаталар тиккелей физикалық мәниске ийе. Бизлер ноқатлық ўақыя x_1 координатасына ийе деп айтсақ, бул сөзлер мынадай мәниске ийе болады: Эвклид геометриясы қәделери бойынша қатты стерженниң жәрдеминде ноқатлық ўақыяның X_1 көшерине түсирилген проекциясын алыў ушын базы бир сызғыш болған бирлик масштабты алады ҳәм сол X_1 көшериниң оң тәрепине x_1 рет өлшейди. Биз ноқат $x_4 = t$ координатасына ийе болады деп айтсақ, онда координаталар системасына салыстырғанда тынышлықта турған ҳәм ноқатылық ўақыя менен кеңисликте сәйкес келетуғын саат (ўақыт эталоны) бойынша ноқатлық ўақыя жүз берген ўақытта $x_4 = t$ дәўир өткенлигин билдиреди[3].

Кеңислик пенен ўақытты усындай түсиниў барлық ўақытта да физиклердиң нәзерин өзине қаратты (көпшилик жағдайларда саналы түрде емес). Бул жағдай усы түсиниклердиң физикалық өлшеўлерде қандай орын тутатуғынлығынан анық көринип тур. Усындай түсиниўди оқыўшы кейинги параграфтағы екинши талқылыўдың тийкарына қойыў керек (оған базы бир мәнис бериў ушын). Бирақ енди биз бул түсиникти таслап, оны арнаўлы салыстырмалық теориясының гравитация майданы болмаған жағдайларда да сақланатуғынлығын есапқа алып улыўмалырақ түсиник пенен алмастырыўымыздың керек екенлигин көрсетемиз.

Биз гравитациялық майданға ийе емес кеңисликке K(x,y,z,t) Галилей координаталар системасын ҳәм усы координаталар системасына салыстырғанда тең өлшеўли айланатуғын K'(x,y,z,t) координаталар системасын киргиземиз. Мейли усы еки системаның координата баслары бир ноқатта жайласқан болсын ҳәм Z көшерлери барлық ўақытлары бир бири менен сәйкес келсин. Енди узынлық пенен ўақыттың физикалық анықламасына тийисли болған жоқарыда келтирилген анықламаны K' системасы ушын пайдаланыўға болмайтуғынлығын көрсетемиз. K системасының XY координата тегислигиндеги орайы координата басында болған шеңберди симметрия тийкарында K' системасының X'Y' координата тегислигиндеги шеңбер деп қараўға болатуғынлығы түсиникли. Енди мынаны көз алдымызға елеслетейик: бул шеңбердиң диаметри менен узынлығы радиусқа салыстырғанда шексиз киши болған бирлик масштаб жәрдеминде өлшенсин ҳәм буннан кейин еки жүргизилген өлшеўдиң қатнасы алынсын. Егер бул экспериментти Галилей системасына салыстырғанда тынышлықта турған K системасының масштабы менен өткерилсе, онда бул жағдай ушын π саны алынады. Ал K' системасына салыстырғанда тынышлықта турған масштаб пенен өлшенген экспериментте бул қатнас π ден үлкен болады. Буның дурыслығына егер өлшеў тынышлықта турған K системасындағы өлшеў процесси ҳаққында талқылайтуғын болсақ ҳәм соған сәйкес шеңберге түсирилген урынба Лоренц қысқарыўына ушырайды, ал радиал бағытындағы масштаб өзгермейди деп есапласақ аңсат исениўге болады. Сонлықтан K' системасы ушын Евклид геометриясы дурыс болмайды; жоқарыда келтирилген Евклид геометриясы пайдаланыўға болады деген координаталар ҳаққындағы пикирлер K' системасы ушын пайдаланыўға жарамсыз болып шығады. Тап сол сыяқлы K' теги ўақытқа қойылған физикалық талаплар K' ке салыстырғанда тынышлықта турған бирдей сааттың көрсетиўине сәйкес келеди деп есаплаўға да болмайды. Буның дурыслығына исениў ушын координата басына ҳәм шеңбердеги бир орынға тынышлықтағы K системасынан бақланатуғын еки бирдей саат орналастырылған болсын. Арнаўлы салыстырмалық

---

[3] Биз кеңисликтеги араласқан ўақыятлар ямаса дәлирек айтқанда кеңислик-ўақытлық тийисиў (сәйкес келиў) ушын «бир ўақытлық» фундаменталлық түсинигине анықлама берместен констатациялаў мүмкиншилигин беремиз

теориясының белгили жуўмақлары бойынша К системасында турып бақланғанда шеңбер бойынша орналастырылған саат координата басына орналастырылған саатқа қарағанда әстерек жүреди. Себеби биринши қозғалады, ал екинши қозғалмайды. Улыўмалық координата басында жайласқан ҳәм жақтылықтың жәрдеминде саатларды көре алатуғын бақлаўшы шеңбер бойында жайласқан сааттың өзиниң қасында турған саатқа салыстырғанда әстерек жүретуғынлығын байқайды. Бақлаўшы жақтылықтың жүрип өткен жолының ўақыттың функциясы деп есаплай алмағанлықтан ол өзиниң бақлаўларының нәтийжесин шеңбер бойындағы сааттың өзиниң қасында турған саатқа салыстырғанда әстерек жүргенлигинен деп түсиндиреди. Солай етип бақлаўшы ўақытқа саатлардың жүриўиниң тезлиги сол саатлардың турған орнына ғәрезли деп анықлама береди.

Солай етип биз мынадай жуўмаққа келемиз: кеңисликлик координаталардың айырмасы тиккелей бирлик масштабтың, ал ўақыттың айырмасы стандарт саатлардың жәрдеминде анықлана алмайтуғын болғалықтан улыўмалық салыстырмалық теориясында кеңисликлик ҳәм ўақытлық шамалардың шамасының тап усындай жоллар менен анықланыўы мүмкин емес.

Демек кеңислик-ўақытлық континиуумдағы координаталар системасын дүзиў бойынша бурынғы усыл жарамсыз болып табылады. Тәбияттың нызамларын әпиўайы етип жазыў мүмкиншилиги бар координаталар системасын төрт өлшемли дүньяға ийкемлестириў жолы жоқ болып шығады. Солай етип ойымызға сәйкес келиўши координаталар системалары тәбиятты тәриплеў ушын принципиаллық жақтан тең ҳуқықлы деп жуўмақ шығарыўдан басқа ҳеш нәрсе де қалмайды[4]. Бул мына талап пенен бирдей күшке ийе: *тәбияттың улыўмалық нызамлары барлық координаталар системаларында да дурыс болатуғын теңлемелер арқалы аңлатылыўы керек, яғный бул теңлемелер қәлеген орын алмастырыўларға қарата ковариант болыўы шәрт (улыўмаковариант).*

Бул постулатты қанаатландырыўшы физиканың салыстырмалықтың улыўмалық постулатын қанаатландыратуғыны түсиникли. Өйткени барлық орын алмастырыўлардың жыйнағының ишинде координата системаларының (үш өлшемли) барлық салыстырмалы қозғалысларына сәйкес келиўши орын алмастырыўлар бар. Кеңислик пенен ўақыттан физикалық предметлиликтиң ең соңғы қалдықларын да қалдырмай жоқ қылатуғын улыўмалық ковариантлылық талабының тәбийий екенлиги мына көз-карастан көринеди. Бизиң барлық кеңислик-ўақытлық констатациялар барлық ўақытта да кеңислик-ўақытлық сәйкес келиўшиликти табыўға алып келеди. Мысалы, егер ўақыя тек ноқатлардың қозғалысынан туратуғын болса, онда ақыр-аяғында усындай еки ямаса бир неше ноқатлардың ушырасыўы бақланған болар еди. Бизиң өлшеўлеримиздиң нәтийжелери де бизиң масштабымыздағы материаллық ноқатлардың басқа материаллық ноқатлар менен сондай ушырасыўларының констатациялаўлардан басқа ҳеш нәрсе емес (ҳәм соған сәйкес саат стрелкаларының, циферблат ноқатларының ҳәм бир орында және бир ўақытта болып өткен ноқатлық ўақыялардың сәйкес келиўи).

Координаталар системасының киргизилиўи сәйкес келиўлер жыйнағын тек әпиўайы түрде тәриплеў ушын хызмет етеди. Төрт кеңислик-ўақытлық x_1, x_2, x_3, x_4 өзгериўшилери ҳәр бир ноқатлық ўақыяға x_1, …, x_4 өзгериўшилериниң мәнислериниң базы бир системасы сәйкес келетуғындай етип дүнья менен салыстырылады. Бир бири менен сәйкес келиўши еки ноқатлық ўақыяға x_1, …, x_4 өзгериўшилериниң мәнислериниң бирдей системасы сәйкес келеди (яғный координаталардың теңлиги менен тәрипленеди). Егер x_1, …, x_4 өзгериўшилериниң орнына мәнислериниң системасы бир мәнисли түрде бир бирине сәйкес келиўи ушын жаңа координаталар системасы сыпатында қәлеген төрт x'_1, …, x'_4 функциялары киргизилетуғын болса, онда жаңа системадағы сәйкес координаталардың теңлиги еки ноқатлық ўақыяның кеңислик-ўақытлық сәйкес келиўиниң аңлатпасы болып табылады. Бизиң барлық физикалық тәжирийбелик мағлыўматларымызды ақыр-аяғында усындай сәйкесликке алып келиў мүмкин болғанлықтан қандай да бир координаталар сис-

---

[4] Бир мәнислилик ҳәм үзликсизлик талапларынан келип шығатуғын базы бир шеклерге биз бул жерде кеўил бөлмеймиз.

темасына алдын-ала артықмашлық бериўге тийкар жоқ (яғный биз улыўмалық ковариантлық талабына келемиз)

§ 4. Төрт координатаның кеңисликлик ҳәм ўақытлық өлшеўлердиң нәтийжелери менен байланысы. Гравитациялық майдан ушын аналитикалық аңлатпа

Бул мақалада мен улыўмалық салыстырмалық теориясын аксиомалардың минимумындағы ең әпиўайы логикалық система түринде көрсетиўге тырыспадым. Мениң баслы мақсетим – оқыўшының сайлап алынған жолдың психологиялық жуўапкершилигин сезиўи ҳәм тийкарына қойылған жағдайлардың тәжирийбе менен жақсырақ сәйкес келиўин басшылыққа алып теорияны баянлаў. Усындай мәнисте биз мына жағдайды киргиземиз.

Шексиз киши төрт өлшемли областлар ушын координаталар системасын қолайлы етип сайлап алғанда тар мәнистеги салыстырмалық теориясы дурыс.

Шексиз киши («жергиликли») координаталар системасының тезлениўши қозғалысы гравитация майданы болмайтуғындай етип сайлап алыныўы керек; шексиз киши область ушын бул шәрт орынланады. Мейли X_1, X_2, X_3 кеңисликлик координаталар, ал X_4 тийисли масштабта өлшенген ўақыт координатасы болсын[5]. Егер бирлик масштаб сыпатында үлкен емес өлшемлердеги қатты сызғыш берилген деп көз алдымызға келтирсек, онда координаталар системасының берилген ориентациясы ушын бул координаталар арнаўлы салыстырмалық теориясы шеклеринде тиккелей физикалық мәниске ийе болады. Бундай жағдайда

$$ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2 \tag{1}$$

аңлатпасы арнаўлы салыстырмалық теориясында кеңислик-ўақытлық өлшеўлер жәрдеминде анықланатуғын, жергиликли координаталар системасының ориентациясынан ғәрезсиз базы бир санлық мәниске ийе болады. ds шамасын төрт өлшемли кеңисликтиң бир бирине шексиз жақын турған еки ноқатына тийисли болған сызықлы элемент деп атаймыз. Егер ($dX_1, \dots, dX_4$) элементине сәйкес келиўши ds^2 шамасы оң мәниске ийе болса, онда бизлер Минковский менен бирликте бундай элементти ўақытқа мегзес, ал қарама-қарсы жағдайда кеңисликке мегзес деп деп атаймыз.

Биз қарап өткен сызықлы элементке ямаса соған сәйкес бир бирине шексиз жақын еки элементке базы бир сайлап алынған системаның $dx_1, \dots dx_4$ дифференциаллары сәйкес келеди. Егер биз қарап атырған орын ушын усындай координаталар системасы ҳәм жоқарыдағыдай типтеги «жергиликли» система сайлап алынған болса, онда dX_ν шамаларын dx_σ ке салыстырғанда бир текли ҳәм сызықлы базы бир аңлатпалар түринде көрсетиў мүмкин:

$$dX_\nu = \sum_\sigma \alpha_{\nu\sigma} dx_\sigma. \tag{2}$$

Бул аңлатпаны (1) ге қойып аламыз:

$$ds^2 = \sum_{\sigma\tau} g_{\nu\tau} dx_\sigma dx_\tau. \tag{3}$$

Бул аңлатпада $g_{\sigma\tau}$ арқалы x_σ ның функциялары белгиленген. Олар «жергиликли» координаталар системасының бағыты менен қозғалыс ҳалынан ғәрезли бола алмайды. Себе-

---

[5] Ўақыттың өлшем бирлигин «жергиликли» координаталар системасында өлшенген жақтылықтың бослықтағы тезлиги бирге тең болатуғындай етип сайлап алыў керек.

би ds^2 кеңислик ҳәм ўақыт бойынша бир бирине шексиз киши қашықлықтағы еки ноқатлық ўақыяның координаталар системасын сайлап алыўдан ғәрезсиз шама болып табылады. Усының менен бирге $g_{\sigma\tau}$ шамасы $g_{\sigma\tau} = g_{\tau\sigma}$ болатуғындай етип сайлап алыныўы және суммалаў σ менен τ дың барлық мәнислери бойынша жүргизилиўи керек. Сонлықтан сумма 4х4 қосылыўшыдан турады, олардың 12 си жуп-жуптан өз-ара тең.

Әдеттеги салыстырмалық теориясы $g_{\sigma\tau}$ шамасы шекли областта әпиўайы

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad (4)$$

мәнисине ийе болатуғындай етип координаталар системасын сайлап алынғандағы дара жағдай сыпатында алынады.

Биз төменде улыўма жағдайларда шекли областлар ушын усындай координаталарды сайлап алыўдың мүмкин емес екенлигин көремиз.

2- ҳәм 3-параграфлардағы талқылаўлардан физикалық көз-қараслар бойынша $g_{\sigma\tau}$ шамаларының сайлап алынған координаталар системасына салыстырғандағы гравитациялық майданды тәриплейтуғын шамалар екенлиги келип шығады. Ҳақыйқатында да биз дәслеп координаталар системасын жарамлы етип сайлап алғанда қарап атырылған төрт өлшемли область ушын арнаўлы салыстырмалық теориясын дурыс деп қабыл етемиз. Бундай жағдайда $g_{\sigma\tau}$ шамалары (4) теги мәнислерге ийе болады. Бундай жағдайда еркин материаллық ноқат бул системаға салыстырғанда туўры сызықлы ҳәм тең өлшеўли қозғалады. Енди егер ықтыярлы түрдеги түрлендириў жолы менен жаңа x_1, …, x_4 кеңислик-ўақытлық координаталарды киргизетуғын болсақ, онда бул жаңа системада $g_{\sigma\tau}$ турақлы шама болмайды, ал кеңислик-ўақытлық коорданаталардың функциясы болады. Усының менен бирге жаңа координаталар системасындағы материаллық ноқаттың қозғалысы иймек сызықлы ҳәм тең өлшеўли емес. Қала берсе қозғалыс нызамы қозғалыўшы материаллық ноқаттың тәбиятынан ғәрезли болмайды. Сонлықтан бул қозғалысты гравитация майданының тәсиринде болатуғын қозғалыс деп есаплаймыз. Гравитация майданының пайда болыўының $g_{\mu\iota}$ шамасының кеңислик-ўақытлық координаталардан ғәрезлилигине байланыслы екенлигин биз көремиз. Бирақ улыўмалық жағдайларда (координаталарды сәйкес сайлап алыўдың нәтийжесинде арнаўлы салыстырмалық теориясын кеңисликтиң шекли областына қолланыў мүмкиншилигине биз ийе болмаған жағдайларда) биз $g_{\sigma\tau}$ шамаларын гравитациялық майданды тәриплейди деген көз-қарасты сақлап қаламыз.

Солай етип улыўмалық салыстырмалық теориясы бойынша басқа күшлерге салыстырғанда (әсиресе электромагнит күшлерге салыстырғанда) гравитациялық күшлер айрықша орынды ийелейди; соның менен бир қатарда гравитация майданын тәриплеўши 10 дана $g_{\sigma\tau}$ функциялары төрт өлшемли кеңисликтиң метрлик қәсийетлерин де анықлайды.

Б. УЛЫЎМАЛЫҚ КОВАРИАНТ ТЕҢЛЕМЕЛЕРДИ КЕЛТИРИП ШЫҒАРЫЎ УШЫН АРНАЛҒАН ЖӘРДЕМШИ МАТЕМАТИКАЛЫҚ ҚУРАЛЛАР

Биз жоқарыда салыстырмалықтың улыўмалық постулатының физиканың теңлемелериниң x_1, …, x_4 координаталарының қәлеген түрлендириўлерине қарата ковариантлығы талабына алып келетуғынлығын көрсетти. Усыған байланыслы енди усындай улыўма ковариант теңлемелерди қалай алыўдың мүмкин екенлигин ойлаўымыз керек. Сонлықтан енди таза математикалық мәселени шешиўге дыққатымызды қаратамыз; усының барысында Гаусстың бетлер теориясына муўапық «сызықлы элемент» деп атаған, (3)-теңлик пенен берилген ds инварианты усы мәселени шешиўде тийкарғы орынды ийелейтуғынлығы анық көринеди.

Усы улыўмалық ковариант шамалар теориясының тийкарғы мәниси мынадан ибарат: Мейли базы бир объектлер («тензорлар») координаталар системасына салыстырғанда тензордың «қураўшылары» деп аталатуғын базы бир сандағы кеңисликлик функциялар жәрдеминде анықланатуғын болсын. Бундай жағдайда егер дәслепки система ушын усы қураўшылар ҳәм усы еки системаны байланыстыратуғын түрлендириўлер белгили болса, онда жаңа координаталар системасы ушын бул қураўшыларды есаплаўдың анық бир тәртиплери орын алады. Төменде тензорлар деп аталған бул объектлер олардың қураўшыларының түрлендириў теңлемелериниң сызықлылығы ҳәм бир теклилиги менен характерленеди. Сонлықтан дәслепки системада қураўшылардың барлығы да нолге тең болса, жаңа системада да қураўшылардың барлығы да нолге тең болады. Усыған сәйкес, егер тәбияттың қандай да бир нызамы базы бир тензордың барлық қураўшыларының нолге тең болыўы менен тәрипленетуғын болса, онда ол улыўмалық ковариант болып табылады. Тензорлардың пайда болыў нызамларын изертлей отырып, биз улыўмалық ковариантлық нызамларды ашыўға мүмкиншилик беретуғын қуралға ийе боламыз.

§ 5. Контравариант ҳәм ковариант төрт өлшемли вектор

Контравариант төрт өлшемли вектор (4 вектор). Сызықлы элемент төрт dx_ν қураўшының жәрдеминде анықланады. Олардың түрлендириў нызамы мына түрге ийе болады:

$$dx'_\sigma = \sum_\nu \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\sigma} dx_\nu . \tag{5}$$

dx'_σ шамасы dx_ν арқалы сызықлы ҳәм бир текли аңлатылады. Сонлықтан бул дифференциалларға биз «тензордың» қураўшылары деп қарай аламыз. Бул тензорға ендигиден былай контравариант 4 вектор деп ат беремиз. Координаталар системасына қатнасы бойынша сол

$$A^{\sigma'} = \sum_\nu \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu} A^\nu \tag{5a}$$

нызамы бойынша түрлендирилетуғын A^ν төрт шамасының тиккелей жәрдеминде анықланатуғын объектти де биз контравариант 4 вектор деп атаймыз. (5a) дан A^σ менен B^σ лар 4 вектор болып табылатуғын болса ($A^\sigma + B^\sigma$) суммасының да 4 вектор болатуғынлығы көринип тур. «Тензорлар» сыпатында төменде қабыл етилген барлық системалар ушын тап сондай жағдайлар келип шығады (тензорларды қосыў ҳәм алыў қағыйдасы).

Ковариант төрт өлшемли вектор. Егер қәлеген ықтыярлы түрде сайлап алынған B_ν контравариант векторы ушын

$$\sum_\nu A_\nu B_\nu = \text{инвариант} \tag{6}$$

шәрти орынланатуғын болса, онда биз A_ν төрт шамасын ковариант 4 вектордың қураўшылары деп атаймыз. Бул анықламалардан ковариант 4 вектордың түрлендириў нызамы келип шығады.

$$\sum_{\sigma} A'_{\sigma} B^{\sigma'} = \sum_{\nu} A_{\nu} B^{\nu}$$

теңлигиниң оң бөлегиндеги B^{ν} шамасын (5а) теңлигинен алынған

$$\sum_{\nu} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\sigma}} B^{\nu'}$$

аңлатпасы менен алмастырып

$$\sum_{\sigma} B^{\sigma'} \sum_{\nu} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\sigma}} A_{\nu} = \sum_{\sigma} B^{\sigma'} A'_{\sigma}$$

екенлигине ийе боламыз. Бирақ бул жерден усы теңликтеги $B^{\sigma'}$ 4 векторының ҳәр қайсысы ықтыярлы ҳәм басқаларынан ғәрезсиз түрде алынатуғын болғанлықтан түрлендириў нызамы келип шығады:

$$A_{\nu}{}' = \sum_{\nu} \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\sigma}} A_{\nu}. \tag{7}$$

Аңлатпалардың жазылыуын әпиўайыластырыў бойынша ескертиў. Усы параграфтағы теңлемелерди қарап шыққанда биз суммалаўдың тек сумма астында еки рет қайталанатуғын белги бойынша жүргизилетуғынлығы бирден көринеди [мысалы (5) теңлигиниң оң тәрепиндеги ν белгиси]. Сонлықтан анықлыққа зыян келтирместен сумма белгисин алып таслаў мүмкин. Буның ушын биз мынадай қағыйданы киргиземиз: егер базы бир аңлатпаның ағзасы қандай да бир индекске еки рет ийе болса, онда усы белги бойынша суммалаўдың жүргизилиўи керек (егер буған қарама-қарсы мәнистеги ескертиў арнаўлы түрде айтылмаған болса).

Ковариант ҳәм контравариант 4 векторлар арасындағы айырма тек түрлендириў нызамларында көринеди [(7)- ҳәм (5)-қатнаслар]. Еки шама да жоқарыда айтылғандай мәнисте тензорлар болып табылады. Риччи ҳәм Леви-Чивиталар пайдаланған қағыйдалар бойынша белгини жоқарыға жазып контравариантлықты, ал белгини төменге жазып ковариантлықты белгилеймиз.

§ 6. Екинши ҳәм оннан да жоқары рангалы тензорлар

Контравариант тензор. Егер биз еки контровариант 4 вектордың A^{μ} ҳәм B^{ν} қураўшыларының барлық 16 дана $A^{\mu\nu}$ көбеймелери болған

$$A^{\mu\nu} = A^{\mu} B^{\nu} \tag{8}$$

шамаларын дүзетуғын болсақ, онда (8) ҳәм (5а) ға сәйкес $A^{\mu\nu}$ қураўшылары мына түрлендириў нызамын қанаатландырады:

$$A^{\sigma\tau'} = \frac{\partial x'_{\sigma}}{\partial x_{\mu}} \cdot \frac{\partial x'_{\tau}}{\partial x_{\nu}} A^{\mu\nu}. \tag{9}$$

Биз қәлеген координаталар системасында 16 шама (функция) менен тәрипленетуғын, (9) түрлендириў нызамын қанаатландыратуғын объектти екинши рангалы контравариант тензор деп атаймыз. Бундай тензорлардың барлығын (8) диң жәрдеминде еки 4 вектордан дүзиў мүмкин емес. Бирақ 16 дана ықтыярлы түрде берилген $A^{\mu\nu}$ қураўшыларын зәрүрли болған тәртипте сайлап алынған төрт өлшемли векторлардың төрт жуп қураўшыларынан туратуғын $A^{\mu}B^{\nu}$ типиндеги төрт қосындының суммасы түринде көрсетиў мүмкин екенлигин аңсат дәлиллеўге болады. Сонлықтан (9) дың жәрдеминде анықланған екинши рангалы тензор ушын дурыс болған барлық жағдайларды оларды (8) типиндеги арнаўлы тензорлар ушын дәлиллеў арқалы тексерип көриўге болады.

Қәлеген рангалы контравариант тензор. (8) ҳәм (9) ға сәйкес 4^3 ҳәм басқа да қураўшыларына ийе үшинши ҳәм жоқары рангалы контравариант тензорларды анықлаў мүмкин екенлиги айқын. Соның менен бирге (8) ҳәм (9) дан усы мәнисте контравариант 4 векторды биринши рангалы контравариант тензор сыпатында қараў мүмкин.

Ковариант тензор. Егер, екинши тәрептен еки ковариант 4 вектордың қураўшылары болған A_μ ҳәм B_ν лердиң

$$A_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu \qquad (10)$$

ға тең болған 16 көбеймесин дүзетуғын болсақ, онда олар ушын мына түрлендириў нызамы дурыс болады:

$$A'_{\sigma\tau} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma}\cdot\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau}\cdot A_{\mu\nu}. \qquad (11)$$

Усы түрлендириў нызамы менен екинши рангалы ковариант тензордың анықламасы бериледи. Контравариант тензорлар ушын жоқарыда келтирилген барлық ескертиўлер ковариант тензорлар ушын да күшин сақлайды.

Ескертиў. Скалярды (инвариантты) нолинши рангалы контравариант ямаса ковариант тензор деп қараған қолайлы.

Аралас тензор. μ индексине қарата ковариант ҳәм ν индексине қарата контравариант

$$A_\mu^\nu = A_\mu B^\nu \qquad (12)$$

екинши рангалы тензорын дүзиў мүмкин. Оның түрлендириў нызамы мына түрге ийе

$$A_\sigma^{\tau'} = \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\beta}\cdot\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\sigma}\cdot A_\alpha^\beta. \qquad (13)$$

Әлбетте ықтыярлы сандағы ковариант характердеги индекслерге ҳәм ықтыярлы сандағы контравариант характердеги индекслерге ийе аралас тензорлар бар. Ковариант ҳәм контравариант тензорларды аралас тензорлардың дара жағдайлары деп қараў мүмкин.

Симметриялы тензорлар. Екинши ямаса жоқары рангалы контравариант (ямаса ковариант) тензор егер еки белгисин орын алмастырғанда бир бирине тең болатуғын болса симметриялы деп аталады. Егер белгилериниң қәлеген комбинациясы ушын

$$A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu} \qquad (14)$$

ямаса

$$A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu} \qquad (14a)$$

орын алатуғын болса $A^{\mu\nu}$ (ямаса $A_{\mu\nu}$) тензоры симметриялы болады.

Усындай жоллар менен анықланған симметрияның координаталар системасынан ғәрезсиз екенлигин дәлиллеймиз. Ҳақыйқатында да (14)- ҳәм (9)-теңликлер тийкарында мыналар келип шығады:

$$A^{\sigma\tau'} = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\nu}A^{\mu\nu} = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\nu}A^{\nu\mu} = \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu}A^{\nu\mu} = A^{\tau\sigma'}$$

Бул теңликлердиң ең ақырғысының алдыңғысы суммалаў белгилери болған μ ҳәм ν лардың орынларын алмастырып қойыўға тийкарланған (яғный белгилеў усылын әпиўайы түрде өзгертиўге тийкарланған).

Антисимметриялы тензорлар. Егер қураўшыларының екеўи қандай да бир еки белгилериниң орынларын алмастырғанда *шамасы жағынан тең, ал белгилери бойынша қарама-қарсы* болатуғын болса екинши, үшинши ямаса төртинши рангалы контраварнант ямаса ковариант тензор антисимметриялық тензор деп аталды. Демек, егер

$$A^{\mu\nu} = - A^{\nu\mu} \qquad (15)$$

ямаса

$$A_{\mu\nu} = - A_{\nu\mu} \qquad (15a)$$

болса $A^{\mu\nu}$ (ямаса $A_{\mu\nu}$) тензоры антисимметриялық тензор болып табылады.

$A^{\mu\nu}$ дың 16 қураўшысының төрт $A^{\mu\mu}$ қураўшысы нолге тең. Басқалары жуп жуптан шамасы бойынша теңдей ҳәм қарама-қарсы белгилерге ийе болады. Сонлықтан тек 6 санлық шамасы бойынша бир бирине тең емес қураўшыға ийе болады (6 вектор). $A^{\mu\nu\sigma}$ тензоры болса (үшинши рангалы) бир биринен сан мәниси бойынша парық қылатуғын тек төрт қураўшыға ийе. Ал антисимметриялы $A^{\mu\nu\sigma\tau}$ антисимметриялы тензоры тек бир қураўшыға ийе. Төрт өлшемли континуумда рангасы төртинши рангалы тензордан жоқары болған тензор жоқ.

§ 7. Тензорларды көбейтиў

Тензорлардың сыртқы көбеймеси. Егер биринши тензордың барлық қураўшыларын екинши тензордың барлық қурыўшылары менен жуп-жуптан көбейтип шықсақ рангалары z ҳәм z' болган еки тензордың қураўшыларынан рангасы z + z' болған тензордың қураўшылары алынады. Мысалы ҳәр қыйлы типтеги A ҳәм B тензорларынан T тензорлары былайынша алынады:

$$T_{\mu\nu\sigma} = A_{\mu\nu}B_{\sigma},$$
$$T^{\alpha\beta\gamma\delta} = A^{\alpha\beta}B^{\gamma\delta},$$
$$T^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}B^{\gamma\delta}.$$

T ның тензорлық характердеги екенлигиниң дәлили (8)-, (10)-, (12)-қатнаслардан ямаса (9)-, (11)-, (13)-түрлендириў формулаларынан келип шығады. (8)-, (10)-, (12)-теңликлеридиң өзлери (екинши рангалы тензорларды) сыртқы көбейтиўдиң мысаллары болып хызмет етеди.

Аралас тензорды «қысыў»[6]. Ҳәр бир аралас тензордан рангасы еки бирликке киши тензорды пайда етиўге болады. Бундай жағдайда ковариант характердеги бир белгини контравариант характердеги белгиге теңеў ҳәм усы белги бойынша суммалаў («қысыў») жүргизиў керек. Солай етип, мысалы, төртинши рангалы аралас тензор $A^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$ дан екинши рангалы аралас тензор

$$A^{\delta}_{\beta} = A^{\alpha\delta}_{\alpha\beta}\left(= \sum_{\alpha} A^{\alpha\delta}_{\alpha\beta} \right)$$

---

[6] Русша «свертывание» сөзи «қысыў» деп аўдарылған. Бул терминниң орнына Эйнштейн “Komposition” ямаса “Verjüngung” сөзлерин қолланған.

ҳәм оннан қайтадан қысыў арқалы нолинши рангалы тензор алынады:

$$A = A_{\beta}^{\beta} = A_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}.$$

Қысыўдың нәтийжесиниң ҳақыйқатында да тензорлық характерге ийе болатуғынлығы (6)-қатнас пенен (12) тензорларын улыўмаластырыўдан ямаса (13)-қатнасты улыўмаластырыўдан келип шығады.

Тензорларды ишки ҳәм аралас көбейтиў. Бундай көбейтиў сыртқа көбейтиў менен қысыўдың комбинациясынан турады.

Мысаллар. Екинши рангалы ковариант тензор $A_{\mu\nu}$ менен биринши рангалы контравариант B^{σ} тензорынан сыртқы көбейтиў арқалы аралас тензор дүземиз

$$D_{\mu\nu}^{\sigma} = A_{\mu\nu}B^{\sigma}.$$

Қысыўдың нәтийжесинде ν ҳәм σ индекслери бойынша төрт өлшемли ковариант вектор пайда болады

$$D_{\mu} = D_{\mu\nu}^{\nu} = A_{\mu\nu}B^{\nu}.$$

Бул векторлы биз $A_{\mu\nu}$ ҳәм B^{σ} тензорларының ишки көбеймеси деп атаймыз. Тап усындай жоллар менен $A_{\mu\nu}$ ҳәм $B^{\sigma\tau}$ тензорларынан сыртқы көбейтиў ҳәм еки рет қысыўдың нәтийжесинде $A_{\mu\nu}B^{\sigma\tau}$ ишки көбеймесин алыў мүмкин. $A_{\mu\nu}$ ҳәм $B^{\sigma\tau}$ лардан сыртқы көбейме алып ҳәм қысыўды орынлап екинши рангалы $D_{\mu}^{\tau} = A_{\mu\nu}B^{\nu\tau}$ аралас тензорын аламыз. Бул операцияны аралас операция деп атаған қолайлы. Себеби бул операция μ ҳәм τ белгилерине қарата сыртқы, ал ν ҳәм σ белгилерине қарата ишки болады.

Енди шаманың тензорлық характерге ийе екенлигин анықлағанда жийи қолланылатуғын тастыйықлаўды дәлиллеймиз. Жоқарыда баянланғанлар тийкарында егер $A_{\mu\nu}$ ҳәм $B^{\sigma\tau}$ лар тензорлар болса $A_{\mu\nu}B^{\sigma\tau}$ дың скаляр болатуғынлығын көремиз. Усының менен бир қатарда *ықтыярлы* $B^{\mu\nu}$ *тензоры* ушын $A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$ инвариант болса, онда $A_{\mu\nu}$ дың тензорлық характерге ийе болатуғынлығы тастыйықланады.

Дәлили. Болжаў бойынша координаталарды қәлеген түрлендириўде

$$A'_{\sigma\tau}B^{\sigma\tau'} = A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$$

теңлигиниң орынланыўы керек. Бирақ (9)-қатнасты айландырыўдың[7] нәтийжесинде мынаған ийе боламыз:

$$B^{\mu\nu} = \frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\sigma}} \cdot \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\tau}} B^{\sigma\tau'}.$$

$B^{\mu\nu}$ ге арналған бул қатнасты жоқарыдағы қатнасқа қойсақ аламыз:

$$\left(A'_{\sigma\tau} - \frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\sigma}} \cdot \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\tau}} A_{\mu\nu} \right) B^{\sigma\tau'} = 0.$$

$B^{\sigma\tau'}$ шамасын қандай етип алғанда да, кейинги аңлатпа қаўсырма белгиси ишинде турған аңлатпа тек нолге тең болғанда ғана орынланады. Буннан (11)-аңлатпаға сәйкес бизиң тастыйықлаўымыз келип шығады.

Бул теорема сәйкес формада қәлеген рангадағы ҳәм типтеги тензорлар ушын дурыс. Буның дәлили барлық ўақытта жоқарыда келтирилгендей жол менен келтириледи.

---

[7] «Обращение» сөзи қарақалпақша айландырыў деп аўдарылған (Б.А.).

Жоқарыда көрсетилген тастыйықлаўды мынадай формада да дәлиллеў мүмкин: Егер B^μ ҳәм C^ν лар ықтыярлы векторлар болса ҳәм оларды қәлеген түрде сайлап алғанда

$$A_{\mu\nu}B^\mu C^\nu$$

ишки көбеймеси скаляр болып шықса, онда $A_{\mu\nu}$ ковариант вектор болып табылады. Бул B^μ 4 векторын қәлеген түрде сайлап алғанда $A_{\mu\nu}B^\mu B_\nu$ скаляр көбеймеси скаляр болады деп тастыйықланғанда ҳәм $A_{\mu\nu}$ симметрия шәрти $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$ орынланғандағы дара жағдай ушын да дурыс. Ҳақыйқатында да жоқарыда келтирилгендей жоллар менен жүрип ($A_{\mu\nu}$ + $A_{\nu\mu}$) шамасының тензорлық характерге ийе екенлиги дәслеп дәлилленеди, буннан симметрия қәсийети тийкарында $A_{\mu\nu}$ диң тензорлық характерге ийе екенлиги тиккелей келип шығады. Бул тастыйықлаўды қәлеген рангалы ковариант ҳәм контравариант тензорлар жағдайлары ушын аңсат улыўмаластырыўға болады.

Ең ақырында жоқарыда дәлилленгенлерден қәлеген тензорлар ушын улыўмаластырыўға болатуғын тастыйықлаў келип шығады: егер B^ν 4 векторын қәлеген түрде сайлап алғанда $A_{\mu\nu}B^\nu$ шамалары биринши рангалы тензорды пайда ететуғын болса, онда $A_{\mu\nu}$ екинши рангалы тензор болып табылады. Ҳақыйқатында да егер C^μ ықтыярлы 4 вектор болса, онда $A_{\mu\nu}B^\nu$ шамасының тензорлық характерге ийе екенлигинен C^μ ҳәм B^ν 4 векторларын қәлеген түрде сайлап алғанда $A_{\mu\nu}C^\mu B^\nu$ ишки көбеймеси скаляр болып табылады. Буннан бизиң тастыйықлаўымыз келип шығады.

§ 8. $g_{\mu\nu}$ фундаменталлық тензорының базы бир қәсийетлери

Ковариант фундаменталлық тензор. Сызықлы элементтиң квадратының инвариант аңлатпасы болған

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu$$

аңлатпасындағы dx_μ шамасы ықтыярлы контравариант вектордың орнын ийелейди. Усының менен бир қатарда $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. Сонлықтан кейинги параграфта айтылғанлардан $g_{\mu\nu}$ ды екинши рангалы ковариант тензор деп жуўмақ шығарамыз. Биз оны «фундаменталлық тензор» деп атаймыз ҳәм төменде бул тензордың базы бир қәсийетлерин келтирип шығарамыз. Әлбетте бундай қәсийетлерге ҳәр бир екинши рангалы тензор ийе болады. Бирақ бизиң теориямыздағы гравитациялық тәсир менен байланыслы фундаменталлық тензордың айрықша физикалық мәниси жоқарыда дәлилленген қатнасларды фундаменталлық тензорға қолланыўды айрықша қызықлы етеди.

Контравариант фундаменталлық тензор. Егер $g_{\mu\nu}$ лардан қуралған анықлаўшыдағы[8] $g_{\mu\nu}$ элементлерине сәйкес минорлар алынса ҳәм олардың ҳәр қайсысын $g = |g_{\mu\nu}|$ анықлаўшысына бөлсе, онда базы бир $g^{\mu\nu}$ ($=g^{\nu\mu}$) шамалары алынып, олардың контравариант тензорды қурайтуғынлығын дәлиллеймиз.

Анықлаўшылар теориясынан белгили болған теорема тийкарында мынаған ийе боламыз:

$$g_{\mu\sigma}g^{\nu\sigma} = \delta^\nu_\mu. \tag{16}$$

Бул аңлатпадағы δ^ν_μ шамасы 1 ге тең болады, егер $\mu = \nu$ болса, ал $\mu \neq \nu$ болса $\delta^\nu_\mu = 0$. ds^2 ушын келтирилген аңлатпадан былай да жазыўға болады:

$$g_{\mu\sigma}\delta^\sigma_\nu dx_\mu dx_\nu$$

---

[8] «Определитель» сөзиниң орнына «анықлаўшы» сөзи қолланылған (Б.А.).

ямаса (16) ға сәйкес

$$g_{\mu\sigma}g_{\nu\tau}g^{\sigma\tau}dx_{\mu}dx_{\nu}$$

деп жаза аламыз. Бирақ жоқарыдағы параграфта баянланған көбейтиў қағыйдасына сәйкес

$$d\xi_{\sigma} = g_{\mu\sigma}dx_{\mu}$$

шамасы ковариант 4 векторды, қала берсе (dx_{μ} шамасын ықтыярлы түрде сайлап алыўдың мүмкинлигинен) ықтыярлы түрде сайлап алынған 4 векторды пайда етеди. Оны бизиң аңлатпамызға қойып мынаны аламыз:

$$ds^2 = g^{\sigma\tau}d\xi_{\sigma}d\xi_{\tau}.$$

Бул аңлатпа $d\xi_{\sigma}$ векторын қәлеген түрде сайлап алғанда да скаляр болатуғын болғанлықтан ҳәм $g^{\sigma\tau}$ анықлама бойынша σ ҳәм τ индекслерине қарата симметриялы. Сонлықтан алдыңғы параграфта алынған нәтийжелер тийкарында $g^{\sigma\tau}$ контравариант тензор деп жуўмақ шығарамыз. Буннан басқа (16) дан δ^{ν}_{ν} диң де тензор екенлиги келип шығады. Бул тензорды аралас фундаменталлық тензор деп атаймыз.

Фундаменталлық тензордың анықлаўшысы. Анықлаўшыларды көбейтиў қағыйдасына сәйкес мынаған ийе боламыз:

$$\left|g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu}\right| = \left|g_{\mu\alpha}\right|\cdot\left|g^{\alpha\nu}\right|.$$

Екинши тәрептен

$$\left|g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu}\right| = \left|\delta^{\nu}_{\mu}\right| = 1.$$

Буннан

$$\left|g_{\mu\alpha}\right|\cdot\left|g^{\alpha\nu}\right| = 1 \qquad (17)$$

екенлиги келип шығады.

Инвариант көлем. Дәслеп $g = \left|g_{\mu\nu}\right|$ анықлаўшысының түрлениў нызамын таўып аламыз. (11) ге сәйкес

$$g' = \left|\frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\sigma}}\frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\sigma}}g_{\mu\nu}\right|$$

аңлатпасына ийе боламыз. Буннан анықлаўшыларды көбейтиў қағыйдасын еки рет қолланғаннан кейин мына аңлатпа келип шығады:

$$g' = \left|\frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\sigma}}\right|\cdot\left|\frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\sigma}}\right|\cdot\left|g_{\mu\nu}\right| = \left|\frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\sigma}}\right|^2 g$$

ямаса

$$\sqrt{g'} = \left|\frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\sigma}}\right|\sqrt{g}.$$

Екинши тәрептен көлем элементи

$$d\tau' = \int dx_1dx_2dx_3dx_4$$

ның түрлениў нызамы белгили Якоби теоремасы бойынша мына түрге ийе болады:

$$d\tau' = \left|\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu}\right| d\tau.$$

Кейинги теңликлерди көбейтиў арқалы

$$\sqrt{g'}d\tau' = \sqrt{g}d\tau \qquad (18)$$

екенлигине көз жеткеремиз.

Кеңислик-ўақытлық континуум гиперболалық характерге ийе болғанлықтан $\sqrt{g}$ шамасының орнына ендигиден былай барлық ўақытта да ҳақыйқый мәниске ийе болатуғын $\sqrt{-g}$ шамасы алынады. $\sqrt{-g}\,d\tau$ инварианты «жергиликли координаталар системасында» арнаўлы салыстырмалық теориясының принципи бойынша үш масштаб ҳәм сааттың жәрдеминде өлшенген төрт өлшемли көлем элементине тең.

Кеңислик-ўақытлық континуумның характери ҳаққында ескертиў. Бизиң шексиз киши шамаларда арнаўлы салыстырмалық теориясы дурыс деп есаплаўымыз ds^2 шамасын (1) диң жәрдеминде $dX_1, \ldots, dX_4$ затлық шамалар арқалы аңлатыўдың мүмкинлигине алып келеди. $d\tau_0$ арқалы «тәбийий» көлем элементи $dX_1dX_2dX_3dX_4$ ти белгилеп аламыз:

$$d\tau_0 = \sqrt{-g}\,d\tau \qquad (18a)$$

Егер төрт өлшемли континуумның қандай да бир жеринде $\sqrt{-g}$ нолге айланса, онда бул жағдай усы жерде шекли координаталық көлемге шексиз киши (тәбийий) көлемниң сәйкес келетуғынлығын билдиреди. Бундай жағдай ҳеш жерде орынланбайды деп есаплаймыз. Соның менен бирге бундай жағдайда g белгисин өзгерте алмайды. Арнаўлы салыстырмалық теориясына сәйкес g шамасын барлық ўақытта шекли ҳәм терис мәнисли болады деп есаплаймыз. Бундай деп есаплаў биз қарап атырған континуумның физикалық тәбияты ҳаққында базы бир гипотеза, соның менен бирге координаталар системасын сайлап алыўға тийисли болған қағыйда да болып табылады.

Бирақ $-g$ оң мәниске ийе ҳам шекли болса, онда енди усы шама 1 ге тең болатуғын координатаны сайлап алыў ойының пайда болыўы тәбийий. Кейинирек биз координаталар системасын сайлап алыўға усындай шектиң қойылыўының нәтийжесинде тәбияттың нызамларын әдеўир әпиўайыластырыўға болатуғынлығын көремиз. Бундай жағдайда (18)-теңликтиң орнына

$$d\tau = d\tau'$$

теңлигине ийе боламыз. Буннан Якоби теоремасын дыққатқа алсақ мына аңлатпа келип шығады:

$$\left|\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x'_\mu}\right| = 1. \qquad (19)$$

Солай етип координаталар системасын тап усындай етип сайлап алғанда анықлаўшысы тек 1 ге тең болған координаталарды түрлендириўге болады.

Бирақ бундай усылды қолланыў улыўмалық салыстырмалық принципинен бас тартыў дегенди аңлатпайды. Биз сораўды «анықлаўшысы 1 ге тең болған барлық түрлендириўлерге қатнасы бойынша ковариант болған тәбияттың нызамлары қандай болады» деп бермеймиз. Бирақ биз «тәбияттың *улыўма ковариантлық* нызамлары қандай болады» деп сораў беремиз. Усындай нызамлар табылғаннан кейин ғана олардың аңлатпаларын координата системаларын айрықша етип сайлап алыўдың нәтийжесинде әпиўайыластырамыз.

Фундаменталлық тензордың жәрдеминде жаңа тензорларды пайда етиў. Қандай да бир тензорды фундаменталлық тензорға ишки, сыртқы ҳәм аралас көбейтиўдиң нәтийжесинде басқа характердеги ҳәм рангадағы тензорлар пайда болады.

Мысаллар:

$$A^{\mu} = g^{\mu\sigma}A_{\sigma},$$

$$A = g_{\mu\nu}A^{\mu\nu}.$$

Төмендеги комбинацияларды айрықша атап өтемиз:

$$A^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}g^{\nu\beta}A_{\alpha\beta},$$

$$A_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}g_{\nu\beta}A^{\alpha\beta}$$

(ковариант ҳәм, сәйкес, контравариант тензорға «қосымшалар») ҳәм

$$B_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}.$$

Биз $B_{\mu\nu}$ тензорын $A_{\mu\nu}$ ге қарата редукцияланған тензор деп атаймыз. Тап соған сәйкес ийе боламыз:

$$B^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta}.$$

Биз $g^{\mu\nu}$ ниң $g_{\mu\nu}$ ге қатнасы бойынша «қосымша»[9] дан басқа ҳеш нәрсе емес екенлигин аңғарамыз. Өйткени

$$g^{\mu\alpha}\, g^{\nu\beta}g_{\alpha\beta} = g^{\mu\alpha}\delta^{\nu}_{\alpha} = g^{\mu\nu}.$$

§ 9. Геодезиялықтың теңлемеси
(ноқаттың қозғалыс теңлемеси)

«Сызықлы элемент» ds координаталар системасынан ғәрезсиз анықланған шама болғанлықтан төрт өлшемли континуумның P_1 ҳәм P_2 ноқатлары арқалы өткерилген сызық ушын да координатаны сайлап алыўдан ғәрезсиз $\int ds$ шамасы экстремаль мәнисти қабыл етеди (геодезиялық). Оның теңлемеси мына түрге ийе болады

$$\delta\left\{\int_{P_1}^{P_2} ds\right\} = 0. \tag{20}$$

Буннан вариацияны орынлап белгили усыл менен төрт әдеттеги дифференциаллық теңлеме алынады. Бул төрт теңлеме геодезиялық сызықты анықлайды. Баянлаўдың толық болыўы ушын биз сол келтирип шығарыўды толығы менен беремиз. Мейли λ арқалы x_{ν} координатасының базы бир функциясы белгиленген болсын. Бул функция биз қарап атырған P_1 ҳәм P_2 ноқатларын тутастыратуғын геодезиялық сызықты ҳәм сол сызыққа шексиз жақын жайласқан иймекликлерди кесип өтетуғын бетлердиң семействосын анықлайды. Бундай жағдайда усы иймекликлердиң ҳәр қайсысын λ арқалы аңлатылған өзиниң x_{ν} координаталары менен берилген деп көз алдыға келтириўге болады. Мейли δ

---

[9] Математикалық термин «дополнение» қарақалпақ тилине «қосымша» деп аўдарылған (Б.А.).

символы биз қарап атырған геодезиялық сызықтың қандай да бир ноқатынан қоңысы иймекликтиң λ ниң сол мәнисине ийе ноқатына өтиўге сәйкес келсин. Бундай жағдайда (20)-теңлемени мынаған алмастырамыз

$$\left.\begin{aligned}&\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\delta\omega d\lambda=0,\\&\omega^2=g_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{d\lambda}\frac{dx_\nu}{d\lambda}.\end{aligned}\right\}\qquad(20а)$$

$$\delta\omega=\frac{1}{\omega}\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\mu}{d\lambda}\frac{dx_\nu}{d\lambda}\delta x_\sigma+g_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{d\lambda}\delta\left(\frac{dx_\nu}{d\lambda}\right)\right\}$$

ҳәм

$$\delta\left(\frac{dx_\nu}{d\lambda}\right)=\frac{d\delta x_\nu}{d\lambda}$$

болғанлықтан бул мәнислерди (20а) ға қойып ҳәм бөleклерге бөлип интеграллағаннан кейин мынаны аламыз

$$\left.\begin{aligned}&\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}d\lambda\kappa_\sigma\delta x_\sigma=0,\\&\kappa_\sigma=\frac{d}{d\lambda}\left\{\frac{g_{\mu\sigma}}{\omega}\frac{dx_\mu}{d\lambda}\right\}-\frac{1}{2\omega}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\mu}{d\lambda}\frac{dx_\nu}{d\lambda}.\end{aligned}\right\}\qquad(20б)$$

Буннан δx_σ ның ықтыярлылығынан κ_σ ның нолге тең екенлиги келип шығады. Солай етип

$$\kappa_\sigma=0.\qquad(20в)$$

теңлиги геодезиялық сызықтың теңлемеси болып табылады. Егер биз қарап атырған геодезиялық сызықтың үстинде ds ≠ 0 болса, онда λ параметри сыпатында геодезиялық сызық бойынша өлшенген «доғаның узынлығын» сайлап алыўға болады. Бундай жағдайда $\omega=1$ ҳәм (20в) ның орнына аламыз

$$g_{\mu\nu}\frac{d^2x_\mu}{ds^2}+\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\sigma}{d\lambda}\frac{dx_\mu}{d\lambda}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{dx_\mu}{d\lambda}\frac{dx_\nu}{d\lambda}=0$$

ямаса белгилеўлерди өзгертсек

$$g_{\alpha\sigma}\frac{d^2x_\alpha}{ds^2}+\begin{bmatrix}\mu\nu\\\sigma\end{bmatrix}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}=0.\qquad(20г)$$

Бул жерде Кристоффельге сәйкес биз былайынша белгилеў қабыл еттик

$$\begin{bmatrix}\mu\nu\\\sigma\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right).\qquad(21)$$

Еӊ ақырында (20г) теңлемени $g^{\sigma\tau}$ ға көбейтип (τ ға салыстырғанда сыртқы ҳәм σ ға салыстырғанда ишки көбейтиў) геодезиялық сызықтың еӊ ақырғы түрдеги теңлемесин аламыз:

$$\frac{d^2x_\tau}{ds^2}+\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}=0. \tag{22}$$

Бул жерде Кристоффельге сәйкес мынадай белгилеў киритилген:

$$\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}=g^{\tau\alpha}\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{bmatrix}. \tag{23}$$

§ 10. Дифференциаллаў арқалы тензорларды пайда етиў

Енди геодезиялық сызықтың теңлемесин пайдаланып дифференциаллаў арқалы тензорлардан жаңа тензорлар пайда етиў қағыйдаларын келтирип шығарамыз. Бул қағыйдалар улыўмаковариант дифференциал теңлемелерди алыўға мүмкиншилик береди. Бул мақсетке биз төменде келтирилген операцияларды қайтадан қолланыў арқалы жетемиз.

Егер бизиң континуумда узынлығы иймекликтиң базы бир белгили ноқатынан баслап өлшенетуғын узынлығы s пенен характерленетуғын иймеклик берилген ҳәм φ координаталардың инвариант функциясы болса, онда $\frac{d\varphi}{ds}$ те инвариант болып табылады. Буның дәлили $d\varphi$ диң де, ds тың да инвариантлылығында.

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{\partial\varphi}{dx_\mu}\frac{dx_\mu}{ds}$$

болғанлықтан

$$\psi=\frac{\partial\varphi}{dx_\mu}\frac{dx_\mu}{ds}$$

шамасы да инвариант болып табылады. Қала берсе бул шама континуумның бир ноқатынан шығатуғын барлық иймекликлери, яғный қәлеген dx_μ векторы ушын инвариант болады. Буннан

$$A_\mu=\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}$$

шамасының төрт өлшемли ковариант вектор екенлиги келип шығады (grad φ).

Бизиң қағыйдамызға сәйкес иймекликтиң бойы бойынша алынған туўынды

$$\chi=\frac{d\psi}{ds}$$

те инвариант болады.

ψ диң мәнисин қойып дәслеп

$$\chi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu\partial x_\nu}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{d^2x_\mu}{ds^2}$$

аңлатпасын аламыз. Буннан ҳәзирше қандай да бир тензордың бар екенлиги ҳаққында айтыўға болмайды. Бирақ биз бойы бойынша дифференциаллаған иймекликти геодезиялық иймеклик деп есапласақ, онда $\frac{d^2x_\nu}{ds^2}$ шамасын (22)-формуладағы аңлатпа менен алмастырып мынаны аламыз:

$$\chi=\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu}-\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}\frac{d\omega}{dx_\tau}\right\}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}.$$

μ ҳәм ν бойынша дифференциаллаўдың тәртибин өзгертиў мүмкиншилигинен, симметрия бойынша, (23) ҳәм (21) ден, $\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}$ ды μ ҳәм ν бойынша өзгертиўдиң мүмкиншилигинен, фигуралық қаўсырма ишинде турған аңлатпалардың сол индекслерге қарата симметриялылығы келип шығады. Континуумның қәлеген ноқатынан қәлеген бағытта геодезиялық сызық өткериўге болатуғын болғанлықтан ҳәм соған сәйкес $\frac{dx_\mu}{ds}$ қураўшылары арасындағы қатнаслар ықтыярлы болған 4 вектор болғанлықтан 7-параграфта алынған жуўмақлар тийкарында

$$A_{\mu\nu}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu}-\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\tau} \qquad (25)$$

шамасының екинши рангалы ковариант тензор екенлиги келип шығады. Солай етип биринши рангалы

$$A_\mu=\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}$$

ковариант тензорынан дифференциаллаў арқалы екинши рангалы

$$A_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}-\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \tau\end{Bmatrix}A_\tau \qquad (26)$$

ковариант тензорын алыўға болады екен. $A_{\mu\nu}$ тензорын A_μ тензорының ковариант туўындысы деп атаймыз[10]. Ең дәслеп A_μ тензорын градиент түринде қарамағанда да биз қолланған тензор дүзиў усылының тензорға алып келетуғынлығын аңсат көрсетиўге болады. Бунның дурыслығына исениў ушын егер ψ менен φ лер скалярлар болған жағдайда да биз алдын ала

$$\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}$$

шамасының ковариант 4 вектор екенлигин аңғарамыз. Тап усындай жағдай егер $\psi^{(1)},\ldots,\psi^{(4)}$ лер скалярлар болғанда да биз көрсеткендей төрт ағзадан туратуғын қосынды ушын да дурыс:

$$S_\mu=\psi^{(1)}\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial x_\mu}+\ldots+\psi^{(4)}\frac{\partial\varphi^{(4)}}{\partial x_\mu}.$$

---

[10] Аўдармада Эйнштейн тәрепинен қолланылған «кеңейиў» терментиниң орнына ҳәзирги ўақытлары қабыл етилген термин қолланылған (рус тилиндеги текст редакторының ескертиўи).

Бирақ ҳәр бир ковариант 4 вектордың S_μ түринде көрсетилиўиниң мүмкин екенлиги түсиникли. Егер A_μ қураўшылары x_ν дың ықтыярлы түрде берилген функциялары болған 4 вектор болса, онда S_μ ниң A_μ ге тең болыўы ушын (сайлап алынған координаталар системасына салыстырғанда)

$$\begin{aligned} \psi^{(1)} &= A_1, & \varphi^{(1)} &= x_1, \\ \psi^{(2)} &= A_2, & \varphi^{(2)} &= x_2, \\ \psi^{(3)} &= A_3, & \varphi^{(3)} &= x_3, \\ \psi^{(4)} &= A_4, & \varphi^{(4)} &= x_4 \end{aligned}$$

деп есаплаў жеткиликли.

Усыған байланыслы (26) теңлигиниң оң бөлиминде A_μ дың орнына ықтыярлы ковариант 4 вектор қойылса $A_{\mu\nu}$ дың тензор болатуғынлығын дәлиллеў ушын усының 4 вектор S_μ ушын дурыс екенлигин көрсетиў жеткиликли. Бирақ (26) ның оң тәрепинен дәлиллеўдиң

$$A_\mu = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}$$

жағдайы ушын келтирилиўиниң жеткиликли екенлиги дәрҳәл көринеди. ψ ге көбейтилген (25) тиң оң тәрепи, яғный

$$\psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \tau \end{Bmatrix} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau}$$

тензорлық характерге ийе. Тап дәл сол сыяқлы

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}$$

шамасы да тензор болып табылады (еки 4 вектордың сыртқы көбеймеси). Қосыў арқалы биз

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\psi \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu}\right) - \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \tau \end{Bmatrix} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau}\right)$$

дың да тензорлық характерге ийе екенлигин көремиз. Усылай етип (26) да көринип турғанындай

$$\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}$$

4 векторы ушын зәрүрли болған дәлиллеў берилди (ҳәм соған сәйкес жоқарыда дәлилленилгениндей қәлеген A_μ 4 векторы ушын).

4 вектордың ковариант туўындысын пайдаланып қәлеген рангадағы ковариант тензордың ковариант туўындысына анықлама бериўге болады. Бул анықлама 4 вектордың ковариант туўындысының улыўмаласыўы болып табылады. Биз бул жерде екинши рангалы тензордың ковариант туўындысын алыў менен шекленемиз. Себеби бундай шеклениў усы операция ҳаққында айқын сәўлелендиреди.

Жоқарыда айтылып өтилгениндей, ҳәр бир екинши рангалы ковариант тензор $A_\mu B_\nu$

типиндеги тензорлардың суммасы түринде көрсетилиўи мүмкин[11]. Сонлықтан усындай арнаўлы тензор ушын ковариант туўындының формуласын келтирип шығарыў менен шекленген толық жеткиликли. (26) ға сәйкес

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\sigma} - \begin{Bmatrix} \sigma\mu \\ \tau \end{Bmatrix} A_\tau,$$

$$\frac{\partial B_\nu}{\partial x_\sigma} - \begin{Bmatrix} \sigma\nu \\ \tau \end{Bmatrix} B_\tau$$

аңлатпалары тензорлық характерге ийе болады. Биринши аңлатпаны B_ν ға, ал екинши аңлатпаны A_μ ге сыртлай көбейтиў арқалы үшинши рангалы бир бирден тензор аламыз. Алынған тензорлардың қосындысы

$$A_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \begin{Bmatrix} \sigma\mu \\ \tau \end{Bmatrix} A_{\tau\nu} - \begin{Bmatrix} \sigma\nu \\ \tau \end{Bmatrix} A_{\mu\tau} \qquad (27)$$

үшинши рангалы тензор болып табылады, қала берсе $A_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu$ деп қабыл еттик. (27)-теңликтиң оң тәрепи $A_{\mu\nu}$ ға ҳәм оның биринши туўындыларына қарата сызықлы ҳәм бир текли болғанлықтан бул жаңа тензорлардың пайда болыўының нызамы тек ғана $A_\mu B_\nu$ типиндеги тензорлар жағдайында ғана емес, ал усындай тензорлардың қосындысы, яғный екинши рангалы қәлеген ковариант тензор ушын да дурыс болады. $A_{\mu\nu\sigma}$ тензорын $A_{\mu\nu}$ тензорының ковариант туўындысы деп атаймыз.

(26) менен (24) лар ковариант туўынды (27) ниң тек арнаўлы жағдайлары екенлиги түсиникли (биринши ҳәм нолинши рангалы тензордың ковариант туўындысы). Улыўма айтқанда жаңа тензорлардың пайда болыўының арнаўлы нызамлары (27) қатнасының тийкарында усыған тензорларды бир бирине көбейтиўди байланыстырыў арқалы алынады.

§ 11. Айрықша әҳмийетке ийе болған базы бир дара жағдайлар

Фундаменталлық тензор ҳаққындағы базы бир леммалар. Дәслеп буннан кейинги таллаўларда пайдалы болған базы бир жәрдемши қатнасларды келтирип шығарамыз. Анықлаўшыларды дифференциаллаў қағыйдасы бойынша ийе боламыз

$$dg = g^{\mu\nu}\, g\, dg_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\, g\, dg^{\mu\nu}. \qquad (28)$$

Егер $g_{\mu\nu}g^{\mu'\nu} = \delta^{\mu'}_{\mu}$ ҳәм $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4$ екенлигин дыққатқа алсақ кейинги аңлатпа оннан алдыңғы аңлатпадан келип шығады, соған сәйкес

$$g_{\mu\nu}dg^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}dg_{\mu\nu} = 0.$$

(28)-қатнастан мына аңлатпа келип шығады:

---

[11] (қәлеген) қураўшылары A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, сәйкес 1, 0, 0, 0 болған векторларды сыртқы көбейтиўдиң нәтийжесинде қураўшылары

$$\begin{array}{cccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

болған тензор алынады. Усындай төрт тензорды бир бирине қосыў арқалы қураўшылары алдын ала қәлеген түрде берилген $A_{\mu\nu}$ тензорын аламыз.

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x_\sigma}=\frac{1}{2}\frac{\partial\, ln(-g)}{\partial x_\sigma}=\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}=-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}. \qquad (29)$$

$g_{\mu\sigma}g^{\nu\sigma} = \delta_\mu^\nu$ теңлигинен дифеpенциаллаў аpқалы

$$g_{\mu\sigma}dg^{\nu\sigma} = - g^{\nu\sigma}dg_{\mu\sigma}$$

ямаса (30)

$$g_{\mu\sigma}\frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_\lambda}=-g^{\nu\sigma}\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\lambda}$$

екенлигине ийе боламыз. Буннан $g^{\mu\tau}$ ға ҳәм сәйкес $g_{\nu\lambda}$ ге аралас көбейтиўдиң нәтийжесинде аламыз (индекслердиң белгилеўлерин өзгертип)

$$\left.\begin{aligned} dg^{\mu\nu} &= -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}dg_{\alpha\beta}, \\ \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} &= -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

ҳәм соған сәйкес

$$\left.\begin{aligned} dg_{\mu\nu} &= -g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}dg^{\alpha\beta}, \\ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} &= -g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}. \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

(31) ди бизиң кейинирек пайдаланыўымыз ушын басқа түрге түрлендиремиз. (21)-формулаға сәйкес

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}=\begin{bmatrix}\alpha\sigma\\ \beta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta\sigma\\ \alpha\end{bmatrix}. \qquad (33)$$

Буны (31) деги екинши формулаға қойып ҳәм (23) ти дыққатқа алып ийе боламыз:

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}=-\left(g^{\mu\nu}\begin{Bmatrix}\tau\sigma\\ \nu\end{Bmatrix}+g^{\nu\tau}\begin{Bmatrix}\tau\sigma\\ \mu\end{Bmatrix}\right). \qquad (34)$$

(34)-теңликтиң оң тәрепин (29) ға қойыўдың нәтийжесинде аламыз:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x_\sigma}=\begin{Bmatrix}\mu\sigma\\ \mu\end{Bmatrix}. \qquad (29a)$$

Контрвариант 4 вектордың дивергенциясы. Егер (26)-қатнасты контрвариант фундаменталлық тензор $g^{\mu\nu}$ ға көбейтсек (ишки көбейтиў), онда оның оң тәрепи биринши ағзаны түрлендиргеннен кейин мына көриниске енеди:

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(g^{\mu\nu}A_\mu\right)-A_\mu\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\nu}-\frac{1}{2}g^{\tau\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right)g^{\mu\nu}A_\tau.$$

Бул аңлатпаның ақырғы ағзасын (31)- ҳәм (29)-теңликлердиң тийкарында мына түрге келтириў мүмкин:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\tau\nu}}{\partial x_\nu}A_\tau+\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\tau\mu}}{\partial x_\mu}A_\tau+\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}g^{\tau\alpha}A_\tau.$$

Суммалаў алынатуғын индекслердиң белгилери әҳмийетке ийе болмайтуғын болғанлықтан кейинги аңлатпаның дәслепки еки ағзасы менен жоқарыда турған аңлатпаның екинши ағзасы бир бирин жоқ етеди. Соңғы ағзаны болса жоқарыда турған аңлатпаның биринши ағзасы менен бириктириў мүмкин.

$$g^{\mu\nu}A_\mu = A^\nu$$

деп болжап (бул аңлатпадағы A^ν векторы A_μ сыяқлы ықтыярлы вектор) ақырында аламыз

$$\Phi=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sqrt{-g}A^\nu\right). \qquad (35)$$

Бул скаляр контравариант 4 вектордың *дивергенциясы* болып табылады.

(Ковариант) 4 вектордың «Роторы». (26)-формуладағы екинша ағза μ ҳәм ν индекслерине қарата симметриялы. Сонлықтан $A_{\mu\nu}$ - $A_{\nu\mu}$ өзиниң структурасы бойынша айрықша әпиўайы (антисимметриялы) тензор болып табылады. Биз ийе боламыз

$$B_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}. \qquad (36)$$

6 вектордың антисимметриялы тензорлық туўындысы. Егер (27) ни базы бир 2-рангалы антисимметриялы $A_{\mu\nu}$ тензорына қолланса, буннан кейин алынған теңликтен μ, ν, σ индекслерин цикллық орын алмастырыў жолы менен еки сол сыяқлы теңлик пайда етилсе ҳәм ақырында алынған барлық үш теңликти қосса 3-рангалы тензор аламыз

$$B_{\mu\nu\sigma}=A_{\mu\nu\sigma}+A_{\nu\sigma\mu}+A_{\sigma\mu\nu}=\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}+\frac{\partial A_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial A_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}. \qquad (37)$$

Бул тензордың антисимметриялы екенлигин аңсат дәлиллеўге болады.

6 вектордың дивергенциясы. Егер (27)-теңликти $g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}$ ға көбейтсек (аралас көбейтиў) және де тензор аламыз. (27) ниң оң тәрепиниң биринши ағзасын мына түрде жаза аламыз:

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}A_{\mu\nu}\right)-g^{\mu\alpha}\frac{\partial g^{\nu\beta}}{\partial x_\sigma}A_{\mu\nu}-g^{\nu\beta}\frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x_\sigma}A_{\mu\nu}.$$

Егер $g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}A_{\mu\nu\sigma}$ ны $A_\sigma^{\alpha\beta}$ ҳәм $g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}A_{\mu\nu}$ ды $A^{\alpha\beta}$ арқалы алмастырсақ және түрлендирилген биринши ағзаға

$$\frac{\partial g^{\nu\beta}}{\partial x_\sigma}\ \text{ҳәм}\ \frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x_\sigma}$$

лердиң орнына (34)-формуладағы сәйкес мәнислерди қойса, онда (27)-теңликтиң оң тәрепинде жети ағза болады ҳәм олардың төртеўи бир бирин жоқ қылып, тек

$$A_{\sigma}^{\alpha\beta}=\frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x_{\sigma}}+\begin{Bmatrix}\sigma\kappa\\ \alpha\end{Bmatrix}A^{\kappa\beta}+\begin{Bmatrix}\sigma\kappa\\ \beta\end{Bmatrix}A^{\alpha\kappa} \tag{38}$$

аңлатпасы қалады. Бул 2-рангалы контравариант тензордың ковариант туўындысы ушын аңлатпа болып табылады. Бундай аңлатпаның рангалары жоқары ямаса төмен болған контравариант тензорлар ушын да сәйкес түрде дүзилиўи мүмкин.

Тап сондай жоллар менен рангасы жоқарырақ ямаса төменирек болған аралас тензор A_{μ}^{α} ның ковариант туўындысы ушын да аңлатпа ала аламыз.

$$A_{\mu\sigma}^{\alpha}=\frac{\partial A_{\mu}^{\alpha}}{\partial x_{\sigma}}-\begin{Bmatrix}\sigma\mu\\ \tau\end{Bmatrix}A_{\tau}^{\alpha}+\begin{Bmatrix}\sigma\tau\\ \alpha\end{Bmatrix}A_{\mu}^{\tau}. \tag{39}$$

β ҳәм σ индекслери бойынша (38)-формулада свертка ислесек (қыссақ – Б.А.) (δ_{β}^{σ} ға ишки көбейтиў) контровариантлы 4 вектор аламыз:

$$A^{\alpha}=\frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}}+\begin{Bmatrix}\beta\kappa\\ \beta\end{Bmatrix}A^{\alpha\kappa}+\begin{Bmatrix}\beta\kappa\\ \alpha\end{Bmatrix}A^{\kappa\beta}.$$

β ҳәм κ индекслерине салыстырғанда $\begin{Bmatrix}\beta\kappa\\ \alpha\end{Bmatrix}$ ның симметриялы екенлигинен егер $A^{\alpha\beta}$ антисимметрилық тензор болса (ендигиден былай сондай деп есаплаймыз) оң тәрептеги үшинши ағза нолге айланады; (29а) тийкарында екинши ағзаның түрлендирилиўи мүмкин. Солай етип алынады:

$$A^{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\left(\sqrt{-g}A^{\alpha\beta}\right)}{\partial x_{\beta}}. \tag{40}$$

Бул контравариант 6 вектордың дивергенциясы ушын аңлатпа болып табылады.

Екинши рангалы аралас тензордың дивергенциясы. Егер (39)-аңлатпаны α ҳәм β индекслери бойынша сверткаласақ (қыссақ - Б.А.) ҳәм (29а) ны басшылыққа алсақ, онда аламыз:

$$\sqrt{-g}A_{\mu}=\frac{\partial\left(\sqrt{-g}A^{\alpha\beta}\right)}{\partial x_{\beta}}-\begin{Bmatrix}\sigma\mu\\ \tau\end{Bmatrix}\sqrt{-g}A_{\tau}^{\sigma}. \tag{41}$$

Егер бул теңликтиң соңғы ағзасына $A^{\rho\sigma}=g^{\rho\tau}A_{\tau}^{\sigma}$ контравариант тензорын киргизсек, онда ол мына түрге ийе болады:

$$-\begin{bmatrix}\sigma\mu\\ \rho\end{bmatrix}\sqrt{-g}A^{\rho\sigma}.$$

Егер $A^{\rho\sigma}$ тензоры симметриялы болса, онда кейинги аңлатпа

$$-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}}A^{\rho\sigma}.$$

Тап сондай жоллар менен егер биз $A^{\rho\sigma}$ ның орнына симметриялы ковариант $A_{\rho\sigma} = g_{\rho\alpha}g_{\sigma\beta}A^{\alpha\beta}$ тензорын киргизген болсақ, онда (31) ге байланыслы кейинги ағза мына түрге ийе болған болар еди:

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}\frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}}A_{\rho\sigma}.$$

Солай етип биз қараған симметриялы тензор жағдайында (41)-аңлатпа төмендеги еки теңлик пенен алмастырылады:

$$\sqrt{-g}A_{\mu} = \frac{\partial\left(\sqrt{-g}A_{\mu}^{\sigma}\right)}{\partial x_{\sigma}} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}}\sqrt{-g}A^{\rho\sigma} \tag{41a}$$

ҳәм

$$\sqrt{-g}A_{\mu} = \frac{\partial\left(\sqrt{-g}A_{\mu}^{\sigma}\right)}{\partial x_{\sigma}} + \frac{1}{2}\frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}}\sqrt{-g}A_{\rho\sigma}. \tag{41б}$$

Усы аңлатпарадан биз ендигиден былай пайдаланамыз.

§ 12. Риман-Кристоффель тензоры

Енди фундаменталлық тензор $g_{\mu\nu}$ дан оны тек бир рет дифференциаллаўдан алыныўы мүмкин болган тензорларды қараймыз. Мәселеге биринши қарағанда жүдә әпиўайы болып көриниўи мүмкин. Жаңа тензорды, атап айтқанда фундаменталлық тензордың ковариант туўындысын алыў ушын (27) ге ықтыярлы түрде алынған $A_{\mu\nu}$ тензорының орнына фундаменталлық тензор $g_{\mu\nu}$ ди қойыў жеткиликли болатуғындай болып көринеди. Бирақ бул ковариант туўындының нолге тең болатуғынлығына аңсат көз жеткизиўге болады. Ал мақсетке былайынша жетиў мүмкин. (27)-қатнасқа $A_{\mu\nu}$ ушын аңлатпаны қоямыз

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\nu}} - \begin{Bmatrix}\mu\nu \\ \rho\end{Bmatrix} A_{\rho}.$$

Бул аңлатпа A_{μ} векторының тензорлық туўындысы болып табылады. Онда (индекслердиң белгилеўлерин бир қанша өзгертсек) үшинши рангалы тензор алынады:

$$A_{\mu\sigma\tau} = \frac{\partial^{2}A_{\mu}}{\partial x_{\sigma}\partial x_{\tau}} - \begin{Bmatrix}\mu\sigma \\ \rho\end{Bmatrix}\frac{\partial A_{\rho}}{\partial x_{\tau}} - \begin{Bmatrix}\mu\tau \\ \rho\end{Bmatrix}\frac{\partial A_{\rho}}{\partial x_{\sigma}} - \begin{Bmatrix}\sigma\tau \\ \rho\end{Bmatrix}\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\rho}} +$$
$$+\left[-\frac{\partial}{\partial x_{\tau}}\begin{Bmatrix}\mu\sigma \\ \rho\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\mu\tau \\ \alpha\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\sigma \\ \rho\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\sigma\tau \\ \alpha\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\mu \\ \rho\end{Bmatrix}\right]A.$$

Бул аңлатпа $A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma}$ тензорын дүзиў ойына алып келеди. Ҳақыйқатында бундай жағдайда $A_{\mu\sigma\tau}$ ушын келеси ағзалар $A_{\mu\tau\sigma}$ лардан сәйкес ағзалар менен жыйысады: биринши, төртинши және квадрат қаўсырманың ишиндеги ақырғы ағза. Себеби бул ағзалардың барлығы да σ менен τ ға карата симметриялы. Тап усындай сөзлер екинши ҳәм үшинши ағзалардың қосындысы ушын да дурыс. Солай етип, аламыз:

$$A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma} = B^{\rho}_{\mu\sigma\tau} A_{\rho}, \qquad (42)$$

$$B^{\rho}_{\mu\sigma\tau} = -\frac{\partial}{\partial x_{\tau}} \begin{Bmatrix} \mu\sigma \\ \rho \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} \begin{Bmatrix} \mu\tau \\ \rho \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mu\sigma \\ \alpha \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha\tau \\ \rho \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mu\tau \\ \alpha \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha\sigma \\ \rho \end{Bmatrix}. \qquad (43)$$

Бул нәтийжедеги әҳмийетлиси (42)-теңликтиң оң тәрепиндеги бөлиминде тек A_{ρ} 4 векторы турғанлығы, ал оның туўындысы жоқлығы. $A_{\mu\sigma\tau} - A_{\mu\tau\sigma}$ ның тензорлық характерде екенлигинен, соның менен бирге A_{ρ} ықтыярлы 4 вектор екенлигинен, 7-параграфта келтирлиген жуўмақлардан $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ ның тензор екенлиги келип шығады (Риман-Кристоффель тензоры).

Бул тензордың математикалық мәниси төмендегилерден ибарат. Егер континуум мына қәсийетке ийе болса: $g_{\mu\nu}$ турақлы шамалар болатуғын координаталар системасы бар болса, онда барлық $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ лар нолге айланады. Егер дәслепки системаның орнына қәлеген координаталар системасын қабыл ететуғын болсақ, онда $g_{\mu\nu}$ лар бул координаталар системасында турақлы болмайды. Бирақ $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ шамасының тензорлық характерге ийе екенлиги ықтыярлы түрде қабыл етилген системада өзиниң изинен барлық қураўшыларының нолге тең болыўына алып келеди. Демек, Риман тензорының нолге айланыўы $g_{\mu\nu}$ лардың турақлы болыўы ушын координаталар системасын сайлап алыўдың зәрүрли шәрти болып табылады[12]. Бизиң мәселемизде бул жағдай шекли областларда координаталар системасын сәйкес түрде сайлап алғанда арнаўлы салыстырмалық теориясының дурыс болатуғынлығынлығына сәйкес келеди.

(43)-аңлатпадағы $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ ушын τ ҳәм ρ индекслери бойынша қысыў 2-рангалы ковариант тензорды береди:

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}, \\ R_{\mu\nu} &= -\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \alpha \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mu\alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \nu\beta \\ \alpha \end{Bmatrix}, \\ S_{\mu\nu} &= \frac{\partial^2 lg\sqrt{-g}}{\partial x_{\mu} \partial x_{\nu}} - \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \alpha \end{Bmatrix} \frac{\partial lg\sqrt{-g}}{\partial x_{\alpha}}. \end{aligned} \qquad (44)$$

Координаталар системасын сайлап алыў бойынша ескертиў. 8-параграфтың өзиндеақ (18а) қатнасқа муўапық координаталар системасын $\sqrt{-g} = 1$ болатуғындай етип сайлап алыўдың артықмашлығы ескертилип өтилген еди. Кейинги еки параграфта алынған теңлемелерге итибар берилсе усындай сайлап алыўда тензорлардың пайда болыў нызамларының әдеўир әпиўайыласатуғынлығы көринеди. Мысалы баянланып атырған теорияда тийкарғы орынды ийелейтуғын ҳәзир ғана келтирилип шығарылған $B_{\mu\nu}$ тензоры ушын да дурыс. Атап айтқанда координаталарды усындай айрықша сайлап алыўдың нәтийжеси $S_{\mu\nu}$ диң нолге айланыўын тәмийинлейди ҳәм соның салдарынан $B_{\mu\nu}$ тензоры $R_{\mu\nu}$ тензорына алып келинеди.

Сонлықтан ендигиден былай барлық қатнасларды мен координаталар системасын арнаўлы түрде сайлап алыўдың нәтийжесинде келип шығатуғын әпиўайы түрде беремен. Еген қандайда бир дара жағдайларда зәрүрлик пайда болса *улыўма ковариант теңлемелерге* қайтып келиў қыйыншылық пайда етпейди.

---

[12] Математиклер бул шәрттиң және *жеткиликли* шәрт екенлигин дәлилледи.

B. ГРАВИТАЦИЯ МАЙДАНЫ ТЕОРИЯСЫ

§ 13. Гравитациялық майдандағы материаллық ноқаттың қозғалыс теңлемеси. Гравитация майданының қураўшылары ушын аңлатпа

Арнаўлы салыстырмалық теориясына сәйкес сыртқы тәсирлер тәсир етпейтуғын еркин дене туўры сызықлы ҳәм тең өлшеўли қозғалады. Улыўмалық салыстырмалық теориясының көз-қараслары бойынша бундай жағдай тек төрт өлшемли кеңисликтиң $g_{\mu\nu}$ (4) те көрсетилген арнаўлы турақлы мәнислерге ийе болатуғын K_0 координаталар системасын сайлап алыўға болатуғын бөлиминде ғана дурыс болады.

Егер биз бул қозғалысты ықтыярлы түрде сайлап алынған K_1 координаталар системасында қарайтуғын болсақ, онда бул дене 2-параграфтағы ой-пикирлер бойынша K_1 системасының көз-қарасы бойынша базы бир салмақ майданында қозғалады. K_1 системасына салыстырғандағы қозғалыс нызамы мына таллаўлар бойынша аңсат алынады. K_0 системасына қатнасы бойынша қозғалыс нызамы төрт өлшемли туўрыдан, яғный геодезиялықтан турады. Бирақ геодезиялық координаталар системасынан ғәрезсиз анықланатуғын болғанлықтан оның теңлемеси K_1 системасына салыстырғандағы материаллық ноқаттың қозғалыс теңлемеси де болып табылады.

$$\Gamma^{\tau}_{\mu\nu} = -\begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \tau \end{Bmatrix} \tag{45}$$

деп белгилеп K_1 ге салыстырғандағы ноқаттың қозғалыс теңлемесиниң былайынша жазылатуғынлығын табамыз

$$\frac{d^2x_\tau}{ds^2} = \Gamma^{\tau}_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds}. \tag{46}$$

Енди бул улыўма ковариантлық теңлемелер системасы ноқаттың гравитациялық майдандағы ҳәм кеңисликтиң шекли областларында арнаўлы салыстырмалы теориясы дурыс болатуғын K_0 системасы болмаған жағдайларда ноқаттың қозғалысын анықлайды деп тәбийий түрде есаплаймыз. Қала берсе биз бундай деп есаплаўға ҳуқықлымыз. Себеби (46)-теңлеме $g_{\mu\nu}$ дың тек биринши туўындыларына ийе, ал усы туўындылар арасында ҳәтте K_0 системасы бар болған дара жағдайда да қандайда бир қатнас жоқ[13].

Егер барлық $\Gamma^{\tau}_{\varpi\nu}$ лардың барлығы да нолге тең болған жағдайда ноқат туўры сызықлы ҳәм тең өлшеўли қозғалады. Демек бул шамалар қозғалыстың туўры сызықлықтан ҳәм тең өлшеўлиликтен аўысыўын тәмийинлейди. Олар гравитациялық майданның кураўшылары болып табылады.

§ 14. Материя болмаған жағдайдағы гравитациялық майданның теңлемеси

Ендигиден былай биз «гравитациялық майдан» менен «материя» ны бир биринен айырғанда гравитациялық майданнан басқаның барлығын «материя» мәнисинде түсинемиз. Бул өз гезегинде «материя» ға әдеттеги материя ғана емес, ал электромагнит майданың да киретуғынлығын билдиреди.

Бизиң жақын мәселемиз материя болмаған жағдайдағы гравитациялық майданның теңлемесин излеўден ибарат. Буның ушын өткен параграфта материаллық ноқаттың

---

[13] 12-параграфқа сәйкес тек екинши (биринши менен бирге) туўындылар арасында $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau} = 0$ қатнасы бар.

теңлемесин келтирип шығарғандағы пайдаланылған усылдан пайдаланамыз. $g_{\mu\nu}$ белгили болған турақлы мәнислерге ийе болатуғын басланғыш салыстырмалық теориясы изленип атырған теңлемелер алдын-ала қанаатландырылыўы шәрт дара жағдай болып табылыўы керек. Мейли бул дара жағдай анық K_0 координаталар системасына қатнасы бойынша базы бир шекли областта орынланатуғын болсын. Бул системада Риман тензоры $B^{\rho}_{\mu\sigma}$ ның барлық қураўшылары [(43)-формула] нолге айланады. Бирақ усындай жағдайда биз қарап атырған областтағы қәлеген координаталар системасында да олар нолге тең болады.

Солай етип материядан азат болған гравитациялық майданның изленип атырған теңлемелери қәлеген жағдайда егер барлық $B^{\rho}_{\mu\sigma}$ лар нолге тең болса орынланыўы керек. Бирақ бул шәрт алдын-ала жүдә көп нәрсени талап етеди. Ҳақыйқатында да, мысалы материаллық ноқат тәрепинен пайда етилген гравитация майданы ҳеш бир жағдайда да координаталар системасын қандай етип сайлап алыўдың нәтийжесинде «трансформацияланыўы» мүмкин емес, яғный турақлы $g_{\mu\nu}$ жағдайына түрлендириўи мүмкин емес.

Сонлықтан материядан азат болған гравитация майданында $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ тензорынан алынған симметриялы $B_{\mu\nu}$ тензорының нолге айланыўын талап етиў тәбийий болып көринеди. Усындай жоллар менен 10 дана $g_{\mu\nu}$ шамалары ушын 10 теңлеме алынады. Бул теңлемелер барлық $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ лар нолге тең болған дара жағдайда орынланады ҳәм материядан азат болған майдан ушын (44) ке байланыслы, координаталар системасын сайлап алғанда мына түрге ийе болады:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} = 0, \\ &\sqrt{-g} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

Атап айтыў керек, бул теңлемелерди сайлап алыў менен ықтыярлылықтың минимумы байланыслы. Себеби $g_{\mu\nu}$ лардан ҳәм олардың туўындыларынан, екинши тәртипли туўындыдан жоқары тәртипли туўындыларға ийе емес, оларға қарата сызықлы болған $B_{\mu\nu}$ дан басқа тензор жоқ[14].

Улыўмалық салыстырмалық принципинен таза математикалық жоллар менен келип шығатуғын бул теңлемелер (46)-қозғалыс теңлемеси менен бириккен ҳалда биринши жақынласыўда Ньютонның тартылыс нызамын бериў, ал екенши жақынласыўда Леверье тәрепинен анықланған Меркурийдиң перигелийиниң қозғалысын (возмущениеге дүзетиў берилгеннен кейин калатуғын қалдық) түсиндириў факти бизиң пикиримизше теорияның физикалық жақтан дурыс екенлигин исендириўи керек.

§ 15. Гравитациялық майдан ушын Гамильтон функциясы. Импульс пенен энергияның сақланыў нызамы

Майдан теңлемелериниң импульс пенен энергияның сақланыў нызамларына сәйкес келетуғынлығын көрсетиў ушын оларды төмендегидей Гамильтон формасында жазған қолайлырақ:

---

[14] Ҳақыйқатында буны тек $B_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu}\left(g^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}\right)$ тензоры ҳаққында гәп болғанда тастыйықлаў мүмкин (λ арқалы константа белгиленген). Бирақ оны нолге теңеп биз және $B_{\mu\nu} = 0$ теңлемесине қайтып келемиз.

$$\left.\begin{aligned} &\delta\left\{\int H d\tau\right\} = 0, \\ &H = g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}, \\ &\sqrt{-g} = 1. \end{aligned}\right\} \qquad (47а)$$

Бундай жағдайларда биз қарап атырған шекленген төрт өлшемли интеграллаў областының шегараларында вариациялар нолге тең.

Ең дәслеп (47а) теңлемелериниң (47)-теңлемелерге эквивалент екенлигин көрсетиў зәрүр. Усындай мақсетлерде H ты $g^{\mu\nu}$ менен $g^{\mu\nu}_{\sigma}\left(\equiv \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}}\right)$ дың функциясы сыпатында қараймыз. Дәслеп былайынша жазамыз:

$$\delta H = \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\delta g^{\mu\nu} + 2g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} = -\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\delta g^{\mu\nu} + 2\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\delta\left(g^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\right).$$

Бирақ

$$\delta\left(g^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\right) = -\frac{1}{2}\left[g^{\mu\nu}g^{\beta\lambda}\left(\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x_{\lambda}}\right)\right].$$

Әпиўайы қаўсырмадағы еки соңғы ағзадан алынатуғын аңлатпалар ҳәр қыйлы белгиге ийе болады ҳәм μ жәнe β индеслериниң орынларын алмастырып қойыў арқалы алынады (себеби суммалаў индекслериниң белгилери әҳмийетке ийе емес). δH ушын жазылған аңлатпада μ ҳәм β индекслерине қарата симметриялы болған $\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}$ шамасына көбейтилгеннен кейин олар бир бирин жоқ етеди. Солай етип әпиўайы қаўсырмалардағы тек биринши ағзаны есапқа алыў керек болады. Сонлықтан (31)-теңликти дыққатқа алып мынаған ийе боламыз

$$\delta H = -\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\delta g^{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\delta g^{\mu\beta}_{\alpha}.$$

Солай етип мынаған келемиз

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}} = -\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}, \\ &\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\sigma}} = \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}. \end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

(47а) да вариацияларды орынлап дәслеп мына теңлемелер системасын аламыз

$$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left(\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}\right) - \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}} = 0. \qquad (47б)$$

Бул система (48) ге муўапық (47) ге сәйкес келеди. Усыны дәлиллеў керек еди. (47б) ны $g^{\mu\nu}_{\sigma}$ ге көбейтип ҳәм

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}_{\sigma}}{\partial x_{\alpha}} = \frac{\partial g^{\mu\nu}_{\sigma}}{\partial x_{\sigma}}$$

екенлигин есапқа алып ҳәм соған сәйкес

$$g^{\mu\nu}_{\sigma}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right)=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\mu\nu}_\sigma\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right)-\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\frac{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}{\partial x_\sigma}$$

теңлиги орын алатуғын болғанлықтан

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\mu\nu}_\sigma\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right)-\frac{\partial H}{\partial x_\sigma}=0$$

теңлемесин аламыз ямаса[15]

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial t^\alpha_\sigma}{\partial x_\alpha}=0,\\&-2\kappa t^\alpha_\sigma=g^{\mu\nu}_\sigma\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}-\delta^\alpha_\sigma H.\end{aligned}\right\}\qquad(49)$$

Қала берсе (48)-теңлемелердиң, (47)-теңлемелердиң екиншисиниң ҳәм (34)-формула тийкарында

$$\kappa t^\alpha_\sigma=\frac{1}{2}\delta^\alpha_\sigma g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\lambda}-g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\sigma}\qquad(50)$$

қатнасының орынланыўы керек.

Енди t^α_σ ниң тензор емес екенлигин есте тутыў керек. (49)-теңлеме $\sqrt{-g}=1$ болған барлық координаталар системаларында дурыс. Бул теңлеме гравитация майданы ушын импульс пенен энергияның сақланыў нызамын аңлатады. Ҳақыйқатында да бул теңлемени үш өлшемли V көлеми бойынша интеграллаў төрт теңлемени береди:

$$\frac{d}{dx_4}\left\{\int t^4_\sigma dV\right\}=\int\left(t^1_\sigma a_1+t^2_\sigma a_2+t^3_\sigma a_3\right)ds.\qquad(49a)$$

Бул аңлатпадағы a_1, a_2, a_3 лер dS шегаралық бетиниң ишки нормалының бағытлаўшы косинуслары (Евклид геометриясы мәнисинде). Бул аңлатпада еки сақланыў нызамының да әдеттеги жазыў формасында бар екенлигинн көриў қыйын емес. Биз t^α_σ шамасын гравитациялық майданның «энергиясының қураўшылары» деп атаймыз[16].

(47)-теңлемени мәселени көргизбели түрде қарап шығыў ушын айрықша пайдалы және бир формада көрсетемиз. Майдан теңлемелери (47) ни $g^{\nu\sigma}$ ға көбейтиў арқалы бул теңлемелер «аралас» түрде алынады.

$$g^{\nu\sigma}\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\nu\sigma}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right)-\frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_\alpha}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$$

екенлигин басшылыққа алыў керек. Бул шама (34) тийкарында мынаған тең

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\nu\sigma}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right)-g^{\nu\beta}\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}-g^{\sigma\beta}\Gamma^\nu_{\beta\alpha}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$$

---

[15] 2к көбейтиўшисиниң пайда болыў себеби кейинирек анық болады.

[16] Ҳәзирги ўақытлары бул шаманы энергия-импульс псевдотензорының қураўшылары деп атайды (русша аўдарманың редакторының ескертиўи - Б.А.)

ямаса (сумалаў индекслериниң белгилерин өзгерткеннен кейин)

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\right)-g^{mn}\Gamma^\sigma_{m\beta}\Gamma^\beta_{n\mu}-g^{\nu\sigma}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha}.$$

Бул аңлатпаның үшинши ағзасы майдан теңлемеси (47) ниң екинши ағзасынан алынатуғын ағза менен жыйысады; бул аңлатпаның екинши ағзасының орнына (50)-қатнасты пайдаланып мынаны қойыўға болады

$$\kappa\left(t^\nu_\mu-\frac{1}{2}\delta^\sigma_\mu t\right),$$

бул аңлатпада $t=t^\alpha_\alpha$. Солай етип (47)-теңлемениң орнына

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\right)=-\kappa\left(t^\sigma_\mu-\frac{1}{2}\delta^\sigma_\mu t\right),\\&\sqrt{-g}=1.\end{aligned}\right\}\qquad(51)$$

алынады.

§ 16. Гравитациялық майданның улыўма түрдеги теңлемелери

Алдыңгы параграфта материя болмаған кенислик ушын келтирилип шығарылған майдан теңлемелерин Ньютон теориясындаға майдан теңлемеси менен салыстырыў керек:

$$\Delta\varphi=0.$$

Бизиң алдымызға

$$\Delta\varphi=4\pi\kappa\rho$$

Пуассон теңлемесине сәйкес келиўши теңлемени табыў шәрти қойылады. Бул аңлатпада ρ арқалы материяның тығызлығы берилген.

Арнаўлы салыстырмалық теориясы инерт массаны энергиядан басқа ҳеш нәрсе емес деген жуўмаққа келди. Энергияның толық математикалық аңлатпасы 2-рангалы симметриялық тензор, энергия тензоры менен бериледи. Сонлықтан улыўмалық салыстырмалық теориясына да гравитациялық майданның t^α_σ ның қураўшыларындай [(49)- ҳәм (50)-теңлемелер], бирақ соның менен бирге симметриялық ковариант тензорға сәйкес келиўши аралас характерге ийе базы бир материяның энергиясы тензоры T^α_σ ны киргизиўге туўра келеди[17].

(51)-теңлемелер системасы гравитация майданына бул энергия тензорын қалай киргизиўди көрсетеди (Пуассон теңлемесиндеги ρ тығызлығына сәйкес келиўши). Егер туйық системаны қарайтуғын болсақ (мысалы Қуяш системасын), онда системаның улыўмалық массасы ҳәм, соған сәйкес, оның улыўмалық гравитациялық тәсири системаның барлық энергиясынан ғәрезли болады (яғный салмаққа ийе материяның энергиясы менен салмақ майданының энергиясының қосындысынан). Бул жағдайды былай аңлатыў мүмкин: (51)-теңлемелерде тек гравитациялық майданның қураўшылары t^α_σ

---

[17] $g_{\alpha\tau}T^\alpha_\sigma=T_{\sigma\tau}$ хәм $g^{\alpha\beta}T^\alpha_\sigma=T^{\alpha\beta}$ лар симметриялы тензорлар болыўы керек.

лардың орнына материя энергиясының тензоры менен гравитациялық майдан тензорының суммасы $t_\mu^\sigma + T_\mu^\sigma$ ны қоямыз. Усындай етип (51) диң орнына тензорлық теңлеме алынады:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha\right) = -\kappa\left[\left(t_\mu^\sigma + T_\mu^\sigma\right) - \frac{1}{2}\delta_\mu^\sigma(t+T)\right], \\ &\sqrt{-g} = 1. \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

Бул аңлатпада $T = T_\mu^\mu$ (Лауэ скаляры). Алынған аңлатпа биз излеп атырған гравитациялық майданның аралас формадағы улыўмалық теңлемелери болып табылады. Буннан (47) ниң орнына керисинше ендиги теңлемелер системасы алынады:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\Gamma_{\mu\beta}^\alpha}{\partial x_\alpha} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha\Gamma_{\nu\alpha}^\beta = -\kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right), \\ &\sqrt{-g} = 1. \end{aligned}\right\} \quad (53)$$

Жоқарыдағыдай етип материяның энергиясы тензорын киргизиўди тек салыстырмалық постулаты менен тийкарлаўдың мүмкин емес екенлигин мойынлаўымыз керек. Сонлықтан биз гравитациялық майданның энергиясы тартылыс мәнисинде басқа барлық энергиядай тәсир етеди деген талаптан келип шықтық. Бирақ көрсетилген теңлемлердиң пайдасына хызмет ететуғын ең күшли аргумент мынадан ибарат: бул теңлемелерден (49)- ҳәм (49а)-теңлемелерге дәл сәйкес келиўши толық энергияның қураўшылары ушын энергия менен импульстың сақланыў теңлемелери келип шығады. Бул ҳаққында төменде айтылады.

§ 17. Улыўмалық жағдайдағы сақланыў нызамлары

(52)-теңлемени оң тәрепиндеги екинши ағзаның нолге айланыўы ушын түрлендириў қыйын емес. Буның ушын дәслеп μ ҳәм σ индекслери бойынша сверканың исленииўи, буннан кейин алынған теңлемени $1/2\delta_\mu^\sigma$ ға көбейтилген ҳалда (52)-теңлемеден алып таслаў керек. Сонда

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha - \frac{1}{2}\delta_\mu^\sigma g^{\lambda\beta}\Gamma_{\lambda\beta}^\alpha\right) = -\kappa\left(t_\mu^\sigma + T_\mu^\sigma\right) \quad (52a)$$

теңлемеси алынады. Бул теңлемеге $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ операциясын қолланып

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma}\left[g^{\sigma\beta}g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\lambda}\right)\right]$$

теңлемелерине ийе боламыз. Әпиўайы қаўсырмалардағы биринши ҳәм үшинши қосылыўшылар бир бирин жоқ ететуғын қосылыўшылар болып табылады. Бул айтылғанлардың дурыслығына егер үшинши ағзада бир тәрептен суммалаў индекслери α менен σ ны, екинши тәрептен β менен λ индекслерин орынларын алмастырып қойсақ аңсат исениўге болады. Екинши ағзаны (31) ге сәйкес түрлендириўге болады. Сонлықтан

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^3 g^{\sigma\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\mu} \tag{54}$$

аңлатпасын аламыз. (52а) ның шеп бөлиминдеги екинши ағза дәслеп

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\mu}\left(g^{\lambda\beta}\Gamma^\alpha_\beta\right)$$

ямаса

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\mu}\left[g^{\lambda\beta}g^{\alpha\delta}\left(\frac{\partial g_{\delta\lambda}}{\partial x_\beta}+\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x_\lambda}-\frac{\partial g_{\kappa\beta}}{\partial x_\delta}\right)\right]$$

аңлатпасын береди. Әпиўайы қаўсырмалардағы ақырғы ағзалардан алынатуғын ағза (29) ға байланыслы биз тәрепинен координаталарды сайлап алыўға байланыслы нолге айланады. Қалған еки ағзаны бириктириў мүмкин. Онда (31) қатнаслары тийкарында аламыз:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^3 g^{\sigma\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\mu}.$$

Усыған байланыслы (54)-теңлекти дыққат орайына алсақ, мына бирдейлик алынады:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}-\frac{1}{2}\delta^\sigma_\mu g^{\lambda\beta}\Gamma^\alpha_{\lambda\beta}\right)\equiv 0. \tag{55}$$

(55) пенен (52а) дан келип шығады

$$\frac{\partial\left(t^\sigma_\mu + T^\sigma_\mu\right)}{\partial x_\alpha} = 0. \tag{56}$$

Солай етип бизиң гравитациялық майдан теңлемелеринен импульс пенен энергияның сақланыў нызамларының орынланатуғынлығы келип шығады. Буның дурыслығына (49а) теңлемеге алып келетуғын таллаўдың тийкарында аңсат исениўге болады. Тек ғана гравитациялық майданның энергиясының қураўшылары t^σ_μ ның орнына материяның ҳәм гравитациялық майданның толық энергиясының қураўшыларын киргизиў керек.

§ 18. Материя ушын импульс пенен энергияның сақланыў нызамы майдан теңлемелериниң нәтийжеси сыпатында

(53)-теңлемени $\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$ ға көбейтип, 15-параграфта қолланылған усылдан пайдаланып ҳәм $g_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$ дың нолге тең екенлигин есте сақлап

$$\frac{\partial t^\alpha_\sigma}{\partial x_\alpha}+\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}T_{\mu\nu}=0$$

ямаса (56)-теңликтиң күшине сәйкес

$$\frac{\partial T_{\sigma}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}}+\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}}T_{\mu\nu}=0 \qquad (57)$$

теңлемесин аламыз.

(41б) менен салыстырыў координаталар системасын усындай етип сайлап алғанда бул теңлемениң материя энергиясының тензорының дивергенциясының нолге айланыўын аңлататуғынлығын көрсетеди. Шеп бөлимдеги екинши ағзаның болыўы физикалық көзқарастан тек бир материя ушын импульс пенен энергияның сақланыў нызамының ҳақыйқатында орынланбайтуғынлығын аңғартады. Анығырақ айтқанда сақланыў нызамлары тек ғана $g^{\mu\nu}$ турақлы шамалар болғанда, яғный гравитациялық майданның кернеўлиликлериниң қураўшылары нолге тең болғанда ғана орынланады. Бул екинши ағза импульс ҳәм, сәйкес, энергия ушын аңлатпа болып табылады. Олар ўақыт бирлигинде ҳәм көлем бирлигинде материяға гравитация майданы тәрепинен бериледи. Егер (57) ниң орнына (41)-қатнас түринде жазатуғын болсақ буның барлығы да түсиникли болады:

$$\frac{\partial T_{\sigma}^{\alpha}}{\partial x_{\alpha}}=-\Gamma_{\sigma\alpha}^{\beta}T_{\beta}^{\alpha}. \qquad (57a)$$

Бул теңлемениң оң бөлими гравитация майданының материяға энергиялық тәсирин аңлатады.

Солай етип гравитация майданының теңлемелери материаллық процесслер қанаатландырыўы керек болған төрт шәртке ийе болады. Егер материаллық процесслер бир биринен ғәрезсиз болған төрт дифференциал теңлемелердиң жәрдеминде тәрипленетуғын болса, онда бул шәртлер сол материаллық процесслердиң теңлемелери болып табылады[18].

Г. «МАТЕРИАЛЛЫҚ» ПРОЦЕССЛЕР

Б бөлимде баянланған математикалық жәрдемши қураллар бизге арнаўлы салыстырмалық теориясында келтирилип шығарылған физикалық нызамларды (гидродинамиканы, Максвелл электродинамикасын) олардың улыўмалық салыстырмалық теориясын қанаатландырыўы ушын улыўмаластырыўға мүмкиншилик береди. Бундай жағдайда салыстырмалықтың улыўмалық принципи ҳеш қандай таза шек коймай, соның менен бирге ҳеш қандай жаңа гипотезаларды қолланбай гравитациялық майданның барлық процесслерге тәсирин дәл тәриплеўге мүмкиншилик береди.

Бул жағдайдан материяның физикалық тәбиятына байланыслы ҳеш қандай болжаўларды киргизиўдиң керегиниң жоқ екенлиги келип шығады (тарырақ мәнисте). Мәселен, электромагнит майданы теориясы менен гравитация майданының теориясы материяның теориясы ушын база бола ала ма? деген сораў ашық қала алады. Салыстырмалықтың улыўмалық постулаты бул ҳаққында ҳеш нәрсе айта алмайды. Теорияның раўажланыў процессинде электродинамика жуўап бере алмаған сораўларға электродинамика менен тыртысыў ҳаққындағы тәлиматтың биргеликте жуўап бере алатуғынлығыны анықланады.

---

[18] Ср. D. Hilbert, Nachr. d. K. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. K1., 1915, 3.

§ 19. Сүйкелис болмаған жағдайлардағы адиабаталық суйықлықлар ушын Эйлер теңлемелери

Мейди p ҳәм ρ еки скаляр, олардың биринshисин суйықлықтың «басымы», ал екиншисин суйықлықтың «тығызлығы» деп атаймыз. Мейли олар базы бир теңлеме арқалы байланысқан болсын. Мейли және контрвариант симметриялы тензор

$$T^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta}p + \rho\frac{dx_{\alpha}}{ds}\frac{dx_{\beta}}{ds} \tag{58}$$

суйықлықтың энергиясының контравариант тензоры болсын. Оған

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}p + g_{\mu\alpha}\frac{dx_{\alpha}}{ds}g_{\nu\beta}\frac{dx_{\beta}}{ds}\rho \tag{58a}$$

ковариант тензоры және

$$T_{\sigma}^{\alpha} = -\delta_{\sigma}^{\alpha}p + g_{\sigma\beta}\frac{dx_{\beta}}{ds}\frac{dx_{\alpha}\rho}{ds} \tag{58б}$$

аралас тензоры сәйкес келеди[19].

(58б) теңлигиниң оң бөлимин (57а) теңлемеге қойып улыўмалық салыстырмалық теориясындағы Эйлердиң гидродинамикалық теңлемелерин аламыз. Принципинде бул теңлемелер қозғалыс проблемасын толық шешеди. Өйткени (57а) төрт теңлемеси p ҳәм ρ арасындағы берилген ғәрезлилик ҳәм

$$g_{\alpha\beta}\frac{dx_{\alpha}}{ds}\frac{dx_{\beta}}{ds} = 1$$

қатнасы менен берилген $g_{\alpha\beta}$ ушын төмендеги 6 белгисизди табыў ушын жеткиликли:

$$p,\ \rho,\ \frac{dx_1}{ds},\ \frac{dx_2}{ds},\ \frac{dx_3}{ds},\ \frac{dx_4}{ds}.$$

Егер және $g_{\mu\nu}$ да белгисиз болса, онда бурынғы теңлемелерге тағы (53)-теңлеме қосылады. Солай етип 10 дана $g_{\mu\nu}$ функцияларын анықлаў ушын 11 теңлемеге ийе боламыз. Усыған байланыслы белгисиз функциялардың алдын-ала анықланатуғындай болып көриниўи мүмкин. Бирақ (57а) теңлемениң (53)-теңлемелерде қурамында бар екенлигин аңлаў керек. Сонлықтан кейингилер 7 ден көп емес бир биринен ғәрезсиз теңлемелерди береди. Бул анықсызлықтың себеби координаталар системаларын кең түрде еркин сайлап алыўда болып табылады. Усының нәтийжесинде математикалық мәнисте мәселе сондай дәрежеде анық емес болып қалады, кеңисликлик функциялардың үшеўи ықтыярлы түрде сайлап алынады[20].

---

[19] Суйықлық пенен бирге қозғалыўшы бақлаўшы ушын арнаўлы салыстырмалық теориясы мәнисинде координаталар системасынының шексиз киши областы пайдаланылады. Бул жағдайда T_4^4 энергияның тығызлығы ρ – p ға тең.

[20] $g = -1$ координаталар системасынан бас тартылғанда еркин түрде сайлап алынатуғын *төрт* кеңисликлик функциялары қалады. Бул функциялар координаталарды сайлап алғанда еркин түрде сайлап алынатуғын төрт ықтыярлы функцияға сәйкес келеди.

§ 20. Вакуумдағы электромагнит майданының Максвелл теңлемелери

Мейли φ_ν электромагнит потенциалдың ковариант 4 векторының қураўшылары болсын. (36) ға муўапық олардан электромагнит майданының 6 векторының $F_{\rho\sigma}$ қураўшыларын дүземиз.

$$F_{\rho\sigma} = \frac{\partial\varphi_\rho}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\rho}. \tag{59}$$

(59)-қатнастан төмендеги теңлемелер системасының орынланатуғыны келип шығады:

$$\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial x_\tau} + \frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial F_{\tau\rho}}{\partial x_\sigma} = 0. \tag{60}$$

(37) ге байланыслы бул теңликтиң шеп бөлими 3-рангалы антисимметриялық тензор болып табылады. Солай етип (60)-система ҳақыйқатында төмендегидей түрдеги төрт теңлемени өз ишине алады:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial F_{23}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_3} = 0,\\
&\frac{\partial F_{34}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{41}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_4} = 0,\\
&\frac{\partial F_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{24}}{\partial x_1} = 0,\\
&\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_2} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{60а}$$

Бул теңлемелер системасы Максвелл теңлемелериниң екинши системасына сәйкес келеди. Егер төмендегидей белгилеўлер қабыл етилсе буған дәрҳәл исениўге болады:

$$\left.\begin{aligned}
&F_{23} = \aleph_x,\ F_{14} = \mathbf{l}_x,\\
&F_{31} = \aleph_y,\ F_{24} = \mathbf{l}_y,\\
&F_{12} = \aleph_z,\ F_{34} = \mathbf{l}_z.
\end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Бундай жағдайда үш өлшемли векторлық анализдиң белгилеўлеринде (60а) ның орнына былайынша жаза аламыз:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\aleph}{\partial t} + \mathrm{rot}\ \mathbf{l} = 0,\\
&\mathrm{div}\,\aleph = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{60б}$$

Максвелл теңлемелериниң биринши системасын Минковский тәрепинен берилген Максвелл теңлемелерин улыўмаластырыў арқалы аламыз. $F_{\alpha\beta}$ ковариант векторына сәйкес келиўши контравариант 6 вектор

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta} \tag{62}$$

ҳәм бослықтағы электр тоғының тығызлығы болған контравариант 4 вектор I_μ ды киргиземиз. Бундай жағдайда (40)-қатнасты еске алып қәлеген анықлаўшысы 1 ге тең (бизиң координаталарды сайлап алыўымызға муўапық) түрлендириўге қарата инвариант төмендегидей теңлемелер системасын жаза аламыз:

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = I^\mu. \tag{63}$$

Белгилеўлер киргиземиз:

$$\left.\begin{array}{ll} F^{23} = \boldsymbol{\aleph}'_x, & F^{14} = -\mathbf{l}'_x, \\ F^{31} = \boldsymbol{\aleph}'_y, & F^{24} = -\mathbf{l}'_y, \\ F^{12} = \boldsymbol{\aleph}'_z, & F^{34} = -\mathbf{l}'_z. \end{array}\right\} \tag{64}$$

Бул шамалар арнаўлы салыстырмалық теориясында сәйкес $\boldsymbol{\aleph}_x, \ldots \mathbf{l}_z$ шамаларына тең. Және белгилеўлер қабыл етемиз

$$I^1 = i_x,\ I^2 = i_y,\ I^3 = i_z,\ I^4 = \rho.$$

Булдай жағдайда (63) тиң орнына аламыз

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{rot}\ \boldsymbol{\aleph}' - \dfrac{\partial \mathbf{l}'}{\partial t} = \boldsymbol{i}, \\ \mathrm{div}\ \mathbf{l}' = \rho. \end{array}\right\} \tag{63a}$$

(60)-, (62)-, (63)-теңлемелер координаталарды сайлап алыў бойынша пайдаланылған усылдағы бослықтағы майдан ушын улыўмаласқан Максвелл теңлемелери болып табылады.

Электромагнит майданының энергиясы тензорының қураўшылары.

$$\kappa_\sigma = F_{\sigma\mu} I^\mu \tag{65}$$

ишки көбеймесин дүземиз. (61) ге сәйкес жазылған оның кураўшылары үш өлшемли белгилеўлерде мына түрге ийе болады

$$\left.\begin{array}{l} \kappa_1 = \rho \mathbf{l}_x + [\boldsymbol{i}, \boldsymbol{\aleph}]_x, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \kappa_4 = -(\boldsymbol{i}, \mathbf{l}). \end{array}\right\} \tag{65a}$$

κ_σ шамасы ковариант 4 вектор болып табылады. Оның қураўшылары электр зарядларынан электромагнит майданына көлем бирлигинде ҳәм ўақыт бирлигинде берилетуғын кери белгидеги импульске ямаса, сәйкес, энергияға тең. Егер электр зарядлары еркин болса, яғный олар тек электромагнит майданының тәсиринде ғана болса, онда κ_σ ковариант 4 векторы нолге айланады.

Энергия қураўшылары T_σ^ν дың қураўшыларын алыў ушын $\kappa_\sigma = 0$ теңлемесине (57)-теңлемениң түрин бериў жеткиликли. Бундай жағдайда (63) ҳәм (65) тен дәслеп аламыз

$$\kappa_\sigma = F_{\sigma\mu}\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(F_{\sigma\mu}F^{\mu\nu}\right) - F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}.$$

Оң бөлимдеги екинши ағзаның (60) қа сәйкес мынадай етип түрлендирилиўи мүмкин

$$F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} = -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -\frac{1}{2}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}.$$

Симметрия көз-қарасы бойынша кейинги аңлатпа былай да жазылады

$$-\frac{1}{4}\left[g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}F_{\mu\nu}\right].$$

Бирақ буның орнына былайынша жаза аламыз

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}\right)+\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\right).$$

Бул аңлатпаның биринши ағзасын мына түрде көрсетиўге болады

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right).$$

Екинши ағза болса дифференциаллаўдан ҳәм базы бир түрлендириўлерден кейин мына форманы қабыллайды

$$-\frac{1}{2}F^{\mu\tau}F_{\mu\nu}g^{\nu\rho}\frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial x_\sigma}.$$

Есапланылған барлық үш ағзаны бириктирип

$$\kappa_\sigma = \frac{\partial T_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2}g^{\tau\mu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}T_\sigma^\nu. \tag{66}$$

қатнасын аламыз. Қала берсе

$$T_\sigma^\nu = -F_{\sigma\alpha}F^{\nu\alpha} + \frac{1}{4}\delta_\sigma^\nu F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \tag{66a}$$

(66)-теңлик κ_σ нолге тең болғанда (30) ға сәйкес (57) ге ямаса, сәйкес, (57a) ға эквивалент. Демек T_σ^ν электромагнит майданының энергиясының қураўшылары болып табылады. (61) ҳәм (64) теңликлери жәрдеминде арнаўлы салыстырмалық теориясы жағдайында электромагнит майданының энергиясының бул қураўшыларының Максвелл-Пойнтингтиң белгили аңлатпасын қурайтуғынлығын аңсат көрсетиўге болады.

Солай етип биз $\sqrt{-g}$ болатуғын координаталар системасын пайдаланып гравитациялық майдан менен материя қанаатландыратуғын ең улыўмалық нызамларды келтирип шығардық ҳәм соның салдарынан бизлер формулалар менен есаплаўларды әдеўир әпиўайыластырдық. Усының менен бирге биз улыўмалық ковариантлық талабынан бас тартпадық. Себеби биз теңлемелеримизди координаталар систмасын тек арнаўлы түрде сайлап алыў арқалы улыўмаковариантлық теңлемелерден келтирип шығардық.

Бирақ бәри бир сақланыў нызамлары (импульстиң ҳәм энергияның) өз күшинде қала ма, және (56)- ҳәм, соған сәйкес (52)- ямаса (52а)-теңлемелер менен берилген гравитациялық майданның оң тәрепинде дивергенция (әдеттеги мәнисте), ал оң тәрепинде материя менен гравитациялық майданның энергияларының қосындысы турған теңлемелери гравитациялық майдан менен материяның энергияларының қураўшыларын сәйкес улыўмаластырып анықлағанда ҳәм координаталар системасы арнаўлы түрде сайлап алынбағанда өз күшинде қала ма деген сораў формал түрдеги қызығыўшылық пайда етеди. Мен буның ҳақыйқатында да тап сондай екенлигин таптым. Бирақ мен бул сораў бойынша жеткиликли дәрежедеги узын-шубай таллаўды мақсетке муўапық келеди деп есапламайман. Себеби бундай таллаўдың нәтийжесинде айта қалғандай жаңа ҳеш нәрсе де табылмайды.

§ 21. Ньютон теориясы биринши жақынласыў сыпатында

Көп санлы айтылып өтилгениндей арнаўлы салыстырмалық теориясы улыўмалық салыстырмалық теориясының дара жағдайы сыпатында $g_{\mu\nu}$ дың (4) турақлы мәнислерине ийе болыўы менен характерленеди. Жоқарыда баянғанларға муўапық бул гравитациялық тәсирлесиўдиң толық есапқа алынбайтуғынлығын билдиреди. Егер биз $g_{\mu\nu}$ ди (4) теги мәнислерден киши шамаларға (1 ге салыстырғанда) айрылатуғын болса деп есапласақ биз ҳақыйқатлыққа бираз жақынласамыз. Бундай жағдайда биз екинши ҳәм оннан да жоқары болған тәртиптеги киши шамаларды есапқа алмаймыз (Тийкарғы теңлемелерди жуўық шешиўдиң дәслепки шәрти)

Буннан кейин биз қарап атырған кеңислик-ўақытлық областта координаталар системасын сәйкес сайлап алғанда $g_{\mu\nu}$ дың мәниси кеңислик бойынша шексизликте (4) теги мәнислерине умтылады деп есаплаймыз. Бул тек кеңисликтиң шекли областындағы материя тәрепинен пайда етилген гравитациялық майданды қарап атырмыз дегенди аңлаталы.

Усындай есапқа алмай кетиў Ньютон теориясына алып келеди деп ойлаў мүмкин. Бирақ бул ушын тийкарғы теңлемелерде екинши көз-қарастан базы бир есапқа алмай кетиўлерге жол қойыў талап етиледи. (46)-теңлемелерди қанаатландырыўшы материаллық ноқаттың қозғалысын қараймыз. Арнаўлы салыстырмалық теориясында

$$\frac{dx_1}{ds}, \quad \frac{dx_2}{ds}, \quad \frac{dx_3}{ds}$$

қураўшылары қәлеген мәниске ийе бола алады. Бул өз гезегинде жақтылықтың бослықтағы тезлигинен киши ($v < 1$) қәлеген тезликлердиң болыўының мүмкин екенлигин аңлатады:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dx_4}\right)^2}$$

Егер v жақтылықтың тезлигине салыстырғанда аз болса (тәжирийбеде дерлик барлық ўақытта да бул жағдай орынланады), онда бул

$$\frac{dx_1}{ds}, \quad \frac{dx_2}{ds}, \quad \frac{dx_3}{ds}$$

шамаларының киши шамалар деп қаралыўы керек, ал $\frac{dx_4}{ds}$ тиң екинши тәртипли шамасы дәллигинде 1 ге тең болады (Тийкарғы теңлемелерди жуўық шешиўдиң екинши шәрти).

Тийкарғы теңлемелерди жуўық шешиўдиң дәслепки шәртине байланыслы барлық $\Gamma_{\mu\nu}^{\tau}$ шамаларының ең keминде биринши тәртипли киши шамалар екенлигин дыққатқа аламыз. Бирақ бул жерден мына жағдай келип шығады: бизиң екинши болжаўымызға сәйкес (46) да тек $\mu = \nu = 4$ болған ағзалардың есапқа алыныўы керек. Төменги тәртиптеги ағзалар менен шекленип биз (46) ның орнына дәслеп мына теңлемелерди аламыз:

$$\frac{d^2x_\tau}{dt^2} = \Gamma_{44}^{\tau},$$

қала берсе $ds = dx_4 = dt$. Тек биринши тәртипли ағзаларды алып мынаған ийе боламыз:

$$\frac{d^2x_\tau}{dt^2} = \begin{bmatrix}44\\ \tau\end{bmatrix}, \qquad (\tau = 1{,}2{,}3).$$

$$\frac{d^2x_4}{dt^2} = \begin{bmatrix}44\\ 4\end{bmatrix}.$$

Егер усылардан басқа гравитациялық майданды квазистатикалық деп есапласақ, яғный гравитациялық майданды пайда етиўши материя әстелик пенен қозғалады (жақтылықтың тарқалыў тезлигине салыстырғанда) деп қабыл етсек, онда оң тәрептеги кеңисликлик координата бойынша алынған туўындылардың қасында ўақыт бойынша алынған туўындыны есапқа алмаўға болады ҳәм соған сәйкес алынады:

$$\frac{d^2x_\tau}{dt^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_\tau}, \qquad (\tau = 1{,}2{,}3). \qquad (67)$$

Бул Ньютон теориясындағы материаллық ноқаттың қозғалыс теңлемеси болып табылады. Бул теңлемеде $\frac{g_{44}}{2}$ гравитациялық потенциалдың орнын ийелейди. Бул нәтийжениң әҳмийети соннан ибарат, биринши жақынласыўда фундаменталлық тензордың тек бир қураўшысы g_{44} материаллық ноқаттың қозғалысын анықлайды.

Енди майдан теңлемеси (53) ке кеўил аўдарамыз. Бундай жағдайда «материя»ның энергиясы тензорының дерлик тек материяның тығызлығы ρ арқалы, яғный (58) диң оң бөлиминиң екинши ағзасы [ҳәм сәйкес (58а) ямаса (58б)] анықланатуғынына итибар бериў керек (бул сөздиң ең тар мәнисинде). Бизди қызықтыратуғын жақынласыўда $T_{44} = \rho = T$ лардан басқа барлық қураўшылар нолге тең болады. (53)-теңлемениң шеп бөлиминдеги екинньши ағза кишилиги бойынша екинши тәртипли шаманы курайды, ал биринши ағза бизди қызықтыратуғын жақынласыўда мына түрге енеди:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\begin{bmatrix}\mu\nu\\ 1\end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2}\begin{bmatrix}\mu\nu\\ 2\end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_3}\begin{bmatrix}\mu\nu\\ 3\end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_4}\begin{bmatrix}\mu\nu\\ 4\end{bmatrix}.$$

Бул аңлатпа $\mu = \nu = 4$ те ҳәм ўақыт бойынша алынған туўындыларды таслап кеткенде мына түрге енеди:

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_3^2}\right) = -\frac{1}{2}\Delta g_{44}.$$

Солай етип, (53)-теңлемелердиң ең кейингисиниң былайынша жазылыўы мүмкин:

$$\Delta g_{44} = \kappa\rho. \qquad (68)$$

(67)-менен (68)-теңлемелер бирге алғанда Ньютонның тартылыс нызамына эквивалент.

Гравитациялық потенциал ушын (67)- ҳәм (68)-теңлемелер тийкарында мына аңлатпа алынады

$$-\frac{\kappa}{8\pi}\int\frac{\rho d\tau}{r}. \qquad (68а)$$

Ал Ньютон теориясы болса биз сайлап алған ўақыт бирлигиндеги бул шама ушын мына аңлатпаны береди

$$-\frac{K}{c^2}\int\frac{\rho d\tau}{r}.$$

Бул аңлатпадағы K шамасы 6,7*10^{-8} ге тең әдеттеги гравитация турақлысы. Еки аңлатпаны салыстырып мына шама алынады:

$$\kappa = \frac{8\pi K}{c^2} = 1{,}87 * 10^{-27}.$$

§ 22. Статикалық гравитация майданындағы масштаблар менен саатлардың қәсийетлери. Жақтылық нурының майысыўы. Планеталар орбиталарының перигелийиниң қозғалысы

Биринши жақынласыў сыпатында Ньютон теориясын алыў ушын гравитациялық потенциал $g_{\mu\nu}$ диң 10 қураўшыларының ишинен тек g_{44} ти есаплаўға туўры келди, себеби бул қураўшы биринши жақынласыўда гравитациялық майдандағы материаллық ноқаттың қозғалыс теңлемеси (67) ге киреди. Биринши жақынласыўда $g_{\mu\nu}$ диң басқа кураўшылары да (4) теги шамаларынан парық қылыўы керек. Себеби олар g = -1 шәрти менен байланысқан.

Майдан пайда етиўши ҳәм координата басында турған материаллық ноқат ушын биринши жақынласыўда радиаллық симметриялық шешим алынады:

$$\left.\begin{aligned} g_{\rho\sigma} &= -\delta_{\rho\sigma} - \alpha\frac{x_\rho x_\sigma}{r^3}, \quad (\rho,\sigma = 1,\ 2,\ 3), \\ g_{\rho 4} &= g_{4\rho} = 0, \quad (\rho = 1,\ 2,\ 3), \\ g_{44} &= 1 - \frac{\alpha}{r}. \end{aligned}\right\} \qquad (70)$$

Бул аңлатпада ρ = σ ямаса ρ ≠ σ ға байланыслы $\delta_{\rho\sigma}$ сәйкес 1 ге ямаса 0 ге тең, ал

$$r = +\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Усының менен бирге (68а) га байланыслы ийе боламыз:

$$\alpha = \frac{\kappa M}{4\pi}. \qquad (70a)$$

Бул жерде М арқалы майдан пайда етиўши масса белгиленген. Бул шешимниң биринши жақынласыўда майдан теңлемелерин (массадан тыстағы) қанаатландыратуғынлығын аңсат тексерип көриўге болады.

Енди массасы М болған дениниң майданының кеңисликтиң метрлик қәсийетлерине тәсирин изертлеймиз. «Локаллық» өлшенген узынлық (§ 4 ти қараңыз) ҳәм ўақыт аралығы ds бир тәрептен ҳәм екинши тәрептен координатаның өсими dx_ν арасында барлық ўақытта да қатнас орын алады:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu.$$

Мысалы x көшерине параллел болған масштаб бирлиги ушын былайынша жазыў керек:

$$ds^2 = -1, \qquad dx_2 = dx_3 = dx_4 = 0.$$

яғный

$$-1 = g_{11}dx_1^2.$$

Егер масштаб бирлиги соның менен бирге x көшериниң өзиниң үстинде жатса, онда (70)-теңлемелердиң биринишиси мынаны береди

$$g_{11} = -\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right).$$

Кейинги қатнаслардың екеўинен биринши жақынласыўда келип шығады:

$$dx = 1 - \frac{\alpha}{2r}. \qquad (71)$$

Солай етип егер бирлик масштаб радиал бағытта қойылған болса, онда биз қарап атырған координаталар системасында, гравитациялық майданның болыўының салдарынан, ол биз тапқан қатнаста қысқарған болып шығады.

Тап сондай жоллар менен егер, мысал ретинде

$$ds^2 = -1, \qquad dx_1 = dx_3 = dx_4 = 0,$$

$$x_1 = r, \qquad x_2 = x_3 = 0.$$

түринде алсақ көлденең бағыт жағдайындағы масштабтың координаталық узынлығын аламыз. Бундай жағдайда ийе боламыз

$$-1 = g_{22}dx_2^2 = -dx_2^2. \qquad (71a)$$

Солай етип масштабқа көлденең бағытта түсиргенде материаллық ноқаттың гравитациялық майданы стерженниң узынлығына ҳеш қандай тәсир жасамайды екен.

Демек гравитациялық майданда егер бир кесиндини реализациялаў сыпатында биз бир стерженди ҳәр қыйлы орынларда ҳәм ҳәр қыйлы жағдайларда пайдалансақ Евклид геометриясы ҳәтте биринши жақынласыўда да дурыс болмайды. Бирақ (70a)- ҳәм (69)-қатнаслар Евклид геометриясынан күтилетуғын аўытқыўлардың Жердиң бетинде өлшеўлер жүргизилгенде сезиў мүмкин болмайтуғындай оғада киши болатуғынлығын көрсетеди.

Мейли енди статикалық гравитация майданында тынышлықта туратуғын эталон саатлардың жүриуиниң тезлиги изертленетуғын болсын. Бул жағдайда ўақыттың бирлик интервалы ушын ийе боламыз:

$$ds = 1, \qquad dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0.$$

Демек

$$dx_4 = \frac{1}{\sqrt{g_{44}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (g_{44} - 1)}} = 1 - \frac{g_{44} - 1}{2}$$

ямаса

$$dx_4 = 1 + \frac{\kappa}{8\pi} \int \frac{\rho d\tau}{r}. \qquad (72)$$

Солай етип салмақлы массаларға жақын орнатылган саатлардың әстерек жүретуғынлығын көремиз. Буннан үлкен жулдызлардың бетинен бизге келип жететуғын жақтылықтың спектраллық сызықларының спектрдиң қызыл тәрепине аўысыўының керек екенлиги келип шығады[21].

Буннан былай статикалық гравитация майданындағы жақтылық нурының жолын изертлеймиз. Арнаўлы салыстырмалық теориясы бойынша жақтылықтың тарқалыўы

$$-dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + dx_4^2 = 0$$

теңлемеси менен тәрипленеди. Демек улыўмалық салыстырмалық теориясында бул тезлик

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = 0 \qquad (73)$$

теңлемеси жәрдеминде анықланады. Егер нурдың бағыты берилген болса (яғный dx_1:dx_2:dx_3 қатнасы берилген болса), онда (73)-теңлемеден

$$\frac{dx_1}{dx_4}, \quad \frac{dx_2}{dx_4}, \quad \frac{dx_3}{dx_4}$$

шамаларын есаплаў мүмкин ҳәм солай етип Евклид геометриясы мәнисиндеги тезлик

$$\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dx_4}\right)^2} = \gamma$$

тезлигин анықлаў мүмкин. Бул жерде егер $g_{\mu\nu}$ турақлы болмаса жақтылық нурларының координаталар системасына салыстырғанда майысатуғынлығын аңсат көриуге болады. Егер n арқалы жақтылықтың тарқалыў тезлигине перпендикуляр бағыт белгиленген болса, онда Гюйгенс принципи тийкарында [(γ,n) тегислигинде қаралып атырған] жақтылық нурының $-\frac{\partial \gamma}{\partial n}$ иймеклигине (майысыўына – Б.А.) ийе болатуғынлығы келип шығады.

Енди M массасынан базы бир Δ қашықлығынан өтетуғын жақтылық нурының майысыўын изертлеймиз (1-сүўрет). Егер коориданата системасын сүўретте көрсетилгендей етип сайлап алсақ, онда жақтылық нурының улыўмалық майысыўы B (егер нурдың траекториясы координата басына өзиниң иймейген тәрепи менен қараған

---

[21] Э.Фройндлих тәрепинен жүргизилген белгили бир типтеги жулдызларды спектраллық бақлаўдың нәтийжелери усындай эффекттиң орын алатуғынлығының пайдасына сәйкес келеди. Бирақ биз алған нәтийжелерди толық тексерип көриў ислери еле жүргизилген жоқ.

болса оң деп қабыл етиледи) жеткиликли дәрежедеги жақынласыўда

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \gamma}{\partial x_1} dx_2$$

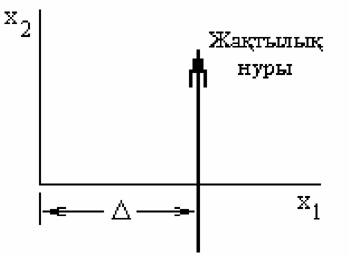
аңлатпасы менен бериледи. Қала берсе (73) пенен (70) тен алынады:

$$\gamma = \sqrt{-\frac{g_{44}}{g_{22}}} = 1 - \frac{\alpha}{2r}\left(1 + \frac{x_2^2}{r^2}\right).$$

Есаплаўлар мынаны береди

$$B = \frac{2\alpha}{\Delta} = \frac{\kappa M}{2\pi\Delta}. \tag{74}$$

Бул формулаға муўапық Қуяштың қасынан өтип баратырған жақтылық нуры 1'',7 ге ал Юпитер планетасы қасынан өтип баратырған жақтылық нуры шама менен 0'',02 ге бағытын өзгертеди.



1-сүўрет.

Егер салмақ майданын жоқарырақ тәртиптеги шамалар дәллигинде есапласа ҳәм соған сәйкес дәлликте массасы шексиз киши болған материаллық ноқаттың орбита бойынша қозғалысын есапласа, онда Кеплер-Ньютонның планеталардың қозғалыс нызамынан төмендегидей аўытқыўлар табылады. Планетаның эллипс тәризли орбитасы планетаның қозғалыс бағытында ҳәм сол планетаның толық бир айланып шығыў дәўиринде

$$\varepsilon = 24\pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)} \tag{75}$$

мәнисине тең шамаға әстелик пенен бурылады. Бул формуладағы а орбитаның үлкен ярым көшери, с әдеттеги бирликлердеги жақтылықтың тезлиги, е орбитаның эксцентриситети, Т арқалы секундлардағы планетаның айланыў дәўири белгиленген[22].

Меркурий планетасы ушын ҳәр жүз жылда 43'' қа тең болған орбитаның бурылыўы алынады. Бул шама астрономлар тәрепинен табылған шамаға дәл сәйкес келеди (Леверье). Астрономлар ҳақыйқатында да бул планетаның перигелийиниң улыўмалық қозғалысының базы бир бөлегиниң басқа планеталардың тәсирине болмайтуғынлығын ҳәм жоқарыда көрсетилген шамаға тең екенлигин тапты.

1916-жыл 20-март күни келип түсти.

---

[22] Есаплаўлар менен қызығыўшыларға мына оригиналлық жумысларды көриўди усынамыз:
A. Einstein. Sitzungsber, preuss. Akad. Wiss., 1915, 47, 2, 831.
K. Schwarzschi1d. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1916, 189.