ӨЗБЕКИСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ЖОҚАРЫ ҲӘМ ОРТА АРНАЎЛЫ
БИЛИМ МИНИСТРЛИГИ

БЕРДАҚ АТЫНДАҒЫ ҚАРАҚАЛПАҚ МӘМЛЕКЕТЛИК УНИВЕРСИТЕТИ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАКУЛЬТЕТИ

ФИЗИКА КАФЕДРАСЫ

Физика-математика факультетиниң физика қәнигелигигиниң (Тәлим бағдары: 5140200 – Физика) 4- курс студентлери ушын (7-семестр) "Гравитацияның релятивистлик теориясы" пәни бойынша

ЛЕКЦИЯЛАР ТЕКСТЛЕРИ

Билим тараўы:	100000 – гуманитар бөлим.
Тәлим тараўы:	140000 – тәбийий пәнлер.
Тәлим бағдары:	5140200 – физика.

Лекциялар 16 саат. Студентлердиң өз бетинше ислеўи ушын 36 саат белгиленген.

Нөкис – 2016

Аннотация

16 саатлық лекциялық курста гравитация ҳаққындағы көз-караслардың раўажланыўы, гравитация нызамларының дөретилиўи ҳәм ҳәзирги заман релиятивиситлик гравитация теориясы болған А.Эйнштейнниң гравитация теориясының физикалық тийкарлары банланған. Курста Ньютонның гравитация теориясы менен Эйнштейнниң гравитация теориялары арасындағы айырма ашық түрде баянланған.

Эйнштейнниң релятивистлик гравитация теориясы тийкарында Әлем ҳәм космология ҳаққындағы ҳәзирги заман тәлиматының физикалық бийкарлары берилген.

Пәнниң сабақларға мөлшерленген оқыў программасы Қарақалпақ мәмлекетлик университетиниң илимий-методикалық кеңесиниң 2016-жыл 23-июнь күнги мәжилисинде қарап шығылды ҳәм мақулланды. Протокол номери 7.

Пәнниң сабақларға мөлшерленген оқыў программасы физика-математика факультетиниң илимий кеңесиниң 2016-жыл 22-июнь күнги мәжилисинде талқыланды ҳәм мақулланды. Протокол саны 11.

Пәнниң сабақларға мөлшерленген оқыў программасы физика кафедрасының 2016-жыл 15-июнь күнги мәжилисинде талқыланды ҳәм мақулланды. Протокол саны 21.

МАЗМУНЫ

Релятивистлик гравитация теориясы

1-лекция. Классикалық физикадағы қозғалыстың салыстырмалығы. Галилейдиң салыстырмалық принципи. Эйнштейнниң салыстырмалық принципи. Тәсирлесиўдиң тарқалыўы ушын шекли тезликтиң бар екенлиги принципи. Жақтылықтың тезлиги фундаменталлық физикалық шама сыпатында

Кирисиў. Релятивистлик гравитация теориясы тартылысты (гравитацияны) төрт өлшемли кеңислик-ўақыттың қыйсықлығы менен байланыстыратуғын ҳәзирги заман тартылыс теориясы болып табылады.

Өзиниң классикалық вариантында тартылыс теориясы XVII әсирдиң екинши ярымында Исаак Ньютон тәрепинен дөретилди ҳәм ҳәзирги ўақытларға шекем адамзатқа хызмет етип киятыр. Бул теория ҳәзирги заман астрономиясының, астрофизикасының, космонавтикасының көпшилик мәселелерин шешиў ушын толық жарамлы. Бирақ соған қарамастан оның ишки кемшилиги Ньютонның өзине де белгили еди. Бул теория узақтын тәсир ететуғын теория болып табылады ҳәм онда бир денениң екинши денеге гравитациялық тәсири кешигиўсиз бир заматта бериледи. Кулон нызамының Максвелл электродинамикасына қандай қатнасы болса, Ньютонның гравитация теориясы да улыўмалық салыстырмалық теориясы менен сондай қатнаста. Дж.К. Максвелге электродинамикадан узақтан тәсирлесиўди алып таслаўға сәти түсти. Ал гравитацияда болса буны Альберт Эйнштейн орынлады.

1905-жылы А.Эйнштейн арнаўлы салыстырмалық теориясын дөретти. Усының менен бирге классикалық электродинамиканың раўажланыўын идеялық жақтан жуўмақлады. А.Эйнштейнниң алдында Х.А.Лоренц пенен Ж.А.Пуанкарениң жумысларында дара салыстырмалық теориясының көплеген элементлери бар еди. Бирақ жоқары тезликлердеги физиканың тутас картинасы тек Альберт Эйнштейнниң жумысында дөретилди.

Арнаўлы салыстырмалық теориясын дөретпей, классикалық электродинамиканың структурасын терең түсинбей, кеңислик-ўақыттың бирлигин санаға сиңдирмей турып ҳәзирги заман гравитация теориясын дөретиў ҳәм уғыў мүмкин емес. Улыўмалық салыстымалылық теориясы ушын математиканың тутқан орны уллы. Оның аппараты болған тензорлық анализ ямаса абсолют дифференциал есаплаў Г.Риччи ҳәм Т.Леви-Чивита тәрепинен раўажландырылды.

Улыўмалық салыстырмалық теориясы физикалық теория болып табылады. Оның тийкарында анық физикалық принцип (эквивалентлик принципи), экспериментлерде тастыйықланған анық фактлер жатады.

Эйнштейнниң салыстырмалықтың улыўмалық принципи (улыўмалық салыстырмалық теориясы) бойынша ең биринши жумысы ретинде 1914-жылы Берлин Илимлер Академиясының протоколларында жарық көрген "Улыўмалық салыстырмалық теориясының формал тийкарлары" (Berlin. Sitzungsberiehte der Preussischen Akademie der Wissenscften. 1914. T. XLI) мийнетин қабыл етиў керек. Бир қанша дүзетиўлер қосымшалар киргизилген бул жумыс 1916-жылы Annalen d.Physik журналында жарық көрди. Мақаланың оттисклери сатыўға тарқатылды. Усының салдарынан Эйнштейнниң жумысы көпшиликке белгили болды. 1915-1916 жыллары Лейденде салыстырмалық теориясы бойынша лекциялар оқыған Lorentz бул теорияны «Эйнштейнниң тартылыс теориясы», математик Hubert 1915-1916 жыллары жарық көрген мақалаларын «Die Grundlagen der Physik» (Физика тийкарлары), ал математик Weyl 1918-жылы шыққан ҳәм бул теорияға бағышлаған китабын „Raum, Zeit, Malerie" (Кеңислик, ўақыт, материя) деп атады. Усы атлардың өзи Эйнштейн тәрепинен дәретилген теорияның барлық физиканы қамтыйтуғынлығын көрсетеди, ал бундай теорияның үлкен қызығыўшылықты пайда етпеўи мүмкин емес. Сонлықтан бул теория пайда болыўдан оның менен Lorentz, Hubert, Weyl усаған атақлы физиклер менен математиклер шуғыллана баслады. Бирақ теорияны белгили бир дәрежеде толық ҳәм тийкарлы етип баянлаў физиклер ушын үлкен қыйыншылық пайда ететуғын жүдә қурамалы математикалық аппаратты талап етеди. Бул теорияны көпшилик ушын баянлаў оның қаншама жақсы жазылғанлығына қарамастан түсиниксиз, дәл емес, думан тәризли образларды ғана бере алады.

Эйнштейнниң гравитация теориясы усы дәўирге шекем дөретилген теориялардың ишиндеги ең сулыў ҳәм математикалық жақтан жүдә қурамалы теория болып табылады. 1915-жылы толық дөретилип болыўына қарамастан бул теория 1960-жылларға шекем көплеген физиклер тәрепинен итибарға алынбады. Бирақ илимде, әсиресе астрономия менен астрофизикада, элементар бөлекшелер физикасында ашылған жаңалықлар Эйнштейнниң теориясына болған физиканың ҳәр қыйлы тараўлары бойынша ислеп атырған илимпазлардың қызығыўшылықларын арттырды ҳәм соған сәйкес бул бойынша орынланған илим-изертлеў жумысларының санын көбейтип жиберди.

Ең әҳмийетли мәселе улыўмалық салыстырмалық теориясының тийкарғы мәнисин, оның беретуғын нәтийжелерин көпшилик физиклерге түсиндириў машқаласы пайда болды. Бул бағдарда исленген ең әҳмийетли жумыс Л.Д.Ландау менен Е.М.Лифшицтиң көп томлық «Теориялық физика» китабының II томы болған «Майданлар теориясы» китабы (ең дәслепки басылыўы 1937-жылы әмелге асырылды) болып табылды. Бул китап бизиң әсиримизге шекем көп санлы қайтадан басылыўларға миясар болды (мысалы 1963-жылы алтыншы, ал 2001-жылы сегизинши рет баспадан шықты).

Улыўмалық салыстырмалық теориясы, оның теңлемелерин келтирип шығарыў менен теңлемелериниң дәл шешимлерин есаплаў, теңлемелерди айқын мәселелерди шешиўге қолланыў бойынша көп санлы китаплар да жарық көрди. Олардың айырымларының дизими питкериў қәнигелик жумысының ақырында берилген.

Internet тиң пайда болыўы салыстырмалық теориясының кең түрде үгит-нәсиятланыўына алып келди. Көп санлы арнаўлы сайтлар пайда болды. Олардан төмендегилерди атап өтемиз:

http://marxists.nigilist.ru/reference/archive/einstein/works/1910s/relative/index.htm

http://marxists.nigilist.ru/reference/archive/einstein/index.htm
http://www.theeinsteinfile.com/
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/%7Ehistory/References/Einstein.html
http://www.thegreatvoid.net/Special_Interests/Space_Time/General_reletivity.htm
http://www.alberteinstein.info/finding_aid/
http://www.albert-einstein.org/
http://www.albert-einstein.com/

http://asf.ur.ru/Web_pilot/news_p.htm
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/General_relativity.html

Internet те улыўмалық салыстырмалық теориясына арналған илимий, көпшиликке арналған материаллардың санының көбейиўи менен бирге бул теорияны түсиндириўде қәтеликке жол қоятуғын авторлардың мақалалары да, ҳәтте улыўмалық салыстырмалық теориясының дурыслығына гүмән пайда ететуғын материаллар да көбеймекте. Соның менен бирге қурамалы теорияны қурамалы математикалық аппаратты қолланып түсиндириў көплеген авторлар ушын кең терқалған дәстүрге айланбақта.

Жоқарыда айтылғанларға байланыслы Эйнштейнниң гравитация теориясын ең әпиўайы жоллар менен түсиндириўди әмелге асырыў усы ўақытларға шекемги әҳмийетли мәселелердиң бир болып киятыр.

Бир қанша тарийхый мағлыўматлар. Егер орайлық дене әтирапында айланыўшы бөлекшеге қосымша сыртқы күшлер тәсир етпесе, онда бул бөлекше гравитациялық Ньютон күшиниң тәсиринде барлық ўақытта да бир эллипс бойынша қозғалады. Егер сырттан қосымша күшлер тәсир жасалса (мысалы басқа планеталардың гравитациялық тәсири), онда бөлекше турақлы түрде өзгеретуғын параметрлерге ийе эллипс тәризли орбита бойынша қозғалады. Бул эллипстиң айланыўы орбитаның прецессиясы деп аталады. Бул прецессияның шамасын астрономлар үлкен дәлликте өлшей, ал теоретиклер болса сыртқы тәсирлердиң шамасы менен бағытларын билген ҳалда болжай алады. Ньютонның гравитация теориясы (пүткил дүньялық тартылыс нызамы) Меркурий перигелийиниң бақланатуғын аўысыўының 99,26 процентин түсиндире алды. Ал ҳәр 100 жылда орын алатуғын 40 мүйешлик секундлық аўысыўды Ньютон нызамы тийкарында ҳеш ким түсиндире алмады.

1859-жылы Францилялы астроном, Париж обсерваториясының директоры Урбен Жан Жозеф Леверье бақлаўлар тийкарында анықланған меркурий планетасының прецессиясының теориялық болжаўлар менен азмаз сәйкес келмейтуғынлығын тапты. Орбитаның перигелийи Ньютон нызамы тәрепинен анықланған шамадан тезирек қозғалатуғын болып шықты. Бул эффектиң шамасы жүдә киши – ҳәр жүз жылда 38”. Бирақ бул шама өлшеўлердиң жиберетуғын қәтелигинен әдеўир үлкен еди (өлшеўлер 1” муғдарында қәтелик жиберетуғын еди). Бул ашылыўдың әҳмийети уллы еди ҳәм сонлықтан XIX әсирдеги көп санлы физиклер менен астрономлар, аспан механикасы бойынша қәнигелер бул мәселени шешиўге тырысты. Классикалық физика шеклеринде көп санлы шешимлер усынылды. Олардың ишиндеги ең белгилилери мыналар: Қуяш әтирапындағы планеталар аралық көзге көринбейтуғын шаң-тозаңның болыўы, Қуяштың квадруполлик моментиниң бар екенлиги (өз көшери дөгерегинде айланыўының салдарынан Қуяштың формасы сфера емес, ал жалпайған сфераға айланады), Меркурийдиң еле табылмаған тәбийий жолдасы, еле табылмаған Қуяшқа ең жақын планета (бул гипотезалық планетаға Вулкан атамасы берилди). Бул болжаўлардың ҳеш қайсысы да тастыйықланбағанлықтан физиклер кескин түрдеги пүткиллей жаңа гипотезаларды усына баслады. Мысалы бир қатар физиклер тартылыс нызамын өзгертиў керек (буның ушын Ньютон нызамындағы R диң квадратының орнына басқа көрсеткишти қойыў да усынылды). Бир қатар физиклер гравитациялық потенциалға планетаның тезлигинен ғәрезли болған ағзаны қосыўды усынды.

Бирақ бундай тырысыўлардың басым көпшилиги қарама-карсылықларға ийе болып шықты. Өзиниң аспан механикасы бойынша жумысларында белгили математик Лаплас егер гравитациялық тәсир денелер арасында бир заматта жеткерилип берилетуғын болса (бул жағдайда мәселеге тезликке байланыслы потенциалды киргизиўге туўры келеди), онда қозғалыўшы планеталар системасында импульс сақланбайды — импульстиң бир бөлими гравитациялық майданға бериледи (бундай аўҳал электродинамикада зарядлар электромагнит тәсирлескенде орын алады). Ньютон тәлиматының көз-қараслары бойынша егер гравитациялық тәсирлесиў шекли тезлик пенен берилетуғын болса ҳәм денелердиң тезликлеринен ғәрезсиз болса, онда барлық планеталардың Қуяш бурынырақ ийелеген орынға қарай тартылыўы керек. Усындай тийкарда Лаплас Кеплер мәселесиндеги орбиталардың эксцентриситети менен үлкен ярым көшерлериниң әсирлер даўамында өзгериске ушырайтуғынлығын көрсетти. Бул шамалардың өзгериўлериниң ең жоқары шеклеринен (бул шеклер Қуяш системасы менен Айдың қозгалысының орнықлылығынан келип шығады) Лаплас гравитациялық Ньютонлық тәсирлесиў тезлигиниң "жақтылықтың 50 миллион тезлигинен киши болмайтуғынлығын" көрсетти. Бул ўақыя шама менен 1797-жылы болып өткен еди. Лаплас методы Ньютон гравитациясын туўрыдан-туўры улыўмаластырған жағдайларда дурыс нәтийжелерди береди. Бирақ қурамалырақ моделлер ушын оның қолланыўға болмайды. Мысалы электродинамикада қозғалыўшы зарядлар тартысыўы ямаса ийтерисиўи басқа зарядлардың көзге көринип турған орынларынан байланыслы емес, ал егер олар туўры сызықлы ҳәм тең өлшеўли қозғалатуғын болған жағдайда тап усы ўақыт моментинде көринетуғын орынларынан ғәрезли. Бул Лиенар-Вихерт потенциалының қәсийети болып табылады. Егер мәселеге улыўмалық салыстырмалық теориясы көз-қарасларынан қарайтуғын болсақ $(v/c)^3$ тәртибиндеги ағза дәллигене шекем сондай нәтийжелерди аламыз.

Жоқарыда келтирилген машқалалардан қутылыўы мақсетинде XIX әсирдиң соңғы 30 жылы ишинде илимпазлар Вебердиң, Гаусстың, Риманның ҳәм Максвеллдиң электродинамикалық потенциалларына тийкарланған гравитациялық тәсирлесиўлер нызамын пайдаланыўға тырысты. 1890-жылы Левиге Вебер менен Риман нызамларының комбинациясын пайдаланыўдың нәтийжесинде перигелийдиң керекли болған аўысыўын ҳәм орнықлы орбитаны алыў сәти түсти. Екинши сәтли тырысыў П.Гебер тәрепинен 1898-жылы исленди. Бирақ усындай жағдайларға қарамастан басланғыш электродинамикалық потенциаллар дурыс емес болып шықты (мысалы Вебер нызамы Максвеллдиң электромагнетизм кирмеди). Бул гипотезалар ықтыярлы гипотезалар сыпатында толық бийкарланды. Максвелл теориясын пайдаланатуғын басқа теориялар (мысалы Г.Лоренцтиң теориясы) прецессия ушын дым киши шаманы берди.

1904—1905 жыллары Х.Лоренцтиң, А.Пуанкарениң ҳәм А.Эйнштейнниң жумысларында арнаўлы салыстырмалық теориясының фундаменти қурылды ҳәм қәлеген тәсирлесиўдиң жақтылықтың тезлигинен үлкен тезликлер менен тарқалыўы бийкарланды. Сонлықтан Ньютонның гравитация нызамын салыстырмалық принципи менен сәйкес келиўши, киши тезликлерде ҳәм әззи гравитациялық майданларда пүткил дүньялық тартылыс нызамына айланатуғын басқа теория менен алмастырыў мәселеси пайда болды. Бундай жумыслар менен А.Пуанкаре 1905-1906 жыллары, Г.Минковский 1908-жылы ҳәм А.Зоммерфельд 1910-жылы шуғылланды. Бирақ олар қарап шыққан моделлер перигелийдиң аўысыўы ушын дым киши шаманы берди.

1907-жылы А.Эйнштейн гравитациялық майданды тәрийиплеў ушын сол ўақытлардағы салыстырмалық теориясын (ҳәзирги ўақытта бул теорияны арнаўлы салыстырмалық теориясы деп атайды) улыўмаластырыў керек деген жуўмаққа келди. 1907-жылдан баслап ол избе-из жаңа теорияны дөретиўге қарай жүрди ҳәм 1915-жылдың ақырына шекем өзиниң гравитация теориясын (улыўмалық салыстырмалық теориясын) толық дөретти. Бул теорияны дөретиўде Эйнштейн жол көрсеткиш ретинде өзиниң салыстырмалық принципин пайдаланды. Бул принцип бойынша бир текли гравитация майданы барлық материяға бирдей тәсир етеди ҳәм сонлықтан оны еркин түсиўши бақлаўшы таба алмайды. Усы жағдайға сәйкес барлық гравитациялық эффектлерди тезлениўши есаплаў системаларында пайда етиў мүмкин. Тап сол сыяқлы гравитация майданында тезлениўши есаплаў системаларында жүзеге келетуғын эффектлерди пайда ете аламыз. Сонлықтан гравитация есаплаў системасының тезлениўине байланыслы болған инерция күши түринде тәсир етеди. Бундай инерция күшлери қатарына орайдан қашыўшы күш ямаса Кориолис күши де киреди. Усы жағдайларға байланыслы гравитациялық күштиң шамасы инерт массаға пропорционал. Нәтийжеде кеңислик-ўақыттың ҳәр қыйлы ноқатларында инерциал есаплаў системалары бир бирине салыстырғанда тезлениўге ийе болады. Бундай жағдайлардың барлығы да бизиң кеңислигимиз классикалық физикадағы евклидлик кеңислик емес, ал риман геометриясының майысқан кеңислиги деген болжаўды қабыл етсек дурыс болады. Усының менен бирге кеңислик пенен ўақыт арасындағы байланыс майысқан болып шығады. Бундай майысқанлық әдеттеги шараятларда гравитация күши сыпатында көринеди. Сегиз жыл даўам еткен жумыстың ақырыныда кеңислик-ўақыттың оның ишинде жайласқан материя тәрепинен қалай майысатуғынлығын тапты. Бул майысыўды Эйнштейнның теңлемелери берди. Гравитацияның инерция күшлеринен айырмасы соннан ибарат, ол кеңислик-ўақыттың майысқанлығы бойынша анықланады. Ал бул майысқанлық инвариантлы түрде өлшенеди. Эйншейнның теңлемелериниң шешимлерин бириншилерден болып Эйнштейнның өзи жуўық түрде ҳәм Шварцшильд тәрепинен дәл түрде алынды. Бул шешимлер Меркурийдиң аномаллық прецессиясын түсиндирди ҳәм жақтылық нурының гравитация майданында аўысыўы ушын дәл мәнис берди. Теорияның бул болжаўы 1919-жылы англиялы астрономлар тәрепинен тастыйықланды.

Координаталарды физикалық түрлендириў. Ҳәр қыйлы есаплаў системалары байланысқан ҳәр қыйлы материаллық денелер бир бирине салыстырғанда қозғалыста болыўы мүмкин. Ҳәр бир есаплаў системасында өз координата көшерлери жүргизилген, ал сол системалардың ҳәр қыйлы ноқатларындағы ўақыт сол ноқат пенен байланысқан саатлардың жәрдеминде өлшенетуғын болсын. Бир бирине салыстырғанда қозғалыста болатуғын есаплаў системаларындағы координаталар менен ўақыт қалайынша байланысқан деген сораў келип туўады. **Қойылған сораўға жуўаптың тек геометриялық көз-қарастың жәрдеминде берилиўи мүмкин емес. Бул физикалық мәселе**. Бул мәселе ҳәр қыйлы системалар арасындағы салыстырмалы тезлик нолге тең болғанда ҳәм сол есаплаў системалары арасындағы физикалық айырма жоғалғанда (яғный бир неше системалар бир системаға айланғанда) ғана геометриялық мәселеге айланады.

Инерциал есаплаў системалары ҳәм салыстырмалық принципи. Қатты дene-ниң ең әпиўайы болған қозғалысы оның илгерилемели тең өлшеўли туўры сызықлы қозғалысы болып табылады. Усы жағдайға сәйкес есаплаў системасының ең әпиўайы салыстырмалы қозғалысы илгерилемели, тең өлшеўли ҳәм туўры сызықлы қозғалысы болып табылады. Шәртли түрде сол системалардың биреўин қозғалмайтуғын, ал екиншисин қозғалыўшы система деп қабыл етемиз. Ҳәр бир системада декарт координаталар системасын жүргиземиз. К қозғалмайтуғын есаплаў системасындағы координаталарды (x, y, z) деп, ал қозғалыўшы K' системасындағы координаталарды (x', y', z') ҳәриплери жәрдеминде белгилеймиз. Қозғалыўшы системадағы шамаларды қозғалмайтуғын системадағы шамалар белгиленген ҳәриплердиң жәрдеминде штрих белгисин қосып белгилеймиз деп келисип аламыз. Енди бир бирине салыстырғанда қозғалыўшы ҳәр бир есаплаў системасында физикалық қубылыслар қалай жүреди деген әҳмийетли сораўға жуўап бериўимиз керек.

Бул сораўға жуўап бериўимиз ушын сол есаплаў системаларындағы физикалық қубылыслардың өтиўин үйрениийимиз керек. Көп ўақытлардан бери Жердиң бетине салыстырғанда тең өлшеўли туўры сызықлы қозғалатуғын координаталарға салыстырғандағы механикалық қубылыслардың өтиў избе-излиги бойынша сол қозғалыс ҳаққында ҳеш нәрсени айтыўға болмайтуғынлығы мәлим болды. Жағаға салыстырғанда тыныш қозғалатуғын кораблдиң кабиналары ишинде механикалық процесслер жағадағыдай болып өтеди. Ал, егер Жер бетинде анығырақ тәжирийбелер өткерилсе Жер бетиниң жулдызларға салыстырғандағы қозғалысының бар екенлиги жүзеге келеди (мысалы Фуко маятниги менен өткерилген тәжирийбе). Бирақ бул жағдайда Жер бетиниң жулдызларға салыстырғандағы тезлиги емес, ал тезлениўи анықланады. Ал **көп сандағы тәжирийбелер қозғалмайтуғын жулдызларға салыстырғанда, яғный бир бирине салыстырғанда тең өлшеўли туўры сызық бойынша қозғалатуғын барлық есаплаў системаларында барлық механикалық қубылыслардың бирдей болып өтетуғынлығын айқын түрде көрсетти. Усының менен бирге тартылыс майданын (гравитация майданын) есапқа алмайтуғындай дәрежеде киши (әззи) деп есапланады. Бундай есаплаў системаларында Ньютонның инерция нызамы орынланатуғын болғанлықтан оларды инерциялық есаплаў системалары деп аталады**.

Галилей тәрепинен биринши рет усынылған барлық инерциялық есаплаў системаларында механикалық қубылыслар бирдей болып өтеди (барлық механикалық нызамлар бирдей түрге ийе болады) деген тастыйықлаў **Галилейдиң салыстырмалық принципи** деп аталады.

Ертерек ўақытлары көпшилик авторлар усы мәселени түсиндиргенде "Галилейдиң салыстырмалық принципи" түсинигиниң орнына "Ньютон механикасындағы салыстырмалық принципи" деген түсиниктен пайдаланды (мысалы О.Д.Хвольсон).

Кейинирек басқа да көпшилик, соның ишинде электромагнитлик қубылыслар үйренилгеннен кейин бул принциптиң қәлеген қубылыс ушын орын алатуғынлығы мойынлана баслады. Сонлықтан барлық инерциал есаплаў системаларында барлық физикалық қубылыслар бирдей болып өтеди (барлық физикалық нызамлар бирдей түрге ийе болады) деп тастыйықлайтуғын салыстырмалық принцип арнаўлы салыстырмалық теориясының салыстырмалық принципи ямаса әпиўайы түрде салыстырмалық принципи деп атала баслады. Ҳәзирги ўақытлары бул принциптиң механикалық ҳәм электромагнит қубылыслары ушын дәл орынланатуғынлығы көп экспериментлер жәрдеминде дәлилленди. Соған қарамастан **салыстырмалық принципи постулат болып табылады**. Себеби еле ашылмаған физикалық нызамлар, қубылыслар көп. Соның менен бирге физика илими қаншама раўажланған сайын еле ашылмаған жаңа машқалалардың пайда бола бериўи сөзсиз. Сонлықтан салыстырмалық принципи барқулла постулат түринде қала береди.

Салыстырмалық принципи геометриясы Евклидлик болған, бирден-бир ўақытқа ийе шексиз көп санлы есаплаўлар системалары бар деген болжаўға тийкарланған. Кеңислик-ўақыт бойынша қатнаслар ҳәр бир есаплаў системасында бирдей, бул белгиси бойынша координаталар системаларының бир биринен парқы жоқ. Усындай болжаўдың дурыслығы көп санлы экспериментлерде тастыйықланған. Тәжирийбе бундай системаларда Ньютонның биринши нызамының орынланатуғынлығын көрсетеди. **Сонлықтан бундай системалар инерциаллық системалар деп аталады. Бундай системалар бир бирине салыстырғанда тең өлшеўли туўры сызық бойынша қозғалады**.

Биз ҳәзир анықлық ушын арнаўлы салыстырмалық теориясының салыстырмалық принципи ҳаққында оның авторы А.Эйнштейнниң 1905-жылы жарық көрген "Қозғалыўшы денелер электродинамикасына" атлы мақаласынан үзинди келтиремиз:

"Усыған усаған мысаллар ҳәм Жердиң "жақтылық орталығына" салыстырғандағы тезлигин анықлаўға қаратылған сәтсиз тырысыўлар тек механикада емес, ал электродинамикада да қубылыслардың ҳеш бир қәсийети абсолют тынышлық түсинигине сәйкес келмейди деп болжаўға алып келеди. Қала берсе (биринши дәрежели шамалар ушын дәлилленгенлигиндей) механиканың теңлемелери дурыс болатуғын барлық координаталар системалары ушын электродинамикалық ҳәм оптикалық нызамлар да дурыс болады. Бул болжаўды (оның мазмунын биз буннан былай "салыстырмалық принципи" деп атаймыз) биз тийкарға айландырмақшымыз ҳәм буннан басқа усыған қосымша биринши қарағанда қарама-қарсылыққа ийе болып көринетуғын және бир болжаў, атап айтқанда жақтылық бослықта оны нурландыратуғын денениң қозғалыс ҳалынан ғәрезсиз барлық ўақытта да белгили бир V тезлиги менен тарқалады деп болжаймыз".

Галилей түрлендириўлери. Қозғалыўшы координаталар системасы қозғалмайтуғын координаталар системасына салыстырғанда ҳәр бир ўақыт моментинде белгили бир аўҳалда болады

Ескертиўлер:

Бириншиден аўҳалда болады деп айтылғанда қозғалыўшы координаталар системасының кеңисликтеги белгили бир орынды ийелейтуғынлығы инабатқа алынады.

Екиншиден "координаталар системасы" ҳәм "есаплаў системасы" түсиниклери бир мәнисте қолланылып атыр.

Егер координаталар системаларының баслары $t = 0$ ўақыт моментинде бир ноқатта жайласатуғын болса, t ўақыттан кейин қозғалыўшы системаның басы $x = vt$ ноқатында жайласады. Сонлықтан да, егер қозғалыс тек x көшериниң бағытында болғанда

$$x' = x - vt, y' = y, z' = z, t' = t. \qquad (1)$$

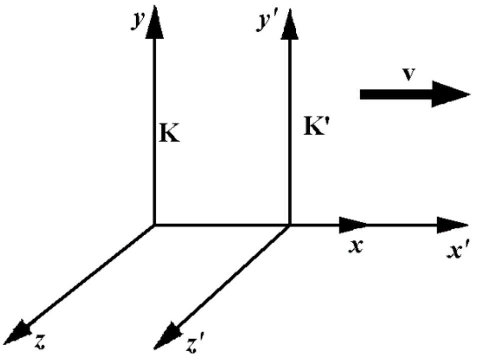
Бул формулалар Галилей түрлендириўлери деп аталады.

Егер штрихлары бар координаталар системасынан штрихлары жоқ системаға өтетуғын болсақ тезликтиң белгисин өзгеритўимиз керек. Сонда

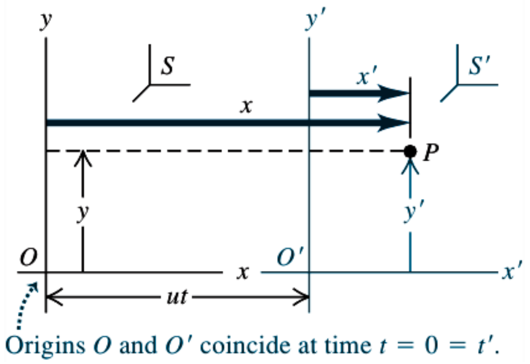
$$x = x' + vt, y = y', z = z', t = t'. \qquad (2)$$

формулаларын аламыз.

(2)-аңлатпа (1)-аңлатпадан теңлемелерди шешиў жолы менен емес, ал (1)-аңлатпаға салыстырмалық принципин қолланыў арқалы алынғанлығына итибар бериў керек.



1-*a* сүўрет. Штрихланған ҳәм штрихланбаған координаталар системаларының бир бирине салыстырғандағы қозғалысы. x ҳәм x' көшерлерин өз-ара параллел етип алыў ең әпиўайы жағдай болып табылады.



1-а сүўрет еки өлшемли жағдай ушын көрсетилген. Бул сүўретте есаплаў системалары S ҳәм S' арқалы, ал тезлик u арқалы белгиленген. t=0 ўақыт моментинде O ҳәм O' ноқатлары бир ноқатта жайласқан.

Координаталар системасын бурыў ямаса есаплаў басын өзгертиў арқалы координаталар системасының жүдә әпиўайы түрдеги өз-ара жайғасыўларын пайда етиўге болады.

Түрлендириў инвариантлары. Координаталарды түрлендиргенде көпшилик физикалық шамалар өзлериниң сан мәнислерин өзгертиўи керек. Мәселен ноқаттың кеңисликтеги аўҳалы (x, y, z) үш санының жәрдеминде анықланады. Әлбетте екинши системаға өткенде бул санлардың мәнислери өзгереди.

Егер физикалық шама координаталарды түрлендиргенде өз мәнисин өзгертпесе, ондай шамалар сайлап алынған координаталар системаларына ғәрезсиз болған объектив әҳмийетке ийе болады. Бундай шамалар түрлендириў инвариантлары деп аталады.

Инвариант шамалар төмендегилер жоллар менен табылады табылады:

Узынлық l еки есаплаў системасында да бирдей, яғный

$$l = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (3)$$

теңлиги орынланады. Бундай жағдайда l шамасын Галилей түрлендириўине қарата инвариант шама деп атайды. **Бундай жағдайды кеңисликтиң абсолютлиги деп атаймыз**.

Бир ўақытлылық түсинигиниң абсолютлиги. Галилейдиң салыстырмалық принципи бойынша барлық инерциал есаплаў системасында ўақыт бирдей тезликте өтеди (яғный саатлар бирдей тезликте жүреди). Демек бир системада белгили бир ўақыт моментинде жүз беретуғын ўақыялар екинши системада да тап сол ўақыт моментлеринде жүз береди. **Бундай жағдайды ўақыттың абсолютлиги деп атайды**. Сонлықтан сайлап алынған системадан ғәрезсиз еки ўақыяның бир ўақытта жүз бергенлигин тастыйықлаў абсолют характерге ийе болады.

Ўақыт интервалының инвариантлылығы. $t = t'$ түрлендиў формуласының жәрдеминде ўақыт интервалын түрлендириў мүмкин. Мейли қозғалыўшы системада t_1' ҳәм t_2' ўақыт моментлеринде еки ўақыя жүз берсин. Усы еки ўақыя арасындағы интервал

$$\Delta t = t_2 - t_1. \quad (4)$$

Қозғалмайтуғын есаплаў системасында бул ўақыялар $t_1 = t_1'$ ҳәм $t_2 = t_2'$. ўақыт моментлеринде болып өтти. Сонлықтан

$$\Delta t = t_2 - t_1 = t_2' - t_1' \tag{5}$$

теңликлерине ийе боламыз. Демек ўақыт интервалы Галилей түрлендириўлериниң инварианты болып табылады.

Ньютон теңлемелериниң Галилей түрлендириўлерине қарата инвариантлылығы. Тезликлерди қосыў ҳәм тезлениўдиң инвариантлылығы. Штрихлары бар есаплаў системасы қозғалмайтуғын штрихланған есаплаў системасына салыстырғанда V тезлиги менен қозғалатуғын болсын ҳәм биз қарап атырған материаллық ноқат қозғалатуғын, ал координаталар ўақытқа ғәрезлилиги

$$x' = x'(t'), y' = y'(t'), z' = z'(t') \tag{6}$$

формулаларының жәрдеминде берилген болсын. Бундай жағдайда тезликтиң қураўшылары

$$v_x' = \frac{dx'}{dt'}, v_y' = \frac{dy'}{dt'}, v_z' = \frac{dz'}{dt'} \tag{7}$$

түринде жазылады. Қозғалмайтуғын есаплаў системасына келсек

$$x(t) = x'(t') + vt', y(t) = y'(t'), z(t) = z'(t'), t = t' \tag{8}$$

ал тезликтиң қураўшылары төмендегидей теңликлердиң жәрдеминде бериледи:

$$\begin{gathered} v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + V\frac{dt'}{dt} = \frac{dx'}{dt'} + V\frac{dt'}{dt'} = v_x' + V, \\ v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} = \frac{dy'}{dt'}, \\ v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} = \frac{dz'}{dt'}, \end{gathered} \tag{9}$$

формулаларының жәрдеминде анықланады.

Бул формулалар классикалық релятивистлик емес механиканың тезликлерди қосыў формулалары болып табылады.

Соңғы формулалар [(9)-формулалар] жәрдеминде биз тезлениў ушын аңлатпалар алыўымыз мүмкин. Оларды дифференциаллаў арқалы ҳәм $dt = dt'$ теңлиги орынланады деп есапласақ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt'^2}, \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y'}{dt'^2}, \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z'}{dt'^2} \tag{10}$$

теңликлериниң орын алатуғынлығына ийе боламыз. **Бул формулалар тезлениўдиң Галилей түрлендириўлерине қарата инвариант екенлиги көрсетеди**.

Демек Ньютон нызамлары Галилей түрлендириўлерине қарата инвариант екен.

Түрлендириў инвариантлары координаталар системаларын сайлап алыўға байланыслы емес, ал үйренилип атырған объектлердеги ең әҳмийетли ҳақыйқый қәсийетлерин тәрийиплейди.

Жақтылық тезлигиниң шекли екенлиги. Биз енди Жақтылық ҳаққындағы көз-қараслардың раўажланыўы, жақтылықтың тезлигин Рёмер тәрепинен өлшеў, дүньялық эфир түсиниги, Майкельсон-Морли ҳәм Физо тәжирийбелери, Галилей түрлендириўлериниң шекленгенлиги ҳаққында гәп етемиз.

Галилей түрлендириўлериниң дурыс ямаса дурыс емеслиги мәселеси экспериментте изертленип көрилиўи мүмкин. Галилей түрлендириўлери бойынша алынған тезликлерди қосыў формуласының жуўық екенлиги көрсетилди. Қәтеликтиң тезлик жоқары болған жағдайларда көп болатуғынлығы мәлим болды. Бул жағдайлардың барлығы да жақтылықтың тезлигин өлшеў барысында анықланды.

Жақтылықтың тезлиги ҳаққындағы көз-қараслардың раўажланыўын төмендегидей фактлердиң жәрдеминде сәўлелендириў мүмкин:

Әйемги дәўирлердеги ойшыллардың пикирлери бойынша:

Платон (б.э.ш. 427-347) көриў нурлары теориясын қоллады. Бул теория бойынша көзден нурлар шығып, предметлерди барып "барластырып көрип" көзге қайтып келеди ҳәм усының нәтийжесинде биз көремиз.

Демокрит (б.э.ш. 460-370) атомистлик теория тәрепинде болып, оның тәлиматы бойынша көзге бөлекшелерден туратуғын жақтылық нурлары келип түседи ҳәм соның салдарынан көриў сезимлери пайда болады.

Аристотель (б.э.ш. 384-322) Демокритке сәйкес пикирде болды.

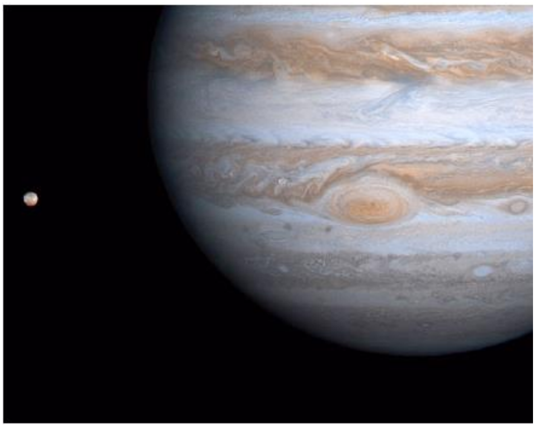
Бул еки түрли көз қараслар Евклид (б.э.ш. 300-жыллар) тәрепинен бири бирине эквивалент етилди. Ол жақтылықтың туўры сызықлы тарқалыў ҳәм шағылысыў нызамларын ашты.

Жаңа физиканың тийкарын салыўшы Галилей (1564-1642) жақтылықтың тезлиги шекли деп есаплады. Тезликти өлшеў бойынша ол қолланған әпиўайы усыллар дурыс нәтийже бере алмады. Р.Декарт (1596-1650) болса пүткиллей басқаша көз-қараста болды. Оның пикиринше жақтылық шексиз үлкен тезлик пенен таралатуғын басым.

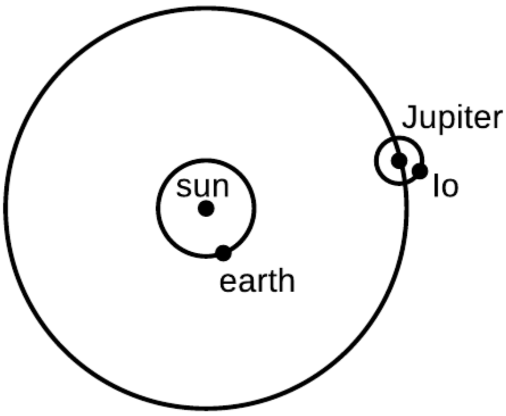
Гримальди (1618-1660) ҳәм Гук (1625-1695) жақтылыққа толқынлық көз-қараста қарады. Олардың пикиринше жақтылық бир текли орталықтағы толқынлық қозғалыс.

Жақтылықтың толқынлық теориясының тийкарын салыўшы Христиан Гюйгенс (1629-1695) болып табылады.

И.Ньютон (1643-1727) "әйтеўир ойлардан гипотеза пайда етпеў" мақсетинде жақтылықтың тәбияты ҳаққында шын кеўли менен пикир айтпады. Бирақ ол жақтылықтың корпускулалық теориясын ашық түрде қабыл етти.



2-сүўрет. Юпитер ҳәм шеп тәрепте оның жолдасларының бири Кассини.



3-сүўрет. Қуяш, Жер, Юпитер ҳәм оның жолдасы Ионың бир бирине салыстырғандағы жайласыўлары.

Жақтылықтың тезлигин Рёмер тәрепинен өлшеў. Жақтылықтың тезлиги биринши рет 1676-жылы Олаф Рёмер (Roemer) тәрепинен өлшенди. Сол ўақытларға шекем тәжирийбелер Юпитер планетасының жолдасларының айланыў дәўириниң Жер Юпитерге жақынласқанда киширейетуғынын, ал Жер Юпитерден алыслағанда үлкейетуғынлығын анық көрсетти. 4-сүўретте Юпитердиң бир жолдасының тутылыўдын кейинги моменти көрсетилген. Юпитердиң Қуяш дөгерегин айланып шығыў дәўири Жердиң Қуяш дөгерегин айланып шығыў дәўиринен әдеўир үлкен болғанлығына байланыслы Юпитерди қозғалмайды деп есаплаймыз. Мейли базы бир t_1 моментинде Юпитердиң жолдасы саядан шықсын ҳәм Жердеги бағлаўшы тәрепинен $T_1 = t_1 + \frac{s_1}{c}$ ўақыт моментинде белгиленсин. Бул жерде s_1 арқалы бақлаў ўақтындағы Жер менен жолдастың саядан шққан жерине шекемги аралық белгиленген. Юпитердиң жолдасы екинши рет саядан шыққан ўақытты Жердеги бақлаўшы $T_2 = t_2 + \frac{s_2}{c}$ ўақыт моментинде бақладым деп белгилеп қояды. Сонлықтан Жердеги бақлаўшы Юпитердиң жолдасы ушын айланыў дәўирине

$$T_{baql} = T_2 - T_1 = T_{haqıyqıy} + \frac{s_2 - s_1}{c}$$

шамасын алады. Бул жерде $T_{haqıyqıy} = t_2 - t_1$. Демек ҳәр қандай $s_2 - s_1$ шамаларының бар болыўының нәтийжесинде жолдастың Юпитерди айланыў дәўири ушын ҳәр қыйлы мәнислер алынады. Бирақ көп санлы өлшеўлердиң нәтийжесинде (Жер Юпитерге жақынлап киятырғанда алынған мәнислер "-" белгиси менен алынады ҳәм барлық s лер бир бирин жоқ етеди) усы ҳәр қыйлылықты жоқ етиў мүмкин.

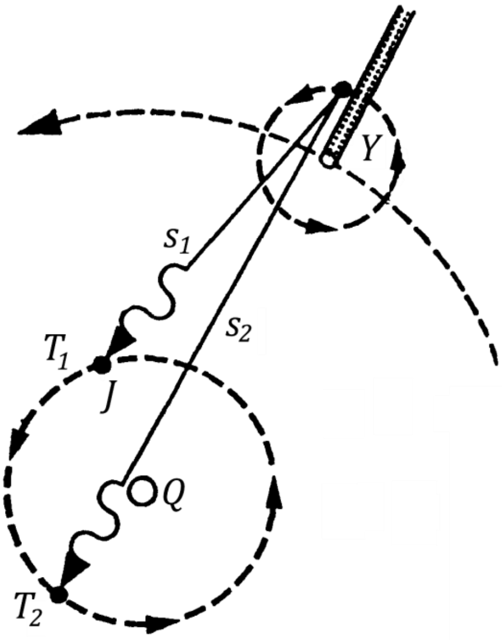
$T_{haqıyqıy}$ шамасының мәнисин биле отырып төмендеги формула жәрдеминде жақтылықтың тезлигин анықлаў мүмкин:

$$c = \frac{(s_2 - s_1)}{\left(T_{baql} - T_{haqıyqıy}\right)}. \qquad (11)$$

s_2 ҳәм s_1 шамаларының мәниси астрономиялық бақлаўлардан белгили.

Нәтийжеде Рёмер $c = 214\ 300$ км/с нәтийжесин алды.

1727-жылы Брадлей жақтылықтың аберрациясы қубылысын пайдаланыў жолы менен алынған нәтийжениң дәллигин жоқарылатты.



4-сүўрет. Жақтылық тезлигин Рёмер бойынша анықлаўдың схемасы.

Ньютонның жеке абырайы жақтылықтың корпускулалардың ағымы деген пикирди күшейтти. Гюйгенстиң жақтылықтың толқын екенлиги ҳаққындағы көз-қарасы тәрепдарларының бар болыўына қарамастан жүз жыллар даўамында жақтылықтың толқын екенлиги дыққаттан сыртта қалды. 1801-жылы Юнг интерференция принципин келтирип шығарды. Ал 1818-жылы Френель корпускулалық теорияға күшли соққы берди. Ол жақтылықтың толқынлық қәсийети ҳаққындағы көз-қарастан дифракция мәселесин шешти. Корпускулалық теория көз-қарасынан бул мәселелерди шешиў мүмкин емес болып шықты. Сонлықтан 1819-жылдан кейин жақтылық белгили бир орталықта тарқалатуғын толқын сыпатында қарала баслады. Корпускулалық теория физикадан ўақытша толық қысып шығарылды.

Бәршеге мәлим, толқынның пайда болыўы ҳәм тарқалыўы ушын белгили бир тутас серпимли орталық керек. Мысалы сес толқынларының тарқалыўы ушын ҳаўа ямаса тутас қатты дене, суўдың бетинде пайда болған толқынлардың тарқалыўы ушын суўдың өзи керек. Сонлықтан жақтылықтың кеңисликте тарқалыўы ушын сәйкес орталық талап етиледи. Сол дәўирлерде дүньяны толық қамтып туратығын сондай орталық бар деп болжанды ҳәм оны "**Дүньялық эфир**" деп атады. Усының нәтийжесинде дерлик жүз жыл даўамында сол эфирди табыў, усы эфирге салытырғанда басқа денелердиң тезлигин анықлаў (дүньяны толтырып тынышлықта турған эфирге салыстырғандағы тезликти абсолют тезлик деп атады) физика илиминде баслы мәселелердиң бири деп есапланды. Ал усындай эфир теориясын дөретиўге, эфир ҳәм оның физикалық қәсийетлери ҳаққында гипотезалар усыныўда XIX әсирдиң көп сандағы белгили илимпазлары қатнасты.

Мысаллар келтиремиз.

1. Герц гипотезасы: эфир өзинде қозғалыўшы денелер тәрепинен толығы менен алып жүриледи, соңлықтан қозғалыўшы дене ишиндеги эфирдиң тезлиги усы денениң тезлигине тең.

2. Лоренц (H.A.Lorentz) гипотезасы: эфир қозғалмайды, қозғалыўшы денениң ишки бөлиминдеги эфир бул қозғалысқа қатнаспайды.

3. Френель ҳәм Физо гипотезасы: эфирдиң бир бөлими қозғалыўшы материя тәрепинен алып жүриледи.

4. Эйнштейн гипотезасы (О.Д.Хвольсон бойынша Эйнштейн ҳәм Планк гипотезасы) бойынша ҳеш қандай эфир жоқ.

Эйнштейн гипотезасы кейинирек пайда болғанлықтан (XIX әсирдиң басы) дәслепки ўақытлары турған эфирге салыстырғандағы жақтылықтың тезлигин анықлаў машқаласы писип жетти. Тыныш турған "Дүньялық эфир" ге салыстырғандағы қозғалыс абсолют қозғалыс болып табылады. Сонлықтан өткен әсирдиң (XIX әсир) 70-80 жылларына келе "Абсолют қозғалысты", "Абсолют тезликлерди" анықлаў физика илиминдеги ең әҳмийетли машқалаларға айланды.

Пайда болған пикирлер төмендегидей:

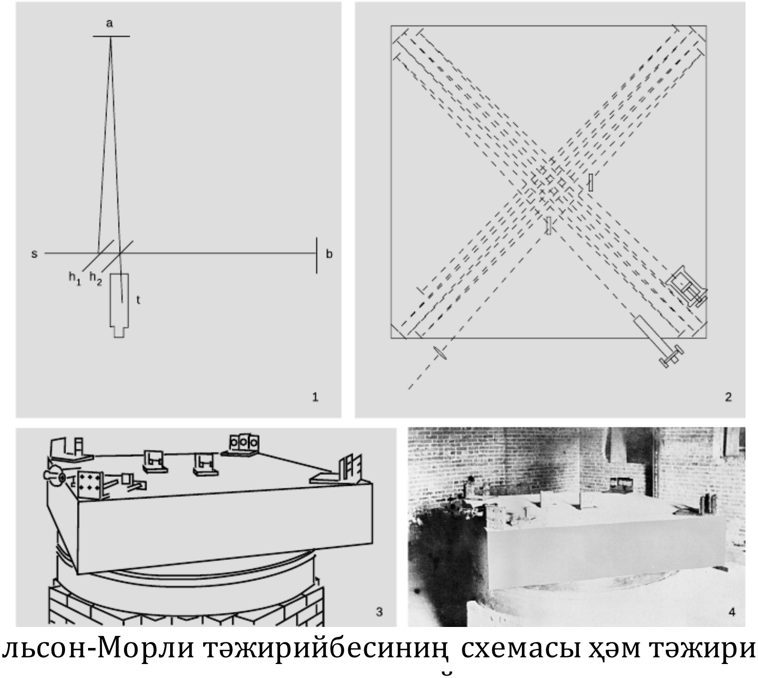
1. Жер, басқа планеталар қозғалмай турған дүньялық эфирге салыстырғанда қозғалады. Бул қозғалысларға эфир тәсир жасамайды (Лоренцтиң пикирин қоллаўшылар).

2. Қозғалыўшы дeнениң әтирапындағы эфир усы дене менен бирге алып жүриледи. (Френель тәлиматын қоллаўшылар).

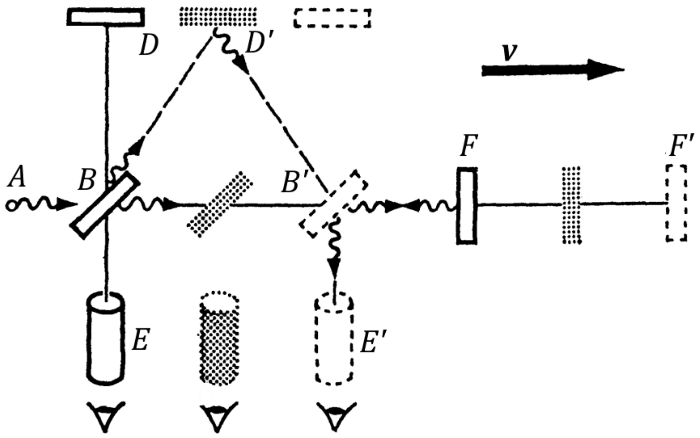
Бул мәселелерди шешиў ушын 1881-жылы Майкельсон (Michelson), 1887-жылы Майкельсон Морли (Morley) менен бирликте, 1904-жылы Морли ҳәм Миллер (Miller) интерференция қубылысын бақлаўға тийкарланған Жердиң абсолют тезлигин анықлаў бойынша тарийхый тәжирийбелер жүргизди. Майкельсон, Морли ҳәм Миллерлер Лоренц гипотезасы (эфирдиң қозғалмаслығы) тийкарында Жердиң абсолют тезлигин анықлаўды мәселе етип қойды. Бул тәжирийбени әмелге асырыўдың идеясы интерферометр жәрдеминде бири қозғалыс бағытындағы, екиншиси қозғалыс бағытына перпендикуляр бағыттағы еки жолды салыстырыў болып табылады. Интерферометрдиң ислеў принципи, соның ишинде Майкельсон-Морли интерферометри улыўма физика курсының "Оптика" бөлиминде толық талқыланады (5-ҳәм 6-сүўретлер).

Бирақ бул тарийхый тәжирийбелер күтилген нәтийжелерди бермеди: Орынланған экспериментлен Жердиң абсолют тезлиги ҳаққында ҳеш қандай нәтийжелер алынбады. Жылдың барлық мәўсиминде де (барлық бағытларда да) Жердиң "эфирге" салыстырғандағы тезлиги бирдей болып шықты.

Тәжирийбелер басқа да изертлеўшилер тәрепинен жақын ўақытларға шекем қайталанып өткерилип келди. Лазерлардиң пайда болыўы менен тәжирийбелердиң дәллиги жоқарылатылды. Ҳәзирги ўақытлары "эфир самалы" ның тезлигиниң (егер ол бар болса) $10\frac{м}{с}$ шамасынан кем екенлиги дәлилленди.



5-сүўрет. Майкельсон-Морли тәжирийбесиниң схемасы ҳәм тәжирийбе өткерилген дүзилистиң сүўрети.



6-сүўрет. Эфирге байланыслы болған координаталар системасындағы Майкельскон-Морли тәжирийбесиниң схемасы. Сүўретте интерферометрдиң эфирге салыстырғандағы аўҳалларының избе-излиги көрсетилген.

Майкельсон-Морли ҳәм "**эфир самалы**" ның тезлигин анықлаў мақсетинде өткерилген кейинги тәжирийбелерден төмендегидей нәтийжелерди шығарыў мүмкин:

1. Үлкен массаға ийе денелер өз әтирапындағы эфирди толығы менен бирге қосып алып жүреди (демек Герц гипотезасы дурыс деген сөз). Сонлықтан усындай денелер әтирапында "эфир самалы" ның бақланбаўы тәбийий нәрсе.

2. Эфирде қозғалыўшы денелердиң өлшемлери турақлы болып қалмайды. Бул жағдайда Герц гипотезасын дурыс деп есаплай алмаймыз.

Ал эфирдиң бир бөлими (бир бөлими, ал толығы менен емес) Жер менен бирге алып жүриле ме? деген сораўға жуўап бериў ушын 1860-жылы Физо тәрепинен тәжирийбелер жүргизилди.

Физо тәжирийбесиниң идеясы қозғалыўшы материаллық денедеги (мысалы суўдағы) жақтылықтың тезлигин өлшеўден ибарат (7-сүўрет). Мейли усы орталықтағы жақтылықтың тезлиги $v' = \frac{c}{n}$ (n арқалы орталықтың сыныў көрсеткиши белгиленген) болсын. Егер жақтылық тарқалатуғын орталықтың өзи v тезлиги менен қозғалатуғын болса қозғалмайтуғын бақлаўшыға салыстырғандағы жақтылықтың тезлиги $v' \pm V$ шамасына тең болыўы тийис. Бул аңлатпада + белгиси орталық пенен жақтылық бир бағытта қозғалатуғын жағдайға тийисли. Өзиниң тәжирийбесинде Физо орталықтың қозғалыў бағытындағы ҳәм бул бағытқа қарама-қарсы болған бағыттағы жақтылықтың тезликлерин салыстырды.

Орталықтың қозғалыў бағытындағы $\left(v^{(+)}\right)$ ҳәм бул бағытқа қарама-қарсы бағыттағы (v') жақтылықтың тезликлери былай есапланады:

$$v^{(+)} = v' + kV, v^{(-)} = kV.$$

Бул аңлатпалардағы k арқалы экспериментте анықланыўы керек болған коэффициент. Егер $k = 1$ теңлиги орынланса тезликлерди қосыўдың классикалық формуласы орынлы болады. Егер $k \neq 1$ болып шықса бул классикалық формула дурыс нәтийже бермейди.

l арқалы суйықлықтағы жақтылық жүрип өтетуғын узынлықты, ал t_0 арқалы суйықлық арқалы өткен ўақытты есапламағанда жақтылықтың экспериментаплық дүзилис арқалы өтетуғын ўақтын белгилеймиз. Бундай жағдайда еки нурдың (биреўи суйықлықтың қозғалыў бағытында, екиншиси оған қарама-қарсы) эксперименталлық дүзилис арқалы өтиў ўақты төмендегидей аңлатпалар жәрдеминде есапланады:

$$t_1 = t_0 + \frac{1}{v' + kV}, t_2 = t_0 + \frac{1}{v' - kV}.$$

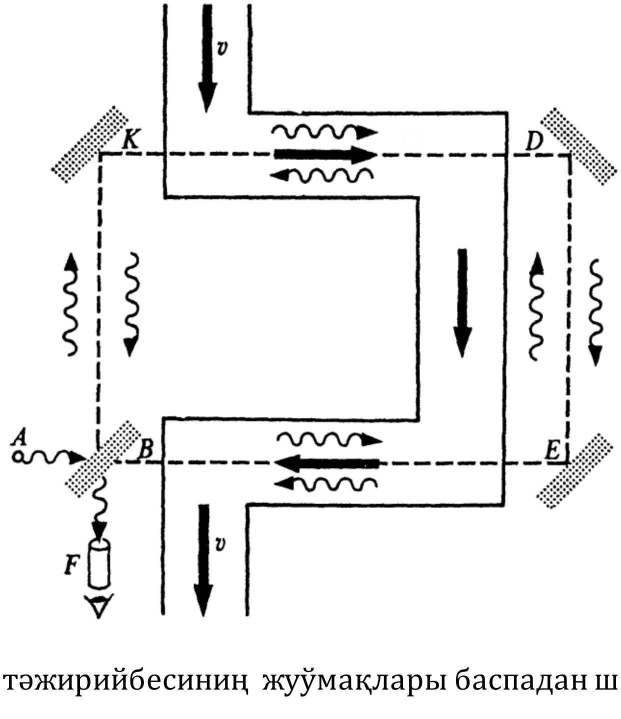
Бул аңлатпалардан еки нурдың жүрислери арасындағы айырма ўақыт бойынша төмендеги формулалар бойынша есапланатуғынлығы келип шығады:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2lkV}{v'^2 - k^2V^2}.$$

Интерференциялық жолақлар бойынша жүрислер айырмасын өлшеп, l, v, v' шамаларының мәнислерин қойып ең ақырғы формуладан k ны анықлаў мүмкин. Физо тәжирийбесинде

$$k = q/n^2$$

теңлигиниң орын алатуғынлығын көрсеткен. Суў ушын сыныў көрсеткиши $n = 1{,}3$ шамасына тең. Демек $k = 0{,}4$ екенлиги келип шығады. Сонлықтан $v^{(+)} = v' + kV$ ҳәм $v^{(-)} = v' - kV$ формулаларынан $v = v' \pm 0{,}4v$ аңлатпасы келип шығады (классикалық физика бойынша $v = v' \pm v$ болып шығыўы керек еди). Нәтийжеде Физо тәжирийбесинде тезликлерди қосыў ушын тезликлерди қосыўдың классикалық формуласынан пайдаланыўға болмайтуғынлығы дәлилленеди. Соның менен бирге бул тәжирийбеден қозғалыўшы дене тәрепинен эфир жарым-жарты алып жүриледи деген жуўмақ шығарыўға болады ҳәм денелер тәрепинен әтирапындағы эфир толық алып жүриледи деген гипотеза (Герц гипотезасы) толығы менен бийкарланады.



7-сүўрет. Физо тәжирийбесиниң схемасы.

Физо тәжирийбесиниң жуўмақлары баспадан шыққаннан кейин еки түрли пикир қалды:

1. Эфир қозғалмайды, яғный ол материяның қозғалысына пүткиллей қатнаспайды.

2. Эфир қозғалыўшы материя тәрепинен алып жүриледи, бирақ оның тезлиги қозғалыўшы материяның тезлигине тең емес.

Әлбетте, екинши гипотезаны раўажландырыў ушын эфир менен қозғалыўшы материяны байланыстыратуғын қандай да бир жағдайды қәлиплестириў керек болады.

Физо жасаған дәўирде бундай нәтийже таңланыў пайда етпеди. Себеби жоқарыда гәп етилгениндей, Физо тәжирийбеси өткерилместен әдеўир бурын Френель қозғалыўшы материя тәрепинен эфир толық алып жүрилмейтуғынлығы ҳаққында болжаў айтқан еди. Әлбетте Френель қозғалыўшы материя эфирди қаншама алып жүреди деген сораўға жуўап берген жоқ. Усының нәтийжесинде жоқарыда айтып өтилген Френель ҳәм Физо гипотезасы пайда болды.

Альберт Эйнштейн өзиниң 1920-жылы жарық көрген "Эфир ҳәм салыстырмалық теориясы" мақаласында былай деп жазады:

"Жақтылықтық қәсийетлери менен материаллық денелерде тарқалатуғын серпимли толқынлар қәсийетлери арасындағы уқсаслықтың бар екенлиги анық көрингенликтен XIX әсирдиң биринши ярымында эфир гипотезасы қайтадан күшли түрде қоллап-қуўатлана баслады. Жақтылықты инерт массаға ийе ҳәм Әлемди толығы менен толтырып туратуғын серпимли орталықтағы тербелмели процесс деп қараўдың дурыслығы гүман пайда етпеди. Оған қосымша жақтылықтың поляризациясы усы орталықтың қатты денелердиң қәсийетлерине уқсаслығын келтирип шығарды. Себеби суйықлықта емес, ал қатты денелерде ғана көлденең толқынлар тарқала алады. Солай етип бөлекшелери жақтылық толқынларына сәйкес киши деформациялық қозғалыс пенен қозғала алатуғын "квазисерпимли" жақтылық эфири ҳаққындағы теорияға келип жетти.

Қозғалмайтуғын эфир теориясы деп те аталған бул теория кейинирек Физо тәжирийбесинде тирек тапты. Бул тәжирийбеден эфирдиң қозғалысқа қатнаспайды деп жуўмақ шығарыўға болады. Физо тәжирийбеси арнаўлы салыстырмалық теориясы ушын да фундаменталлық әҳмийетке ийе. Жақтылықтың аберрациясы қубылысы да тап сондай болып квазиқатты эфир теориясының пайдасы ушын хызмет етти".

А.Эйнштейн 1910-жылы жарық көрген "Салыстырмалық принципи ҳәм оның салдарлары" мийнетинде Физо тәжирийбесиниң жылдың ҳәр қыйлы мәўсимлеринде қайталанғанлығын, бирақ барлық ўақытлары да бирдей нәтийжелерге алып келгенлигин атап өтеди. Соның менен бирге Физо тәжирийбесинен қозғалыўшы материя тәрепинен Герц гипотезасы жарым-жарты алып жүрилетуғыны келип шығатуғынлығы, ал басқа барлық тәжирийбелердиң бул гипотезаны бийкарлайтуғынлығы айтылған.

Тек салыстырмалық теориясы пайда болғаннан кейин ғана **Физо тәжирийбесиниң тезликлерди қосыўдың классикалық формуласының ҳәм Галилей түрлендириўлериниң дурыс емес екенлигиниң дәлиллейтуғын тәжирийбе екенлиги анықланды**.

Солай етип жақтылықтың тезлиги ҳаққындағы көз-қараслар 200-300 жыллар даўамында үлкен өзгерислерге ушырады ҳәм өткен әсирдиң ақырында оның турақлылығы ҳаққында пикирлер пайда бола баслады.

Жақтылықтың вакуумдеги тезлигиниң турақлылығы (жақтылық тезлигиниң деректиң ямаса жақтылықты қабыл етиўшиниң тезлигине байланыссызлығы) көп санлы эксперименталлық жумыслардың тәбийий жуўмағы болып табылады. Майкельсон-Морли ҳәм Физо тәжирийбелери тарийхый жақтан биринши тәжирийбелер болды. Кейин ала бул тәжирийбелер басқа да тәжирийбелер менен толықтырылды. Бирақ соған қарамастан жақтылық тезлигин турақлы деп тастыйықлаў туўрыдан-туўры эксперименталлық тексериўлер мүмкиншиликлери шеклеринен шығып кететуғын постулат болып табылатуғынлығын умытпаўымыз керек.

Базы бир жуўмақлар:

1. Галилейдиң салыстырмалық принципи денелердиң тезликлериниң мәниси жақтылықтың тезлигинен әдеўир киши болған жағдайларда дурыс нәтийжелерди береди.

2. Майкельсон-Морли ҳәм Физо тәжирийбелери гипотезалық "дүньялық эфир" түсинигин толық бийкарлады.

3. Эйнштейнниң салыстырмалық принципи еки постулаттан турады:

a) физиканың барлық нызамлары барлық инерциаллық есаплаў системаларына қарата инвариант;

b) жақтылықтың тезлиги барлық инерциаллық есаплаў системаларында бирдей.

4. Эйнштейнниң салыстырмалық принципи оның арнаўлы салыстырмалық теориясының тийкарында турады.

5. Арнаўлы салыстырмалық теориясы "абсолют кеңислик" ҳәм "абсолют ўақыт" түсиниклерин бийкарлады ҳәм кеңисликтиң де, ўақыттың да салыстырмалы екенлигин тастыйықлады.

6. Егер жүрип баратырған поездда ҳәр бир секундта бир реттен мылтық атылып турса (поезддағы мылтық атыўдың жийилиги 1 атыў/с), поезд жақынлап киятырған платформада турған бақлаўшыға мылтық даўысларының жийилиги көбирек болып қабыл етиледи (ω>1 атыў/с). Ал поезд алыслап баратырған жағдайда платформада турған бақлаўшыға мылтық даўыслары сийрексийди (ω<1 атыў/с).

7. Майкельсон-Морли тәжирийбесинде бирдей узынлықтағы "ийинлерди" алыў мүмкиншилиги болған жоқ. Себеби "ийинлерди" бирдей етип алыў узынлықты метрдиң миллионнан бир үлесиндей дәлликте өлшеўди талап етеди. Бундай дәллик Майкельсон-Морли заманында болған жоқ.

8. Жақтылықтың тезлиги оның дереги менен жақтылықты қабыллаўшының тезлигинен ғәрезли емес.

9. Барлық эксперименталлық мағлыўматлар тийкарында биз мынадай жуўмаққа келемиз: Егер қандай да бир инерциаллық есаплаў системасында ноқатлық деректен шыққан жақтылық толқынының фронты сфералық болса, онда сол толқын фронты қәлеген инерциал есаплаў системасында турған бақлаўшы ушын да сфералық болады.

Сораўлар:

1. Кеңислик ҳәм ўақыттың қәсийетлери ҳаққында Орта әсирлердеги Шығыс алымлары қандай пикирде болды?

2. Салыстырмалық принципин физика илиминиң ең тийкарғы принциплери қатарына жатқарады. Нeликтен?

3. Қандай себеплерге байланыслы Ньютон механикасының (динамиканың) теңлемелери Галилей түрлендириўлерине қарата инвариант?

4. Майкельсон-Морли ҳәм Физо тәжирийбелериниң нәтийжелериниң салыстырмалық теориясының дөретилиўине қандай орны бар?

5. Қандай бақлаўшылардың көз-қарасы бойынша физикалық денелердиң өлшемлери қозғалыс бағытында қысқарады?

6. Меншикли ўақыт дегенимиз не?

7. Эйнштейнниң салыстырмалық принципиниң тийукарында кандай постулатлар жатады?

Пайдаланылған әдебиятлар дизими

1. Hugh D. Young, Roger A. Freedman,cjntributing autor A.Lewis Ford. University Physics with modern Physics. 13th Edition. Addison-Wesley. 1598 p.

(p. 1223-1260).

2. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теоретическая физика. Учебное пособие для вузов. В. 10 т. Том II. Теория поля. 8-е издание. Издательство "ФИЗМАТЛИТ". Москва. 2003. 536 с.

Глава 1. §§ 1-3.

3. А.Н.Матвеев. Механика и теория относительности. Учебник для студентов высших учебных заведений. 3-е издание. Издательства "ОНИКС 21 век", "Мир и образование". Москва. 2003. 432 с.

Глава 1.

4. Д.В.Сивухин. Общий курс физики. Учебное пособие. Для вузов. В 5 т. Том I. Механика. 4-е издание. Издательство МФТИ "ФИЗМАТЛИТ". Москва. 2005. 560 с.

Глава 1. § 1.

5. Benjamin Crowell. Spesial Relativity. www.lightandmatter.com, rev. February 11, 2016.

6. Lewis Ryder. Introduction to General Relativity. Cambridge University Press. 2009.

2-лекция. Лоренц түрлендириўлери ҳәм оннан келип шығатуғын нәтийжелер. Кеңисликлик ҳәм ўақытлық кесиндилердиң салыстырмалығы. Эйнштейнниң тезликлерди қосыў нызамы. Аберрация. Бир ўақытлылықтың салыстырмалығы

Тийкарғы принциплер. Галилей түрлендириўлери үлкен тезликлерде дурыс нәтийжелерди бермейди. Бул түрлендириўлерден жақтылық тезлигиниң турақлылығы келип шықпайды, инерциал координаталар системасындағы координаталар менен ўақыт арасындағы байланысларды дурыс сәўлелендирмейди. Сонлықтан экспериментаттық фактлерди дурыс сәўлелендиретуғын, жақтылықтың тезлилгиниң турақлылығына алып келетуғын түрлендириўлерди табыў керек. Бул түрлендириўлер Лоренц түрлендириўлери деп аталады. Бул түрлендириўлерди **салыстырмалық принципи** ҳәм **жақтылықтың тезлигиниң турақлылық принципи** тийкарында келтирилип шығыў мүмкин.

Координаталарды түрлендириўдиң сызықлылығы. Кеңисликтеги бурыўлар ҳәм координаталар басын жылыстырыў жоллары менен жүргизилетуғын геометриялық түрлендириўлер жәрдеминде козғалыўшы координаталар системасының бағытларын 1-сүўретте көрсетилгендей жағдайға алып келиў мүмкин. Тезликлер классикалық (9)-формула бойынша қосылмайтуғын болғанлықтан бир координаталар системасындағы ўақыт тек екинши координата системасындағы ўақыт пенен анықланбастан, координаталардан да ғәрезли болады. Сонлықтан улыўмалық жағдайларда түрлендириўлер төмендегидей түрге ийе болады:

$$x' = \Phi_1(x,y,z,t), y' = \Phi_2(x,y,z,t),\ z' = \Phi_3(x,y,z,t), \qquad (1)$$
$$t' = \Phi_4(x,y,z,t).$$

Бул аңлатпалардың оң тәрепинде түрин анықлаў зәрүр болған гейпара Φ_i функциялары тур.

Бул функциялардың улыўма түри кеңислик пенен ўақыттың қәсийетлери менен анықланады. Биз сайлап алған есаплаў системасындағы ноқатлар бир биринен айырылмайды деп есаплаймыз. Демек координата басын кеңисликтиң қәлеген ноқатына көшириўге болады. Усындай жағдайда қәлеген геометриялық объектлер арасындағы барық геометриялық қатнаслар өзгериссиз қалыўы керек. Бул қәсийет **кеңисликтиң бир теклилиги** деп аталады (кеңисликтиң қәсиетиниң бир ноқаттан екинши ноқатқа өткенде өзгермей қалыўы). Соның менен бирге ҳәр бир ноқатта координата көшерлерин ықтыярлы түрде бағытлаў мүмкин. Бул жағдайда да қәлеген геометриялық объектлер арасындағы барық геометриялық қатнаслар өзгериссиз қалады. **Бул кеңисликтиң қәсийетиниң барлық бағытлар бойынша бирдей екенлиги билдиреди. Бундай қәсийетти кеңисликтиң изотроплылығы деп атаймыз**.

Инерциал есаплаў системаларындағы бир теклилиги менен изотроплылығы кеңисликтиң ең баслы қәсийетлериниң бири болып табылады.

Ўақыт та бир теклилик қәсийетке ийе. Физикалық жақтан ол төмендегидей мәниске ийе:

Мейли белгили бир физикалық ситуация базы бир ўақыт моментинде пайда болсын. Ўақыттың буннан кейинги моментлеринде ситуация раўажлана баслайды. Мейли усындай ситуация басқа бир ўақыт моментинде пайда болсын. Бул жағдайда да тап биринши жағдайдағыдай болып ситуация раўажланатуғын болса ўақыт бир текли деп есапланады. Солай етип **ўақыттың бир теклилиги деп физикалық ситуацияның қайсы ўақыт моментинде пайда болғанлығына ғәрезсиз бирдей болып раўажланыўына ҳәм өзгериўине айтамыз**.

Кеңислик пенен ўақыттың бир теклилигинен (1)-аңлатпалардың сызықлы болыўының керек екенлиги келип шығады. Дәлиллеў ушын x' тың шексиз киши өсими dx' ты қараймыз. Бул өзгериске штрихы жоқ системада шексиз киши dx, dy, dz ҳәм dt өсимлери сәйкес келеди. Математикада кеңнен белгили болған толық дифференциал формуласы жәрдеминде x, y, z, t шамаларының өзгериўлерине байланыслы болған dx' ты есаплаймыз:

$$dx' = \frac{\partial\Phi_1}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}dz + \frac{\partial\Phi_1}{\partial t}dt \qquad (2)$$

аңлатпасын аламыз. Кеңислик пенен ўақыттың бир теклилигинен бул математикалық қатнаслар кеңисликтиң барлық ноқатларында ҳәм барлық ўақыт моментлеринде бирдей болыўы керек. Сонлықтан

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}, \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}, \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}, \frac{\partial\Phi_1}{\partial t}$$

шамалары ўақыттан да, координаталардан да ғәрезсиз, яғный турақлы санлар болыўы шәрт. Сонлықтан Φ_1 функциясы

$$\Phi_1(x,y,z,t) = A_1x + A_2y + A_3z + A_4t + A_5 \qquad (3)$$

түринде жазылыўы керек. Бул формуладағы $A_1, A_2, A_3, \dots$ шамалары турақлылар. Солай етип $\Phi_1(x,y,z,t)$ функциясы өзиниң аргументлериниң сызықлы функциясы болып табылады. Тап усындай жоллар менен кеңислик пенен ўақыттың бир теклилигинен Φ_2, Φ_3 ҳәм Φ_4 шамаларының да (1)-түрлендириўлерде x, y, z, t өзгериўшилердиң сызықлы функциялары болатуғынлығын дәлиллеўге болады.

y ҳәм z лер ушын түрлендириўлер. Ҳәр бир координаталар системасында ноқатлар $x = y = z = 0$, $x' = y' = z' = 0$ теңликлери менен берилген болсын. $t = 0$ ўақыт моментинде координаталар баслары бир ноқатта турады деп есаплайық. Бундай жағдайда (3) түриндеги сызықлы түрлендириўлерде $A_5 = 0$ болыўы керек ҳәм y және z көшерлери ушын түрлендириўлер төмендегише жазылады:

$$\begin{aligned} y' &= a_1x + a_2y + a_3z + a_4t, \\ z' &= b_1x + b_2y + b_3z + b_4t. \end{aligned} \tag{4}$$

1-сүўретте көрсетилгендей y ҳәм y', z ҳәм z' көшерлери өз-ара параллель болсын. x' көшери барлық ўақытта x көшери менен бетлесетуғын болғанлықтан $y = 0$ теңлигинен $y' = 0$ теңлиги, $z = 0$ теңлигинен $z' = 0$ теңлиги келип шығады. Яғный қәлеген x, y, z ҳәм t ушын мына теңликлер орынланады:

$$\begin{aligned} 0 &= a_1x + a_3z + a_4t, \\ 0 &= b_1x + b_2y + b_4t. \end{aligned} \tag{5}$$

Бул теңликлер тек

$$a_1 = a_3 = a_4 = 0 \text{ ҳәм } b_1 = b_2 = b_4 = 0 \tag{6}$$

теңликлери орынланғанда ғана қанаатландырылады. Сонлықтан y ҳәм z лер ушын түрлендириўлер мына түрге енеди:

$$y' = ay, z' = az. \tag{7}$$

Бул аңлатпаларда қозғалысқа қатнасы бойынша y ҳәм z көшерлери теңдей ҳуқыққа ийе болғанлықтан түрлендириўдеги коэффициентлердиң де бирдей болатуғынлығы, яғный $a_3 = b_3 = a$ теңликлериниң орынланатуғынлығыны есапқа алынған. (7)-аңлатпалардағы a коэффициенти базы бир масштабтың узынлығының штрихланбаған системадағыға қарағанда штрихланған системада неше есе үлкен екенлигинен дерек береди. (7)-аңлатпаларды мына түрде көширип жазамыз

$$y = \frac{1}{a}y', z = \frac{1}{a}z'. \tag{8}$$

$\frac{1}{a}$ шамасы базы бир масштабтың штрихланған системадағыға қарағанда штрихланбаған системада неше есе үлкен екенлигинен көрсетеди. Салыстырмалық принципи бойынша еки есаплаў системасы да теңдей ҳуқықлы. Сонлықтан бириншисинен екиншисине өткенде де, кери өткенде де масштаб узынлығы бирдей болып өзгериўи керек. Сонлықтан (7) ҳәм (8) формулаларында $\frac{1}{a} = a$ теңлигиниң сақланыўы шәрт ($a = -1$ болған математикалық шешим бул жерде қолланылмайды, себеби y, z ҳәм y', z көшерлериниң оң бағытлары бир бири менен сәйкес келеди. Демек y, z координаталары ушын түрлендириўлер мынадай түрге ийе:

$$y' = y, z' = z. \tag{9}$$

x пенен t лер ушын түрлендириўлер. y ҳәм z өзгериўшилери өз алдына түрленетуғын болғанлықтан x ҳәм t лар сызықлы түрлендириўлерде тек бир бири менен байланысқан болыўы керек. Ондай жағдайда қозғалмайтуғын системаға қарағанда қозғалыўшы системанық координата басы $x = vt$ координатасына, ал қозғалыўшы системада $x' = 0$ координатасына ийе болыўы керек. Түрлендириўдиң сызықлы екенлигине байланыслы

$$x' = \alpha(x - vt) \qquad (10)$$

аңлатпасын жаза аламыз. Бул аңлатпада α арқалы анықланыўы керек болған пропорционаллық коэффициент белгиленген.

Қозғалыўшы есаплаў системысында турып ҳәм бул системаны қозғалмайды деп есаплап жоқарыдағыдай талқылаўды даўам еттириўимиз мүмкин. Бундай жағдайда штрихланбаған координата системасының координата басы $x' = vt$ аңлатпасы жәрдеминде анықланады. Себеби штрихланған системада штрихланбаған система x көшериниң терис мәнислери бағытында қозғалады. Штрихланбаған системада штрихланбаған системаның координата басы $x = 0$ теңлиги жәрдеминде тәрийипленеди. Демек штрихланған системадан бул системаны қозғалмайды деп есаплап (10) ның орнына

$$x = \alpha'(x' + vt) \qquad (11)$$

түрлендириўине келемиз. Бул аңлатпада да α' арқалы пропорционаллық коэффициенти белгиленген. Салыстырмалық принципи бойынша $\alpha = \alpha'$ екенлигин дәлиллеймиз.

Мейли узынлығы l болған стержень штрихланған координата системасында тынышлықта турған болсын. Демек стерженниң басы менен ақырының координаталары l шамасына айырмаға ийе болады деген сөз:

$$x'_2 - x'_1 = l. \qquad (12)$$

Штрихланбаған системада бул стержень v тезлиги менен қозғалады. Стерженниң узынлығы деп қозғалмайтуғын системадағы еки ноқат арасындағы қашықлық есапланады. Усы еки ноқатқа бир ўақыт моментинде қозғалыўшы стерженниң басы менен ақыры сәйкес келеди. t_0 ўақыт моментиндеги стерженниң басы менен ақырын (ушын) белгилеп аламыз. (10) ның тийкарында сол x'_1 ҳәм x'_2 ноқатлары ушын мына аңлатпаларды аламыз:

$$x'_1 = \alpha(x_1 - vt_0), x'_2 = \alpha(x_2 - vt_0). \qquad (13)$$

Демек қозғалыўшы стерженниң узынлығы қозғалмайтуғын штрихланбаған системада мынаған тең:

$$x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1}{\alpha} = \frac{l}{\alpha}. \qquad (14)$$

Енди мейли сол стержень штрихланбаған системада тынышлықта турған болсын ҳәм бул системада l узынлығына ийе болсын. Демек стерженниң басы менен ушы арасындағы координаталар l шамасына парық қылады деген сөз, яғный

$$x_2 - x_1 = l. \qquad (15)$$

Қозғалмайтуғын штрихланбаған системада стержень $-v$ тезлиги менен қозғалады. Штрихланған системада турып (яғный усы системаға салыстырғандағы) стерженниң узынлығын өлшеў ушын усы системадағы қандай да бир t_1' ўақыт моментинде стерженниң басы менен ушын белгилеп алыў керек. (11)-формула тийкарында мынаған ийе боламыз:

$$x_1 = \alpha'(x_1' - vt_0'), x_2 = \alpha'(x_2' - vt_0'). \qquad (16)$$

Демек қозғалмайды деп қабыл етилген штрихланған координаталар системасындағы стерженниң узынлығы мынаған тең:

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\alpha'} = \frac{l}{\alpha'}. \qquad (17)$$

Салыстырмалық принципи бойынша еки система да тең ҳуқықлы ҳәм бул системалардың екеўинде де бирдей тезлик пенен қозғалатуғын бир стерженниң узынлығы бирдей болады. Сонлықтан (14) ҳәм (17) формулаларда $\frac{l}{\alpha'} = \frac{l}{\alpha}$, яғный $\alpha' = \alpha$ теңлигиниң орын алыўы керек. Биз усы жағдайды дәлиллеўимиз керек еди.

Енди жақтылықтың тезлигиниң турақлылығы постулатына келемиз. Мейли координата баслары бир ноқатта турған жағдайда ҳәм саатлар $t = t' = 0$ ўақытын көрсеткен моментте сол координата басларынан жақтылық сигналы жиберилген болсын. Еки координаталар системасында да (штрихланған ҳәм штрихланбаған) жақтылықтың таралыўы

$$x' = ct', x = ct \qquad (18)$$

теңликлериниң жәрдеминде бериледи. Бул жерде еки системада да жақтылықтың бирдей тезликке ийе болатуғынлығы есапқа алынған. Бул аңлатпадағы мәнислерди (8)- ҳәм (9)- аңлатпаларға қойсақ ҳәм α = α' екенлигин есапқа алсақ

$$ct' = \alpha t(c - v), ct = \alpha t'(c + v) \qquad (19)$$

аңлатпаларын аламыз. Бул аңлатпалардың шет тәрепин шеп тәрепи менен, оң тәрепин оң тәрепи менен көбейтип $t't$ көбеймесине қысқартсақ

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (20)$$

формуласын аламыз. (11)-аңлатпадан (10)-аңлатпаны пайдаланыў арқалы мынаған ийе боламыз

$$vt' = \frac{x}{a} - x' = \frac{x}{a} - \alpha(x - vt) = \alpha vt + x\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right). \qquad (21)$$

Буннан (20)-аңлатпаны есапқа алып

$$t' = \alpha\left\{t + \frac{x}{v}\left(\frac{1}{\alpha^2} - 1\right)\right\} = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (22)$$

теңлигиниң орынланатуғынлығына исенемиз.

Енди Лоренц түрлендириўлерин аңсат келтирип шығарамыз. (9)-, (10)- ҳәм (22)- түрлендириўлери бир бирине салыстырғанда V тезлиги менен қозғалатуғын системалардың координаталарын байланыстырады. Олар Лоренц түрлендириўлери деп аталады. Түрлендириў формулаларын және бир рет көширип жазамыз:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, y' = y, z' = z, t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (23)$$

Салыстырмалық принципи бойынша кери өтиў де тап усындай түрге ийе болады, тек ғана тезликтиң белгиси өзгереди:

$$x = \frac{x' + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, y = y', z = z', t = \frac{t' - \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (24)$$

Галилей түрлендириўлери Лоренц түрлендириўлериниң дара жағдайы болып табылады. Ҳақыйқатында да $\frac{v}{c} \ll 1$ болғанда (киши тезликлерде) Лоренц түрлендириўлери толығы менен Галилей түрлендириўлерине өтеди. Киши тезликлерде Галилей түрлендириўлери менен Лоренц түрлендириўлери арасындағы айырма сезилерликтей болмайды. Сонлықтан Галилей түрлендириўлериниң дәл емес екенлиги көп ўақытларға шекем физиклердиң итибарынан сыртта қалып кетти.

Лоренц түрлендириўлеринен келип шығатуғын нәтийжелер ҳәм интервал. Бир ўақытлылықтың салыстырмалылығы. Координата системасының **ҳәр қандай x_1 ҳәм x_2 ноқатларында ўақыялар усы системаның сааты бойынша бир ўақыт моментинде жүз берсе бир ўақытта болатуғын ўақыялар деп аталады**. Ҳәр бир ноқатта жүз беретуғын ўақыя сол ноқатта турған саат жәрдеминде белгиленеди. Еки ўақыя қозғалмайтуғын координаталар системасында бир t_0 ўақыт моментинде басланды деп есаплаймыз.

Қозғалыўшы координаталар системасында бул ўақыялар x_1' ҳәм x_2' ноқатларында t_1' ҳәм t_2' ўақыт моментлеринде басланады деп қабыл етейик. t_1' ҳәм t_2' ўақытлары қозғалыўшы системадағы x_1' ҳәм x_2' ноқатларында турған саатлардың көрсетиўи болады. Штрихланған ҳәм штрихланбаған координаталар арасындағы байланыс (23) Лоренц түрлендириўлери жәрдеминде бериледи:

$$\begin{gathered} x_1' = \frac{x_1 - vt_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, x_2' = \frac{x_2 - vt_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ t_1' = \frac{t_0 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, t_2' = \frac{t_0 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{gathered} \qquad (25)$$

Ўақыялар x көшериниң бойында жайласқан ноқатларда жүз бергенликтен y ҳәм z координаталары еки координата системаларында да бирдей болады. (25)-аңлатпалар қозғалыўшы системада бул ўақыялардың бир ўақыт моментинде болмайтуғынлығын көрсетип тур $(t_1' \neq t_2')$. Ҳақыйқатында да олар

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{\frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (26)$$

ўақыт интервалына айрылған. Демек бир координаталар системасында бир ўақытта жүз беретуғын ўақыялар екинши системада бир ўақытта жүз бермейди екен.

Бир ўақытлылық түсиниги координаталар системасынан ғәрезсиз абсолют мәниске ийе болмайды. Қандай да бир ўақыялардың бир ўақытта болғанлығын айтыў ушын усы ўақыялардың қайсы координаталар системасында болып өткенлигин айтыў шәрт.

Бир ўақытлылықтың салыстырмалылығы ҳәм себеплилик. (26)-формуладан егер $x_1 > x_2$ болса, онда x тың оң бағытына карай қозғалатуғын координаталар системасында $t_2' > t_1'$ теңсизлигиниң орын алатуғынлығы көринип тур. Ал қарама-карсы бағытта қозғалатуғын координаталар системасында болса $(v < 0)$ $t_2' < t_1'$ теңсизлиги орны алады. Солай етип еки ўақыяның жүзеге келиў избе-излиги ҳәр қыйлы координаталар системасында ҳәр қыйлы болады екен. Усыған байланыслы мынадай тәбийий сораў туўылады: бир координаталар системасында себептиң нәтийжеден бурын жүзеге келиўи, ал екинши бир координаталар системасында нәтийжениң себептен кейин жүзеге келиўи мүмкин бе? Әлбетте бундай жағдай ўақыялар себеп-нәтийжелик бойынша байланысқан (ўақыяның болып өтиўи ушын белгили бир себептиң орын алыўы керек) болыўы керек деп есаплайтуғын теорияларда болмайды: ўакыяға көз-қараслар өзгергенде де себеп пенен нәтийже арасындағы орын алмасыўдың болыўы мүмкин емес.

Себеп-нәтийжелик арасындағы байланыстың объектив характерге ийе болыўы ҳәм бул байланыс карап атырылған координаталар системасынан ғәрезсиз болыўы ушын ҳәр қыйлы ноқатларда жүз беретуғын ўақыялар арасындағы физикалық байланысты тәмийинлейтуғын материаллық тәсирлесиўлердиң ҳәммеси де жақтылықтың тезлигинен үлкен тезлик пенен тарқала алмайды. Басқа сөз бенен айтқанда бир ноқаттан екинши ноқатқа физикалық тәсир жақтылықтың тезлигинен үлкен тезликлерде жеткерилип бериле алмайды. Усының салдарынан ўақыялардың себеплилик пенен байланыслы екенлиги объектив характерге ийе болады: себеп пенен нәтийже орын алмасатуғын координаталар системасы болмайды.

Қозғалыўшы денениң узынлығы.

Қозғалыстағы стерженниң узынлығы деп усы стерженниң еки ушына сәйкес келиўши қозғалмайтуғын системадағы усы системаның сааты бойынша бир ўақыт моментинде алынған еки ноқат арасындағы қашықлықты айтамыз. Солай етип қозғалыўшы стерженниң ушлары қозғалмайтуғын системада усы системаның саатларының жәрдеминде ўақыттың бир моментинде белгиленип алынады екен. Ал қозғалыўшы системаның саатлары бойынша белгиленип алыў моментлери басқаша болады. Қозғалмайтуғын системада бир ўақыт моментинде белгиленип алынған еки ноқат арасындағы қашықлық басқа мәниске ийе болады. Демек, стерженниң узынлығы Лоренц түрлендириўиниң инварианты болып табылмайды ҳәм ҳәр қыйлы есаплаў системаларында ҳәр қыйлы мәниске ийе болады.

Мейли узынлығы l ге тең болған стержень штрихланған координаталар системасында тынышлықта турған болсын ҳәм оның бойы x' бағытына параллел болсын. Биз бул жерде денениң узынлығы ҳаққында айтканда усы денениң тынышлықта турған координаталар системасындағы узынлығын айтатуғынымызды сеземиз. Стерженниң ушларының координаталарын x_1' ҳәм x_2' деп белгилеймиз, қала берсе $x'_2 - x'_1 = l$. Бул жерде l штрихсыз жазылған. Себеби l стерженниң усы стержень қозғалмай турған координаталар системасындағы, басқа сөз бенен айтқанда тыныш турған стерженниң узынлығы болып табылады.

t_0 ўақыт моментинде v тезлиги менен қозғалатуғын стерженниң ушларындағы ноқатларды штрихланбаған координаталар системасында белгилеп аламыз. Лоренц түрлендириўлери формулалары тийкарында

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, x'_2 = \frac{x_2 - vt_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{32}$$

аңлатпаларын жаза аламыз. Буннан

$$l = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{33}$$

формуласын аламыз. Бул формулада $l' = x_2 - x_1$ арқалы қозғалыўшы стерженниң узынлығы белгиленген. Демек (33)-аңлатпаны

$$l' = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{34}$$

түринде көширип жазып қозғалыўшы стерженниң узынлығының қозғалыс бағытындағы узынлығының қозғалмай турған стерженниң узынлығынан киши болатуғынлығын сеземиз. Әлбетте, егер биз усы талқылаўларды тынышлықта тур деп қабыл етилген штрихланған координаталар системасы көз-қарасында турып ислесек те қозғалыўшы стерженниң узынлығының (34)-формула менен анықланатуғынлығына келемиз. Бундай жағдайдың орын алыўы салыстырмалық принципи тәрепинен талап етиледи.

Егер стерженди қозғалыс бағытына перпендикуляр етип y' яки z' көшерлери бағытында орналастырсақ, онда (25)-формуладан стерженниң узынлығының өзгериссиз қалатуғынлығын көриўге болады. Солай етип денениң өлшемлери салыстырмалы тезликтиң бағытына перпендикуляр бағытларды өзгериссиз қалады.

Мысал ретинде Жер шарының қозғалыс бағытындағы диаметрин алып қараймыз. Оның узынлығы 12 мың километрдей, орбита бойынша тезлиги 30 км/с. Бундай тезликте Жер шарының диаметри 6 см ге қасқарады.

Қозғалыўшы денениң өлшемлериниң қозғалыс бағытында өзгеретуғынлығы ҳаққындағы батыл усыныс биринши рет бир биринен ғәрезсиз Фитжеральд (Fitzgerald) ҳәм Лорентц (Lorentz) тәрепинен берилди. Олар қәлеген денениң қозғалыс бағытындағы сызықлы өлшемлери тек усы қозғалысқа байланыслы өзгереди деп болжады. Бул болжаў дурыс болып шықты ҳәм Майкельсон тәжирийбесиниң күтилген нәтийжелерди бермеўиниң себебин толық түсиндирди.

Қозғалыстағы саатлардың жүриў темпи. Мейли қозғалыўшы координаталар системасының x'_0 ноқатында t'_1 ҳәм t'_2 ўақыт моментлеринде еки ўақыя жүз берген болсын. Усы еки ўақыялар арасындағы ўақыт интерваллары қозғалыўшы системада $\Delta t' = t'_2 - t'_1$, ал тынышлықта турған системада $\Delta t = t_2 - t_1$ болсын. Лоренц түрлендириўлери тийкарында

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{v}{c^2}x_0'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, t_2 = \frac{t_2' + \frac{v}{c^2}x_0'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{35}$$

теңликлерине ийе боламыз. Буннан мына формула келип шығады:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{36}$$

Солай етип қозғалыўшы саатлар менен өлшенген ўақыялар арасындағы ўақыт интервалы

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{37}$$

тынышлықта турған саатлар менен өлшенген ўақытқа қарағанда кем болып шығады. Демек **тынышлықта турған саатлардың жүриўине қарағанда қозғалыстағы саатлардың жүриўиниң темпи кем болады**.

Меншикли ўақыт. Қозғалыўшы ноқат пенен байланыслы саат пенен (ноқат пенен бирге қозғалатуғын) өлшенген ўақыт бул ноқаттың меншикли ўақыты деп аталады. (37)-формулада шексиз киши ўақыт интервалына өтиў ҳәм оны былайынша жазыў мүмкин:

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{38}$$

Бул аңлатпада $d\tau$ арқалы козғалыўшы ноқаттың меншикли ўақытының дифференциалы, dt арқалы қарап атырылған ноқат берилген ўақыт моментинде V тезлигине ийе болатуғын инерциаллық координаталар системасындағы ўақыттың дифференциалы белгиленген. $d\tau$ дың қозғалыўшы ноқат пенен байланысқан ҳәр қыйлы сааттлардың көрсетиўлериниң өзгериси, ал dt болса қоңысылас кеңисликлик ноқатта жайласқан қозғалмайтуғын координаталар системасының ҳәр қыйлы саатларының көрсетиўлери екенлигин сеземиз.

Биз жоқарыда интервалдың квадратының, интервалдың дифференциалының инвариант екенлигин көрдик [(29)-формула]. Усыған байланыслы $dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2$ шамасының да қоңысылас еки ноқат арасындағы кеңисликлик қашықлықтың дифференциалының да инвариант екенлигин сеземиз. Сонлықтан ҳәзир ғана еске алынған инварианттың дифференциалы ушын жазылған (29)-формуланың

$$\frac{ds}{i} = c\,dt\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2} = c\,dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{39}$$

аңлатпасында келтирилгендей етип түрлендирилиўиниң мүмкин екенлигин көремиз. Бул формулада интервалы есапланып атырған ўақыялар сыпатында қозғалыўшы ноқаттың биринен соң бири избе-из келетуғын еки аўҳалы алынған ҳәм оның тезлигиниң квадратының

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

екенлиги есапқа алынған. Егер

$$ds^2 = dr^2 - c^2t^2 = (-1)(c^2t^2 - dr^2)$$

екенлигин инабатқа алатуғын болсақ, онда жормал сан $i = \sqrt{-1}$ диң қалай пайда болғанлығын аңғарыў мүмкин.

(38)-ҳәм (39)-аңлатпаларды салыстырыў меншикли ўақыттың дифференциалы $d\tau$ дың интервалдың дифференциалы арқалы былайынша аңлатылатуғынлығын көрсетеди:

$$d\tau = \frac{ds}{ic}. \tag{40}$$

(29)-формуладан көринип турғанындай, интервалдың дифференциалы инвариант болып табылады. Жақтылықтың тезлиги турақлы шама болғанлықтан (16) дан **меншикли ўақыт Лоренц түрлендириўлерине қарата инвариант** деп жуўмақ шығарыўға болады.

Бул пүткиллей тәбийий нәрсе. Себеби меншикли ўақыт қозғалыўшы ноқат пенен байланысқан координаталар системасында анықланады ҳәм қайсы координаталар системасында меншикли ўақыттың анықланғанлығы әҳмийетке ийе болмайды.

Тезликлерди қосыў. Биз классикалық механикадағы тезликлерди қосыўды үйрендик. Енди ретятивистлик механикада тезликлерди қалай қосатуғыны менен танысамыз.

Мейли қозғалыўшы координаталар системасында материаллық ноқаттың қозғалысы

$$x' = x'(t'), y' = y'(t'), z' = z'(t'), \tag{41}$$

ал тынышлықта турған системада болса

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \tag{42}$$

параметрлик функцияларының жәрдеминде берилген болсын. Қозғалыўшы ҳәм қозғалмайтуғын системалардағы материаллық ноқаттың тезлигиниң төменде келтирилген қураўшылары арасында байланысты табыўымыз керек:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'}, v'_y = \frac{dy'}{dt'}, v'_z = \frac{dz'}{dt'}. \tag{43}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{44}$$

Бизге белгили болған формулалардан

$$dx = \frac{dx' + V\,dt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, dy = dy', dz = dz', \tag{45}$$

$$dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{dt'\left(1 + \frac{V\,v'_x}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

формулаларына ийе боламыз. Дифференциаллардың бул мәнислерин (45)-аңлатпадан (44)-қатнасқа қойсақ ҳәм (43)-қатнасты есапқа алсақ, онда төмендегилерди табамыз:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + V\frac{v'_x}{c^2}},$$
$$v_y = \frac{v'_y\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + V\frac{v'_x}{c^2}}, \qquad (46)$$
$$v_z = \frac{v'_z\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + V\frac{v'_x}{c^2}}.$$

Бул формулалар салыстырмалық теориясының тезликлерди қосыў формулалары болып табылады. Штрихланған система координаталарынан штрихланбаған система координаталарына да өтиў мүмкин. Бундай жағдайда V тезлигин $-V$ менен, штрихланған шамалар штрихланбаған шамалар, штрихланғанлары штрихланбағанлары менен алмастырылады. Бул формулалардан, мысалы, жақтылық тезлигиниң турақлылығы келип шығады. Усы жағдайды дәлиллеймиз. Мейли (46)-аңлатпаларда $v'_y = v'_z = 0,\ v'_x = c$ болсын. Онда

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + V\frac{v'_x}{c^2}} = \frac{c + V}{1 + \frac{cV}{c^2}} = c, v_y = 0, v_z = 0 \qquad (47)$$

аңлатпаларына ийе боламыз. Демек жақтылықтың тезлигинен үлкен тезлик алынбайды екен.

Аберрация. Мейли штрихланған координаталар системасында y' көшери бағытында жақтылық нуры тарқалатуғын болсын. Бундай жағдайда

$$v'_x = 0, v'_y = c, v'_z = 0.$$

Қозғалмайтуғын есаплаў системасы ушын төмендегини аламыз:

$$v_x = V, v_y = c\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, v_z = 0.$$

Демек қозғалмайтуғын координаталар системасында жақтылық нурының бағыты менен y көшери бағыты өз-ара параллель болмай, олар бир бирине салыстырғанда қандай да бир β мүйешине бурылған болып шығады. Бул мүйештиң мәниси

$$tg\,\beta = \frac{v_x}{v_y} = V/c\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \qquad (48)$$

шамасына тең болады. Егер $\frac{V}{c} \ll 1$ теңсизлиги орын алатуғын болса, онда (48)-аңлатпа классикалық физика беретуғын $tg\beta = \frac{v_{\perp}}{c}$ формула менен бирдей түрге енеди. Бирақ (48)-аңлатпаның мәниси пүткиллей басқаша. Классикалық физикада мынадай жағдайларды бир биринен айырыў керек:

қозғалыўшы дерек – қозғалмайтуғын бақлаўшы,

қозғалмайтуғын дерек – қозғалыўшы бақлаўшы.

Ал салыстырмалық теориясында болса тек дерек пенен бақлаўшының бир бирине салыстырғандағы қозғалысы ғана әҳмийетке ийе болады.

Тезлениўди түрлендириў. Мейли штрихланған системада материаллық ноқат, қураўшылары a'_x, a'_y, a'_z болған тезлениў менен қозғалысын. бирақ материаллық нокаттың тезлиги усы ўақыт моментинде нолге тең болсын. Сонлықтан штрихланған координаталар системасында ноқаттың қозғалысы төмендегидей формулалар жәрдеминде тәрийипленеди:

$$\frac{dv'_x}{dt'} = a'_x, \frac{dv'_y}{dt'} = a'_y, \frac{dv'_z}{dt'} = a'_z, v'_x = v'_y = v'_z = 0. \tag{49}$$

Штрихланбаған координиталар системасындағы ноқаттың қозғалысын изертлеймиз. Тезликти (46)-аңлатпадан табамыз:

$$v_x = V, v_y = 0, v_z = 0. \tag{50}$$

Штрихланбаған координаталар системасындағы тезлениўлер:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{dv_y}{dt}, a_z = \frac{dv_z}{dt} \tag{51}$$

формулаларының жәрдеминде анықланады.

dt, dv_x, dv_y, dv_z шамалары (45)-(46) формулалардың жәрдеминде анықланады. Дифференциалларды есаплап болғаннан кейин ғана тезликлер $v'_x = v'_y = v'_z = 0$ деп есаплаў мүмкин. Мысалы dv_x ушын

$$dv_x = \frac{dv'_x}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}} - \frac{(v'_x - V)\frac{V}{c^2}v'_x}{\left(1 + V\frac{v'_x}{c^2}\right)^2} = \tag{52}$$

$$= \frac{dv'_x}{\left(1 + V\frac{v'_x}{c^2}\right)^2}\left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2} - \frac{Vv'_x}{c^2} - \frac{V^2}{c^2}\right) = \frac{1 - V^2/c^2}{\left(1 + V\frac{v'_x}{c^2}\right)^2} dv'_x$$

аңлатпасына ийе боламыз. Буннан (45)-қатнасты есапқа алыў жолы менен

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{dv'_x}{dt'} = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} a'_x \tag{53}$$

түрлендириў формуласына ийе боламыз. Бул формулада (49)-аңлатпаға сәйкес $v'_x = 0$ деп есапланған.

Усындай жоллар менен dv_y ҳәм dv_z дифференциаллары есапланады. Солай етип тезлениўди түрлендириўдиң төмендегидей формулаларын аламыз:

$$a_x = \sqrt[3]{1-\frac{V^2}{c^2}}\, a'_x, \qquad \begin{matrix}(54)\\(30)\end{matrix}$$

$$a_y = \sqrt[3]{1-\frac{V^2}{c^2}}\, a'_y,$$

$$a_z = \sqrt[3]{1-\frac{V^2}{c^2}}\, a'_z.$$

Штрихланбаған системада ноқат V тезлиги менен қозғалады. Сонлықтан соңғы формулалар төмендеги мәнисти аңғартады:

Қозғалыўшы материаллық ноқат пенен усы ноқат тынышлықта туратуғын инерциал координаталар системасын байланыстырыў мүмкин. Усындай координаталар системасы алып жүриўши координаталар системасы деп аталады. Егер усы координаталар системасында ноқат тезлениў менен қозғалса, онда бул ноқат басқа да қәлеген координаталар системасында тезлениў менен қозғалады. Бирақ тезлениўдиң мәниси басқа системада басқа мәниске, бирақ барлық ўақытта да киши мәниске ийе болады. Қозғалыс бағытында тезлениў қураўшысы $\sqrt[3]{1-\frac{V^2}{c^2}}$ көбейтиўшисине пропорционал киширейеди (V арқалы тезлениў қарап атырылған системадағы тезлик белгиленген). Тезликке перпендикуляр бағыттағы тезлениўдиң көлденең қураўшысы $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$ көбейтиўшисине пропорционал болған кемирек өзгериске ушырайды. Бул хаққында басқа лекцияларда да гәп етиледи.

Бир қатар жуўмақлар:

1. Кеңисликтиң бир теклилиги менен изотроплығы оның инерциал координаталар системасындағы ең баслы қәсийети болып табылады.

2. Ўақыттың бир теклилиги берилген физикалық ўақыяның ўақыттың қайсы моментинен басланғанынан ғәрезсиз бирдей болып раўажланыўы ҳәм өзгериси болып табылады. Мысалы қандай да бир бийикликтен тас ўақыттың кайсы моментинен тасланғанлығынан ғәрезсиз Жердиң бетине бирдей ўақыт ишинде бирдей тезлик пенен қулап түседи.

3. Салыстырмалық теориясы себеплилик принципин дәлиллемейди. Бул теория себеплилик принципи барлық координаталар системасында орын алады деп есаплайды. Усы жағдай тийкарында физикалық тәсирлердиң тарқалыў тезлигине шек қойылады.

4. Лоренц түрлендириўлери тек инерциал есаплаў системаларында дурыс нәтийже береди. Сонлықтан Жер шарын батыстан шығысқа ҳәм шығыстан батысқа қарап қозғалған жағдайлардағы саатлардың жүриў темпин салыстырғанда Жердиң бети менен байланысқан қоординаталар системасын пайдаланыўға болмайды.

5. Қозғалыўшы системаларда ўақыт қозғалмайтуғын системаларға салыстырғанда әстелик пенен өтеди.

6. Меншикли ўақыт Лоренц түрлендириўлерине қарата инвариант шама болып табылады.

7. Абсолют қатты денелердиң болыўы мүмкин емес.

Сораўлар:

1. Қозғалыўшы денелердиң узынлығын анықлаў классикалық механикада ҳәм салыстырмалық теориясында айырмаға ийе ме?

2. Қозғалыўшы денелердиң узынлығының қысқаратуғынлығын тастыйықлаўдың физикалық мәниси нелерден ибарат?

3. Жер шарын батыстан шығысқа ҳәм шығыстан батысқа қарап қозғалған жағдайлардағы саатлардың жүриў темпин салыстырғанда Жердиң бети менен байланысқан координаталар системасын пайдаланыўға болмайтуғынлығын қалай дәлиллеўге болады?

4. Егизеклер парадоксының мәниси неден ибарат ҳәм бул парадокс қалай шешиледи?

Пайдаланылған әдебиятлар дизими

1. Hugh D. Young, Roger A. Freedman,cjntributing autor A.Lewis Ford. University Physics with modern Physics. 13th Edition. Addison-Wesley. 1598 p.

(p. 1223-1260).

2. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теоретическая физика. Учебное пособие для вузов. В. 10 т. Том II. Теория поля. 8-е издание. Издательство "ФИЗМАТЛИТ". Москва. 2003. 536 с.

Глава 1. §§ 4-7.

3. А.Н.Матвеев. Механика и теория относительности. Учебник для студентов высших учебных заведений. 3-е издание. Издательства "ОНИКС 21 век", "Мир и образование". Москва. 2003. 432 с.

Глава 2.

3-лекция. Интервал. Ўақытқа, кеңисликке ҳәм жақтылыққа мегзес интерваллар. Меншикли ўақыт. Минковский кеңислиги (Минковскийдиң кеңислик-ўақыты). Лоренц түрлендириўлерин ҳәм тезликлерди қосыў нызамын геометриялық көз-қарастан интерпретациялаў

Интервал ҳәм оның инвариантлылығы. Мейли ўақыялар t_1 ўақыт моментинде x_1, y_1, z_1 ноқатында, ал t_2 ўақыт моментинде x_2, y_2, z_2 ноқатында жүз берген болсын. Усы **ўақыялар арасындағы интервал** деп

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 \qquad (1)$$

шамасына айтамыз (бул шаманы x_1, y_1, z_1, t_1 ҳәм x_2, y_2, z_2, t_2 ноқатлары арасындағы интервал деп те аталады). Барлық координаталар системасында бул шама бирдей мәниске ийе болады ҳәм сонлықтан оны Лоренц түрлендириўиниң инварианты деп атаймыз. Усы жағдайды дәлиллеймиз ҳәм формуланы штрихланған система ушын жазамыз.

$$x_2 - x_1 = \frac{(x_2' - x_1') + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$y_2 - y_1 = y_2' - y_1',$$

$$z_2 - z_1 = z_2' - z_1',$$
$$t_2 - t_1 = \frac{(t_2' - t_1') + \frac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Бул аңлатпалардан интервалдың

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = \\ = (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 - c^2(t_2' - t_1')^2 = s'^2 \quad (2)$$

инвариант екенлиги, яғный $s^2 = s'^2$ теңлигиниң орын алатуғынлығы дәлилленеди. Бундай жазыўды әдетте $s^2 = s'^2 = inv$ деп жазады.

(2)-аңлатпадан қызықлы нәтийже шығарамыз. Сырттан қарағанда бул формула төрт өлшемли кеңисликтеги координаталары x_1, y_1, z_1, t_1 ҳәм x_2, y_2, z_2, t_2 болған еки ўақыя (еки ноқат) арасындағы қашықлыққа усайды. Егер $c^2(t_2 - t_1)^2$ ямаса $c^2(t_2' - t_1')^2$ шамалары алдындағы белги "+" белгиси болғанда (2)-аңлатпа ҳақыйқатында да төрт өлшемли Евклид геометриясындағы ўақыя (еки ноқат) арасындағы қашықлық болған болар еди. Усы жағдайға байланыслы төртинши координата алдындағы белги минус болған төрт өлшемли кеңислик бар деп есаплаймыз ҳәм бул кеңисликти көпшилик физиклер **псевдоевклид кеңислиги** деп атайтуғынлығын атап өтемиз.

Егер қарап атырылған ўақыялар бир бирине шексиз жақын жайласса, онда (2)-теңлик интервалдың дифференциалының квадратының инвариантлылығын дәлиллейди:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 = inv. \quad (3)$$

Кеңисликке мегзес ҳәм ўақытқа мегзес интерваллар. Ўақыялар арасындағы кеңисликлик қашықлықты l арқалы, ал олар арасындағы ўақыт аралығын t арқалы белгилеймиз. Усы еки ўақыя арасындағы интервалдың квадраты $s^2 = l^2 - c^2t^2$ инвариант болып табылады.

Мейли базы бир координаталар системасында ўақыялар себеп пенен байланыспаған болсын. Бундай жағдайда сол ўақыялар ушын $l > ct$ ҳәм сәйкес $s^2 > 0$ теңсизликлери орын алады. Интервалдың инвариантлылығынан басқа барлық координаталар системаларында да бул ўақыялардың себеплилик байланысы менен байланыспағанлығы келип шығады. Әлбетте қарама-қарсы мәниске ийе тастыйықлаў да ҳақыйқатлыққа сәйкес келеди: егер базы бир координаталар системасында ўақыялар бир бири менен себеплилик пенен байланысқан болса ($l < ct, s^2 < 0$), онда ол ўақыялар принципинде басқа барлық координаталар системаларында да белгили бир себеплер менен байланысқан болады.

Квадраты нолден үлкен, яғный

$$s^2 > 0 \quad (4)$$

болған интервал **кеңисликке мегзес интервал** деп аталады.

Квадраты нолден киши, яғный

$$s^2 < 0 \quad (5)$$

болған интервал **ўақытқа мегзес интервал** деп аталады.

Егер интервал кеңисликке мегзес болса, онда еки ўақыя бир ўақыт моментинде кеңесликтиң еки ноқатында жүз беретуғын координаталар системасын сайлап алыўға болады ($s^2 = l^2 > 0, t = 0$). Соның менен бирге усы шәрт орынланғанда еки ўақыя бир ноқатта жүз беретуғын координаталар системасын сайлап алыў мүмкин емес (Бундай жағдайда $l = 0$, яғный $s^2 = -c^2t^2$ теңлиги орын алған болар еди, бул $s^2 > 0$ шәртине қайшы келеди).

Егер интервал ўақытқа мегзес болса, онда еки ўақыя кеңисликтиң бир ноқатында, бирақ хәр қыйлы ўақыт моментлеринде жүз беретуғын координаталар системасын сайлап алыў мүмкин ($l = 0, s^2 = -c^2t^2 < 0$). Бирақ бул жағдайда усы еки ўақыя бир ўақытта жүзеге келетуғын координаталар системасын сайлап алыў мүмкин емес (бундай жағдайда $t = 0$, яғный $s^2 = l^2 > 0$ шәрти орынланып, ол $s^2 < 0$ шәртине қайшы келген болар еди. Солай етип принципинде себеплилик байланыста тура алатуғын еки ўақыя ушын усы еки ўақыя кеңисликтиң бир ноқатында ўақыт бойынша биринен соң бири жүзеге келетуғын координаталар системасын сайлап алыў мүмкин.

Еки ўақыя жақтылық сигналы менен байланысатуғын дара жағдайдың да орын алыўы мүмкин. Бундай жағдайда мынаны аламыз:

$$s^2 = 0.$$

Бундай интервал жақтылыққа мегзес интервал деп аталады.

Ўақыялар арасындағы интервалдың ўақытқа мегзеслиги ямаса кеңисликке мегзеслиги сайлап алынған координаталар системасына байланыслы емес. Бул ўақыялардың өзлериниң инвариантлық қәсийети болып табылады.

Интерваллар бойынша енди төмендегидей кесте келтиремиз:

Еки ўақыя ушын координаталар хәм ўақыт арасындағы байланыс	Интервалдың типи	Ўақыялар арасындағы байланыстың характери
$c\lvert\Delta t\rvert < \lvert\Delta x\rvert$; $\Delta s^2 < 0$	Кеңисликке мегзес.	Себеп пенен байланыс жоқ (себеплилик жоқ).
$c\lvert\Delta t\rvert > \lvert\Delta x\rvert$; $\Delta s^2 > 0$	Ўақытқа мегзес.	Себеп пенен байланыстың орын алыўы мүмкин.
$c\lvert\Delta t\rvert = \lvert\Delta x\rvert$; $\Delta s^2 = 0$	Жақтылыққа мегзес.	Ўақыялардың жақтылық сигналы менен байланысқан болыўы мүмкин.

1908-жылы немец математиги хәм физиги Герман Минковский (1864-1909) физика хәм математика илимлерине **төрт өлшемли дүнья** (*четырехмерный мир*) түсинигин киргизди. Минковскийдиң төрт өлшемли дүньясында үш өлшем кеңислик, ал төртинши өлшем ўақыт болып табылады. Бул жағдайда хәр бир заматлық ўақыя x, y, z, t төрт саны менен тәрийипленеди.

Интервал

$$s_{21}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - c^2(t_1 - t_2)^2$$

ды жазғанда толық симметриялықты сақлаў ушын Минковский төмендегидей белгилеўлерди усынды:

$$x_1 = x,\ \ x_2 = y,\ \ x_3 = z,\ \ x_4 = ict.$$

Бул аңлатпада $i = \sqrt{-1}$. Соның менен бирге бир бирине жақын еки ўақыяны қарағанда координаталардың айырмасын дифференциалдың белгиси менен белгилеў усынылды. Мысалы x_2-x_1=dx, ic(t_2-t_1)= icdt. Ўақыялар арасындағы интервал ds пенен белгиленеди. Олай болса

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = \sum_{i=1}^{4} dx_i^2.$$

Солай етип ds шамасын (ямаса s_{21} ди) төрт өлшемли дүньядағы *қашықлық* сыпатында, ал бир координаталар системасынан екинши координаталар системасына өтиўди төрт өлшемли дүньядағы координаталар көшерлерин «бурыў» сыпатында қараўға болады.

Төрт координата x_1, x_2, x_3, x_4 лердиң жыйнағын Минковский **дүньялық ноқат** деп атады. Берилген есаплаў системасындағы белгили бир денениң турған орнын тәрийиплейтуғын усындай координаталардың үзликсиз катарын **дүньялық сызық** деп атаймыз (қандай да бир дене менен байланыскан ўақыялардың избе-излиги).

Мысал ретинде Жердиң дүньялық сызығын сызамыз. Жер орбитасы тегис болғанлықтан оның дүньялық сызығы винтлик сызық, ал усы винтлик сызықтың орбита тегислигине түсирилген проекциясы эллипс болады.

Егер

$$l^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

ҳәм

$$\tau^2 = (t_1 - t_2)^2$$

белгилеўлерин пайдалансақ мына жағдайлардың орын алатуғынлығын көремиз:

1) $l < c\tau$,

2) $l > c\tau$ ҳәм

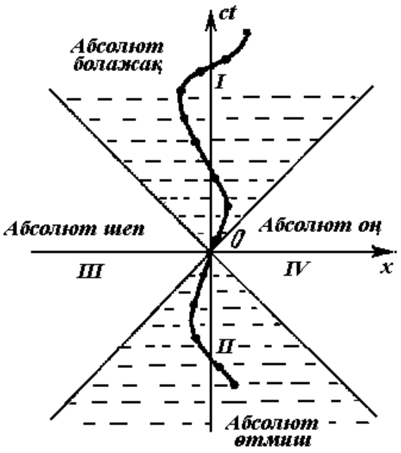
3) $l = c\tau$.

$l < c\tau$ жағдайындағы интервал ўақытқа мегзес интервалға сәйкес келеди: бул жағдайда t_1 ҳәм t_2 ўақыт моментлеринде x_1 ҳәм x_2 ноқатларында болған ўақыялар арасындағы кашықлық τ = t_2 - t_1 ўақыты аралығында жақтылық сигналы басып өтетуғын жолдан киши. Еки ўақыя арасындағы қашықлық нолге айланатуғын есаплаў системасы да болады. Бирақ координаталар системаларын сайлап алыў жолы менен бул ўақыяларды бир ўақытта жүз беретуғын ўакыяларға айландырыў мүмкин емес. 1-ўақыя 2-ўақыяның себеби болыўы мүмкин. Соның менен бирге ўакыялардың бундай избе-излиги барлық инерциаллық системаларда бирдей болады.

Егер $l > c\tau$ болса еки ўакыя арасындағы қашықлық жақтылық нуры τ ўақыты ишинде өтетуғын жолдан үлкен. Сонлықтан 1-ўақыя 2-ўақыяның себеби бола алмайды. Бундай интервалды *кеңисликке мегзес интервал* деп атаў кабыл етилген. Бундай жағдайда еки ўакыя да бир ўақытта жүзеге келетуғын есаплаў систмасын сайлап алыўға болады. Бирақ еки ўақыя бир ноқатта жүзеге келетуғын есаплаў системаларын сайлап алыў мүмкин емес. Бул жерде ўақыяның орнын да өзгертиў мүмкин емес: бир системдағы «***шеп тәреп***» басқа системаларда да «***шеп тәрепте***» жайласады. Солай етип «***абсолют шеп***» пенен «***абсолют оң***» ды бир биринен ажыратыў мүмкин.

Егер $l = c\tau$ болса еки ўақыя арасындағы қашықлық τ ўакыты ишинде жақлылық жүрип өтетуғын жолға тең. Бул *жақтылыққа мегзес интервал* болып табылады.

Сүўретте *x* көшери бағытында шамасы бойынша да, бағыты бойынша да өзгермели тезлик пенен қозғалыўшы базы бир денениң дүньялық сызығы келтирилген. *x*=0 ҳәм t=0 ноқатында жүзеге келген O ўакыясына итибар беремиз. Усы ноқатқа салыстырғанда I участканы пайда етияши O ўакыясынан ўақытқа мегзес интерваллар менен кашықлаған ўақыялар болып табылады. Бул ўақыялар О ўақыясынан кейин жүзеге келеди (бул жуўмак координата системасын сайлап алыўдан ғәрезли емес). Ал II участкасында болса О ўақыясына салыстырғанда «***абсолют өткен***» ўақыялар жайласады.



Дενениң дүньялық сызығының Минковский тегислигиндеги сүўрети. Дене x көшери бағытында шамасы бойынша да, бағыты бойынша да өзгермели тезлик пенен қозғалады.

x көшериниң үстинде жайласқан $x = \pm ct$ туўрылары жақтылыққа мегзес интервалларға $-x$ көшери бағытындағы жақтылық сигналларының тарқалыўына сәйкес келеди. Бул сигналлар $t = 0$ ўақыт моментинде $x = 0$ ноқатынан мүмкин болған еки бағытта жиберилген.

III ҳәм IV участкалардағы қәлеген ноқат О ўақыясынан кеңисликке мегзес интервал менен қашықласқан (яғный бул ноқат О ўақыясынан абсолют қашықласқан).

Пайдаланылған әдебиятлар дизими

1. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теоретическая физика. Учебное пособие для вузов. В. 10 т. Том II. Теория поля. 8-е издание. Издательство "ФИЗМАТЛИТ". Москва. 2003. 536 с.

Глава 1. §§ 1-3.

2. А.Н.Матвеев. Механика и теория относительности. Учебник для студентов высших учебных заведений. 3-е издание. Издательства "ОНИКС 21 век", "Мир и образование". Москва. 2003. 432 с.

Глава 3.

3. Benjamin Crowell. Spesial Relativity. www.lightandmatter.com, rev. February 11, 2016.

4-лекция. Төрт өлшемли векторлар, тезлик ҳәм тезлениў. Еркин бөлекшениң энергиясы. Кинетикалық энергия. Дενениң тынышлықтағы энергиясы. Дενениң импульси ҳәм энергиясы

Төрт өлшемли векторлар. Төрт өлшемли кеңисликтеги ўақыяның координаталарының (ct, x, y, z) жыйнағын төрт өлшемли радиус-вектордың (буннан былай қысқалық ушын 4 радиус-вектор деп айтамыз) қураўшылары сыпатында қараўға болады. Оның қураўшыларын x^i арқалы аңлатамыз. Бул жерде I индекси 0, 1, 2, 3 мәнислерине ийе болады, қала берсе

$$x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z.$$

4 радиус вектордың «узынлығы» ның квадраты

$$(x^0)^2 – (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

аңлатпасы жәрдеминде бериледи. Оның мәниси төрт өлшемли координаталар системасын қаншама бурғанда да өзгермейди. Дара жағдайда Лоренц түрлендириўлери де усындай бурыўлардың бири болып табылады.

Улыма алғанда A^i **төрт өлшемли вектор** деп (**4 вектор деп**) A^0, A^1, A^2, A^3 төрт шамасының жыйнағына айтылып, олар төрт өлшемли координаталар системасын түрлендиргенде 4 радиус-вектордың қураўшылары x^i дай болып түрленеди. Лоренц түрлендириўлеринде

$$A^0 = \frac{A'^0+(V/c)A'^1}{\sqrt{1-V^2/c^2}},\ A^1 = \frac{A'^1+(V/c)A'^0}{\sqrt{1-V^2/c^2}},\ A^2 = A'^2, A^3 = A'^3. \qquad (1)$$

Қәлеген 4 вектордың квадратының шамасы 4 радиус-вектордың квадраты сыяқлы анықланады:

$$(A^0)^2 – (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2.$$

Усындай аңлатпаларды жазыўды қолайлы етиў ушын 4 векторлардың қураўшыларының еки «сорт» ын киргизеди ҳәм оларға жоқарыдағы ҳәм төменги индекслер жазады. Усының менен бирге

$$A_0 = A^0, A_1 = A^1, A_2 = A^2, A_3 = A^3. \qquad (2)$$

A^i шамаларын 4 вектордың ***контравариант***, ал A_i шамаларын 4 вектордың ***ковариант*** қураўшылары деп аталады. Бундай жағдайда 4 вектордың квадраты мына түрде жазылады

$$\sum_{i=1}^{3} A^i A_i = A^0A_0 + A^1A_1 + A^2A_2 + A^3A_3.$$

Әдетте суммаларда ∑ суммалаў белгисин таслап кетип A^iA_i түринде жазыў қабыл етилген[1]. Бундай жағдайда аңлападағы еки рет қайталанатуғын индекс бойынша суммалаў нәзерде тутылып, сумма белгиси жазылмайды. Ал бирдей индекстеги ҳәр бир жуптың биреўи жоқарыда, ал екиншиси томенде турыўы керек. Усындай гүң деп аталыўшы индекслер бойынша суммалаў жүдә қолайлы ҳәм формулаларды жазыўды әдеўир әпиўайыластырады.

Бул жумыста биз 0, 1, 2, 3 мәнислерине ийе төрт өлшемли индекслерди i, k, l, ... латын ҳәриплери менен белгилеймиз.

4 вектордың квадраты саяқлы еки ҳәр түрли 4 векторлардың скаляр көбеймеси дүзиледи:

$$A^iB_i = A^0B_0 + A^1B_1 + A^2B_2 + A^3B_3.$$

---

[1] Суммалаў белгиси ∑ ни таслап кетип жазыў биринши рет А.Эйнштейн тәрепинен усынылған ҳәм 1916-жылы жарық көрген «Улыўмалық салыстырмалық теориясының тийкарлары» атлы мийнетте пайдаланылады.

Усының менен бирге бул аңлатпаны A^iB_i деп те, A_iB^i деп те жазыўға болады ҳәм бундай өзгерислерде нәтийже өзгермейди. Улыўма алғанда гүң индекслерде барлық ўақытта да жоқарғы индекс пенен төменги индекслердиң орынларын өзгертип қойыўға болады[2].

A^iB_i көбеймеси 4 скаляр болып табылады. Бул көбейме төрт өлшемли координаталар системаларын бурыўларға қарата инвариант. Бул жағдайды тиккелей тексерип көриў аңсат[3], бирақ оның орын алатуғынлығы барлық 4 векторлардың бирдей нызам бойынша түрлендирилетуғынлығына байланыслы анық түсиникли (A^iA_i квадраты сыяқлы).

4 вектордың A^0 қураўшысын ўақытлық, ал A^1, A^2, A^3 қураўшыларын кеңисликлик деп атайды (4 радиус-векторға сәйкес). 4 вектордың квадраты оң мәниске, терис мәниске, соның менен бирге нолге де тең болыўы мүмкин. Бундай жағдайларда оларды сәйкес ***ўақытқа мегзес, кеңисликке мегзес ҳәм ноллик*** 4 векторлар деп атайды (интерваллар ушын арналған терминологияға сәйкес)[4].

Кеңисликлик бурыўларға (яғный ўақыт көшерине тиймейтуғын) қатнасы бойынша 4 вектордың үш кеңисликлик координаталары үш өлшемли **A** векторын пайда етеди. Ал 4 вектордың ўақытлық қураўшысы (сол түрлендириўлерге қатнасы бойынша) үш өлшемли скаляр болып табылады. 4 вектордың қураўшыларын атап өтип биз оларды жийи былайынша жазамыз

$$A^i = (A^0, \mathbf{A}).$$

Усының менен бирге сол 4 вектордың ковариант қураўшылары $A_i = (A_0, -\mathbf{A})$, ал 4 вектордың квадраты: $A^iA_i = (A^0)^2 - \mathbf{A}^2$. Солай етип 4 радиус-вектор ушын:

$$r_i = (ct, r), x_i = (ct, r), x^ix_i = c^2t^2 - r^2.$$

Әлбетте, үш өлшемли векторларды (қураўшылары x, y, z болған) контра- ҳәм ковариант қураўшыларға ажыратып отырыўдың зәрүрлиги жоқ. Сонлықтан барлық жағдайларда (гүман пайда етпейтуғын орынларда) биз олардың кураўшыларын A_α (α = x, y, z) түринде индекслерин төменге ҳәм грек ҳәриплери менен жазамыз. Соның менен бирге еки рет қайталанатуғын грек индекслери бойынша x, y, z тиң үш мәниси бойынша суммалаў нәзерде тутылады (мысалы $\mathbf{AB} = A_\alpha B_\alpha$).

2-рангалы төрт өлшемли тензор (4 тензор) деп еки 4 вектордың қураўшыларының көбеймеси түринде түрленетуғын 16 дана A^{ik} шамаларының жыйнағына айтамыз. Тап усындай жоллар менен жоқары рангалы 4 тензорлар анықланады.

2-рангалы 4 тензордың қураўшылары үш түрде жазылыўы мүмкин: контрвариант A^{ik} түринде, ковариант A_{ik} түринде ҳәм аралас $A^i{}_k$ түринде (соңғы жағдайда $A^i{}_k$ менен $A_k{}^i$ ны ажыратыў керек, яғный жоқарыда ямаса төменде биринши

---

[2] Ҳәзирги ўақытлардағы әдебиятларды төрт өлшемли векторлардың индекслерин пүткиллей жазбайды, ал олардың квадратлары менен скаляр көбеймелери A^2, AB түринде жазады. Бул жумыста биз бундай белгилеўлерди пайдаланбаймыз.

[3] Усының менен бирге ковариант қураўшылар менен аңлатылған 4 вектордың түрлендирилиў нызамының контравариант қураўшыларда аңлатылған тап сол нызамның айрылатуғынлығын (белгилеринде) барлық ўақытта да есте сақлаў керек. Усыған байланыслы (1) диң орнына ийе боламыз:

$$A_0 = \frac{A_0' - (V/c)A_1'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},\ A_1 = \frac{A_1' - (V/c)A_1'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},\ A^2 = A'^2,\ A^3 = A'^3.$$

[4] Ноллик 4 векторларды *изотроп векторлар* деп те атайды.

индекс тур ма ямаса екиншиси ме). Қураўшылардың ҳәр кыйлы түрлери арасындағы байланыслар улыўмалық қағыйда бойынша анықланады: ўақытлық индексти (0) көтериў ямаса түсириў ҳеш нәрсени өзгертпейди, ал кеңисликлик индекслерди (x, y, z) көтериў ямаса төменге түсириў қураўшының белгисин өзгертеди. Солай етип:

$$A_{00} = A^{00}, A_{01} = -A^{01}, A_{11} = A^{11}, \ldots,$$

$$A^{0}{}_{0} = A^{00}, A_{0}{}^{1} = A^{01}, A^{0}{}_{1} = -A^{01}, A^{1}{}_{1} = -A^{11}, \ldots$$

Тек кеңисликлик түрлендириўлерге қатнасы бойынша A^{11}, A^{12}, ... тоғыз қураўшысы үш өлшемли тензорды қурайды. A^{01}, A^{02}, A^{03} үш қураўшысы ҳәм A^{10}, A^{20}, A^{30} үш қураўшысы үш өлшемли векторларды пайда етеди, ал A^{00} қураўшысы үш өлшемли скаляр болып табылады.

Егер $A^{ik} = A^{ki}$ болса тензор симметриялы ҳәм $A^{ik} = -A^{ki}$ болса тензор антисимметриялы деп аталады. Антисимметриялық тензорда барлық диагоналлық қураўшылар (яғный A^{00}, A^{11}, ... қураўшылары) нолге тең. Сонлықтан, мысалы $A^{00} = -A^{00}$. A^{ik} симметриялық тензорында аралас қураўшылар $A^{i}{}_{k}$ ҳәм $A_{k}{}^{i}$ лердың бир бирине сәйкес келетуғынлығы анық. Усығндай жағдайларда бизлер индекслерди бириниң үстине екиншисин жазамыз (яғный A^{i}_{k} түринде).

Барлық тензорлық теңликте аңлатпалар еки тәрептен де бирдей ҳәм бирдей болып жайласқан (жоқарыда ҳәм төменде) еркин, яғный гүң емес инлекслерге ийе болыўы керек. Тензорлық теңликлердеги еркин индекслердиң орынларын өзгертиў мүмкин (жоқарыға ямаса төменге), бирақ бундай өзгертиўлер теңлемениң барлық ағзалары ушын бир ўақытта жүргизиледи. Ҳәр қыйлы тензорлардың контра- ҳәм ковариант қураўшыларын теңлестириў «нызамлы емес», бундай теңлик қандай да бир есаплаў системасында орынланатуғын болса да, басқа есаплаў системаларында орынланбайды.

A^{ik} тензорының қураўшыларынан

$$A^{i}{}_{i} = A^{0}{}_{0} + A^{1}{}_{1} + A^{2}{}_{2} + A^{3}{}_{3}$$

Суммасын дүзиў арқалы скаляр пайда етиўге болады (бундай жағдайда, әлбетте $A^{i}{}_{i} = A_{i}{}^{i}$). Бундай қосындыны ***тензордың изи*** деп атайды. Ал оны пайда етиўши операция ҳаққында айтқанда тензорды *қысыў* (*свертывание*) ямаса *әпиўайыластырыў* ҳаққында айтылады.

Жоқарыда карап өтилген еки 4 вектордың скаляр көбеймесин дүзиў де қысыў операциясы болып табылады: бул $A^{i}B_{k}$ тензорынан $A^{i}B_{i}$ скалярының дөреўи болыўы болып табылады. Улыўма алғанда жуп индекс бойынша қәлеген қысыў тензордың рангасын 2 ге түсиреди. Мысалы $A^{i}{}_{kli}$ 2-рангалы тензор, $A^{i}B_{k}$ болса 4 вектор, $A^{ik}{}_{ik}$ скаляр болып табылады ҳ.т.б.

Бирлик 4 тензор деп δ^{i}_{k} тензоры айтылып, ол ушын қәлеген A^{i} 4 векторы ушын мына теңлик орынланады:

$$\delta^{i}_{k} A^{i} = A^{k}. \tag{3}$$

Бул тензордың қураўшыларының

$$\delta^{i}_{k} A^{i} = \begin{cases} 1, \text{егер i} = \text{k болса,} \\ 0, \text{егер i} \neq \text{k болса.} \end{cases} \tag{4}$$

шамаларына тең болатуғынлығы айқын. Оның изи $\delta_{i}^{i} = 4$.

δ_{i}^{i} тензорындағы бир индексти көтерсек, ямаса екиншисин төменге түсирсек, биз контра- ямаса ковариант тензор аламыз ҳәм бул тензорды g^{ik} ямаса g_{ik} деп белгилеймиз ҳәм оны ***метрлик тензор*** деп атаймыз. Бул g^{ik} ҳәм g_{ik} тензорлары бирдей қураўшыларға ийе болады, оларды мына кесте түринде көрсетиў мүмкин:

$$(g^{ik}) = (g_{ik}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

(0, 1, 2,3 мәнислериниң тәртибинде i индекси қатарды, ал k индекси бағананы номерлейди).

$$g_{ik}A^{k} = A_{i},\ g^{ik}A_{k} = A^{i} \qquad (6)$$

екенлиги айқын. Усыған байланыслы еки 4 вектордың скаляр көбеймесин

$$A^{i}A_{i} = g_{ik}A^{i}A^{k} = g^{ik}A_{i}A_{k} \qquad (7)$$

түринде жазыў мүмкин. δ_{i}^{i}, g_{ik}, g^{ik} тензорларының оғада әҳмийетли екенлиги соннан ибарат, олардың кураўшылары барлық координаталар системасында бирдей мәниске ийе. Тап усындай қәсийетлерге төртинши рангалы антисимметриялы бирлик 4 тензор e^{iklm} де ийе. Антисимметриялы бирлик 4 тензор деп қураўшылары қәлеген еки индексиниң орынларын алмастырып қойғанда белгисин өзгертетуғын, нолден өзгеше қураўшылары ±1 ге тең тензорға айтамыз. Антисимметриялықтан бул тензордың ең кеминде еки индекси бир бирине тең болса нолге тең болатуғынлығы келип шығады. Тек төрт индекси де бир бирине тең емес қураўшылары нолге тең емес. Айтайық

$$e^{0123} = +1 \qquad (8)$$

болсын (усының менен бирге $e_{0123} = -1$). Демек e^{iklm} ниң нолге тең емес кураўшыларының барлығы да +1 ге ямаса -1 ге тең. Тензордың +1 ямаса -1 ге тең болыўы i, k, l, m санларын 0, 1, 2, 3 избе-излигине келтириў мүмкин болған қайта қойыўлардың (перестановкалар ямаса транспозициялардың) жуп ямаса тақлығына байланыслы. Усындай қураўшылардың саны 4! = 24. Сонлықтан

$$e^{iklm}e_{iklm} = -24. \qquad (9)$$

Координата системасының бурылыўларына қатнасы бойынша e^{iklm} шамалары тензордың қураўшыларындай қәсийетлерге ийе болады. Бирақ бир ямаса үш координатаның белгилери өзгергенде барлық координаталар системасын ушын бирдей болып анықланған e^{iklm} қураўшылары өзгермейди, ал тензордың қураўшылары болса белгисин өзгерткен болар еди. Сонлықтан e^{iklm} ди ҳақыйқатында тензор емес, ал *псевдотензор* деп айтады. Қәлеген рангадағы *псевдотензорлар*, дара жағдайларда псевдоскалярлар бурыўларға алып келиниўи мүмкин емес болған координаталардың барлық түрлендириўлеринде тензорлардың қәсийетиндей қәсийет көрсетеди (яғный бурыўларға алып келмейтуғын координаталардың белгилериниң өзгериўи болған шашыраўлардан басқаларында).

$e^{iklm}e^{prst}$ көбеймелери 8-рангалы 4 тензорды пайда етеди. Қала берсе бул тензор ҳақыйкый тензор болып табылады. Бир ямаса бир неше индекслер жуплары бойынша әпиўайыластырыў арқалы 6-, 4- ҳәм 2-рангалы тензорларды алыў мүмкин. Бул тензорлардың барлығы да барлық координаталар системасында бирдей түрге ийе болады. Сонлықтан олардың қураўшылары бирлик тензор δ_i^i (қураўшылары барлық системаларда бирдей болған бирден бир ҳақыйқый тензор) дың қураўшыларының көбеймесиниң комбинациясы түринде аңлатылыўы керек. Бундай комбинацияларды дүзиў аңсат ҳәм олар индекслерди қайтадан қойып шығыўға байланыслы болған симметрия қәсийетинен келип шығады[5].

Егер A^{ik} антисимметриялы тензор болса, онда A^{ik} тензоры ҳәм псевдотензор $A^{*ik} = 1/2e^{iklm}$ бир бирине дуаллық тензорлар деп аталады. Тап усыған сәйкес $e^{iklm}A_m$ тензоры A^i тензорына дуаллық болған 3-рангалы антисимметриялық псевдотензор болып табылады. Әлбетте дуаллық тензорлардың $A^{ik}A^*_{ik}$ көбеймеси псевдоскаляр болып табылады.

Жоқарыда айтылғанларға байланыслы үш өлшемли векторлар менен тензорлардың сәйкес қәсийетлерин еске салып кетемиз. 3-рангалы антисимметриялы бирлик псевдотензор деп қәлеген еки индексиниң орынларын алмастырып қойғанда белгисин өзгертетуғын $e_{\alpha\beta\gamma}$ шамаларының жыйнағына айтамыз. Индексклериниң үшеўи үш түрли болғанда $e_{\alpha\beta\gamma}$ ның қураўшылары нолге тең болмайды. Усының менен бирге $e_{xyz} = 1$ деп қабыл етемиз, ал α, β, γ избе-излигин жуп ямаса тақ қайта қойып шығыўлардың нәтийжесинде x, y, z избе-излигине келиўдиң мүмкиншилигне байланыслы 1 ге ямаса -1 ге тең болады[6].

$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\mu\nu}$ көбеймелери 6-рангалы үш өлшемли тензорды береди ҳәм сонлықтан бирлик үш өлшемли $\delta_{\alpha\beta}$ тензорының қураўшыларының комбинациясы түринде аңлатылады[7].

Координата системасын шағылыстырғанда, яғный барлық координаталардың белгилерин өзгерткенде, әдеттеги үш өлшемли тензордың қураўшылары да

---

[5] Биз бул жерде мағлыўмат ушын сәйкес формулаларды келтиремиз:

$$e^{iklm}e_{prst} = -\begin{vmatrix} \delta_p^i & \delta_r^i & \delta_s^i & \delta_t^i \\ \delta_p^k & \delta_r^k & \delta_s^k & \delta_t^k \\ \delta_p^l & \delta_r^l & \delta_s^l & \delta_t^l \\ \delta_p^m & \delta_r^m & \delta_s^m & \delta_t^m \end{vmatrix}, \qquad e^{iklm}e_{prst} = -\begin{vmatrix} \delta_p^i & \delta_r^i & \delta_s^i \\ \delta_p^k & \delta_r^k & \delta_s^k \\ \delta_p^l & \delta_r^l & \delta_s^l \end{vmatrix},$$

$$e^{iklm}e_{prst} = -2(\delta_p^i\delta_r^k - \delta_r^i\delta_p^k), \qquad e^{iklm}e_{prst} = -6\delta_p^i.$$

Бул формулалардағы улыўмалық коэффициентлер поляр қысыўдың нәтийжеси бойынша тексериледи. Бундай кысыўды (9) бериўи керек.

[6] e^{iklm} 4 тензорының қураўшыларының 4 координаталар системасын айландырыўға, 3 тензор болған $e_{\alpha\beta\gamma}$ ның кеңисликлик координата көшерлерин айландырыўға қатнасы бойынша өзгермей қалыўы улыўмалық қағыйданың дара жағдайы болып табылады: Рангасы кеңисликтиң өлшемлери санына тең ҳәм усы кеңисликте анықланған қәлеген антисимметриялық тензор усы кеңисликтеги координаталар системасын айландырыўларға қарата инвариант.

[7] Мағлыўмат ушын сәйкес формулаларды келтиремиз:

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\mu\nu} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\lambda} & \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} \\ \delta_{\beta\lambda} & \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} \\ \delta_{\gamma\lambda} & \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} \end{vmatrix}.$$

Бул тензорды индекслерди бир, еки ҳәм үш жуп бойынша әпиўайыластырып, аламыз

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\mu\nu} = \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\lambda}, \; e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\beta\gamma} = 2\delta_{\alpha\lambda}, \; e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\beta\gamma} = 6.$$

белгисин өзгертеди. Еки поляр вектордың көбеймеси түринде бериле алатуғын вектордың қураўшылары шағылыстырыўда белгисин өзгертпейди. Бундай векторларды ***аксиаллық векторлар*** деп атаймыз. Поляр ҳәм аксиал векторлардың скаляр көбеймеси ҳақыйқый емес, ал псевдоскаляр болып табылады: координаталарды шағылыстырғанда ол белгисин өзгертеди. Аксиал вектор антисимметриялы тензорға дуал болған псевдовектор болып табылады. Мысалы, егер $\mathbf{C}=[\mathbf{AB}]$ болса, онда

$$C_\alpha = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} C_{\beta\gamma},$$

бул жерде $C_{\beta\gamma} = A_\beta B_\gamma - A_\gamma B_\beta$.

Енди 4 тензорларға қайтып келемиз. A^{ik} антисимметриялық 4 тензорының кеңисликлик қураўшылары (i, k = 1, 2, 3) тек кеңисликлик түрлендириўлерге қатнасы бойынша үш өлшемли антисимметриялық тензор болып табылады, ал жоқарыда айтылғанларға байланыслы оның қураўшылары үш өлшемли аксиал вектордың қураўшылары арқалы аңлатылады. A^{01}, A^{02}, A^{03} қураўшылары болса сол түрлендириўлерге қатнасы бойынша үш өлшемли поляр векторды қурайды. Солай етип антисимметриялы 4 тензордың қураўшыларын мына кесте түринде көрсетиўге болады:

$$\left(A^{ik}\right)=\begin{bmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -a_z & a_y \\ -p_y & a_z & 0 & -a_x \\ -p_z & -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

Қала берсе, кеңисликлик түрлендириўлерге қатнасы бойынша **p** менен **a** поляр ҳәм аксиал векторлар болып табылады. Антисимметриялық 4 тензордың қураўшыларын бирим-бирим айтып шығыў арқалы оларды мына түрде жазамыз:

$$A^{ik} = (\mathbf{p}, \mathbf{a}).$$

Бундай жағдайда сол тензордың ковариант кураўшылары мына түрге ийе:

$$A_{ik} = (-\mathbf{p}, \mathbf{a}).$$

Енди, ақырында төрт өлшемли тензорлық анализдиң базы бир дифференциаллық ҳәм интеграллық операцияларын қараў ушын тоқтап өтемиз.

φ скалоярының 4 градиенти мына 4 вектор болып табылады:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \nabla\varphi\right).$$

Усы жазылған туўындылардың 4 вектордың ковариант қураўшылары екенлигин нәзерде тутыў зәрүрли. Ҳақыйқатында да скалярдың дифференциалы

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} dx^i$$

шамасы да скаляр болып табылады; оның түринен (еки 4 вектордың скаляр көбеймеси) жоқарыдағы тастыйықлаўдың дурыслығы айқын көринеди.

Улыўма x^i, $\partial/\partial x^i$ координатасы бойынша дифференциаллаў операторлары операторлық 4 вектордың ковариант қураўшылары сыпатында қаралыўы керек. Сонлықтан, мысалы, контравариант қураўшылары A^i дифференциалланатуғын 4 вектордың дивергенциясы - $\partial A^i/\partial x^i$ аңлатпасы скаляр болып табылады[8].

Үш өлшемли кеңисликте интеграллаўды көлем, бет ҳәм иймеклик бойынша жүргизиў мүмкин. Төрт өлшемли кеңисликте болса сәйкес төрт түрли интеграллаўды әмелге асырыў мүмкин.

1) 4 кеңисликтеги иймектик бойынша интеграл. Интеграллаў элементи узынлық элементи, яғный dx^i 4 векторы болып табылады.

2) 4 кеңисликтеги бет бойынша (еки өлшемли) интеграл. Үш өлшемли кеңисликте паралелограмның dr ҳәм dr' векторларында қурылған майданының $x_\alpha x_\beta$ координаталық тегислигине түсирилген проекциясы $dx_\alpha dx'_\beta - dx_\beta dx'_\alpha$ ға тең екенлиги белгили. Тап сол сыяқлы 4 кеңисликте беттин шексиз киши фрагменти екинши рангалы $df^{ik} = dx^i dx'^k - dx^k dx'^i$ антисимметриялы тензоры менен анықланады, оның қураўшылары элементтиң майданының координаталық тегисликке проекцияларына тең. Үш өлшемли кеңисликте $df_{\alpha\beta}$ тензорының орнына беттиң элементи сыпатында $df_{\alpha\beta}$ тензорына дуаллық болған df_α тензоры қолланылады: $df_\alpha = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} df_{\beta\gamma}$. Геометриялық жақтан беттиң элементине нормал болған вектор, ал бул вектордың абсолют шамасы усы элементтиң майданына тең. Төрт өлшемли кеңисликте бундай вектордың сүўретин салыўға болмайды, бирақ df^{ik} тензорына дуаллық болған df^{*ik} тензорының сүўретин салыўға болады, яғный

$$df^{*ik} = \frac{1}{2} e^{iklm} df_{lm}. \qquad (11)$$

Геометриялық жақтан ол df^{ik} элементине тең ҳәм «нормаль» бет элементин сүўретлейди, оның үстинде жатқан барлық кесиндилер df^{ik} элементи үстиндеги барлық кесиндилерге ортогонал. $df^{ik} df^*_{ik} = 0$ екенлиги айқын.

3) Гипербет бойынша интеграл, яғный үш өлшемли көп түрлилик (многообразие) бойынша. Үш өлшемли кеңисликте үш вектордан дүзилген параллелопипедтиң көлеми усы векторлардың қураўшыларынан дүзилген үшинши тәртипли анықлаўшыға тең екенлиги мәлим. 4 кеңисликте тап усындай жоллар менен dx^i, dx'^i,

---

[8] Егер «ковариант координата» x_i бойынша дифференциаллаў жүргизилсе, онда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, -\nabla\varphi\right)$$

4 вектордың контравариант кураўшыларын дүзеди. Бундай жазыўларды биз тек айрықша жағдайларда ғана пайдаланамыз (мысалы 4 градиенттиң квадраты болған $\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ ди жазыў ушын). Әдебиятта туўындылардың координаталары бойынша дара туўындылардың

$$\partial^i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

символлары жәрдеминдеги қысқаша жазылыўы жийи қолланылады. Дифференциаллаў операторларының жазылыўының усындай формасында олар тәрепинен пайда етилетуғын шамалардың контра- ҳәм ковариантлық характери анық көринеди. Тап усындай артықмашлыққа төменде келтирилген туўындылардың басқа түрдеги қысқаша жазылыўы (үтир белгисинен кейин индекс жазыў) ийе:

$$\varphi_{,i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}, \quad \varphi^{,i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}.$$

dx''^i деп белгиленген 4 векторларда дүзилген «параллелопипедтиң» көлеминиң проекциялары аңлатылады. Олар мына анықлаўшы жәрдеминде көрсетиледи:

$$dS^{ikl} = \begin{vmatrix} dx^i & dx'^i & dx''^i \\ dx^k & dx'^k & dx''^k \\ dx^k & dx'^k & dx''^l \end{vmatrix}$$

Бул анықлаўшы үш индекси бойынша антисимметриялы болған 3-рангалы тензорды дүзеди. Гипербет бойынша интеграллаў элементи сыпатында dS^{ikl} тензорына дуаллық болған dS^i арқалы белгиленген 4 векторын пайдаланған қолайлы:

$$dS^i = -\frac{1}{6} e^{iklm} dS_{klm},\ dS_{klm} = e_{nklm} dS^n. \tag{12}$$

Усының менен бирге

$$dS^0 = dS^{123},\ dS^1 = dS^{023},\ \ldots$$

Геометриялық жақтан dS^i шамасы жағынан гипербет элементиниң «майданы» на тең, ал бағыты бойынша усы элементке нормал 4 вектор болып табылады (яғный гипербет элементинде өткерилген барлық туўрыларға перпендикуляр). Дара жағдайда $dS^0 = dxdydz$, яғный үш өлшемли dV көлемниң элементи болып табылады (гипербет элементиниң $x^0 = const$ гипертегислигиндеги проекциясы).

4) Төрт өлшемли көлем бойынша интеграл; интеграллаў элементи мына дифференциаллардың көбеймеси болып табылады:

$$d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = cdtdV. \tag{13}$$

Бул элемент скаляр болып табылады. 4 кеңисликтиң участкасының көлеминиң координаталар системасын бурганда өзгермейтуғынлығы түсиникли[9].

Үш өлшемли векторлық анализдиң Гаусс пенен Стокс теоремаларына сәйкес төрт өлшемли интегралларды бир бирине түрлендириўлерге мүмкиншилик беретуғын теоремалар бар.

Туйық гипербет бойынша интегралды усы бет ишинде жайласқан 4 көлем бойынша dS_i интеграллаў элементин

$$dS_i \rightarrow d\Omega \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{14}$$

---

[9] Интеграллаў өзгериўшилери болған x^0, x^1, x^2, x^3 лерди жаңа x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 өзгеришилерине түрлендиргенде $d\Omega$ интеграллаў элементи $Jd\Omega'$ ке алмастырылады. Бул жерде $d\Omega' = dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3$, ал

$$J = \frac{\partial(x'^0\, x'^1\, x'^2\, x'^3)}{\partial(x^0 x^1 x^2 x^3)}$$

шамасы түрлендириў якобианы болып табылады. $x'^i = \alpha^i_k x^k$ түриндеги сызықлы түрлендириў ушын J якобианы $\left|a^i_k\right|$ анықлаўшысы менен сәйкес келеди ҳәм бирге тең (координаталар системасының бурылыўлары ушын), усының менен $d\Omega$ ның инвариантлылығы келип шығады.

операторына алмастырыў арқалы түрлендириўге болады. Мысалы A^i векторының интегралы ушын ийе боламыз:

$$\oint A^i dS_i = \int \frac{\partial A^i}{\partial x^i} d\Omega. \qquad (15)$$

Бул формула Гаусс теоремасының улыўмалыстырылыўы болады.

Еки өлшемли бет бойынша интеграл усы бет тәрепинен қамтып алынатуғын гипербет бойынша интегралға df^*_{ik} интеграллаў элементин

$$df^*_{ik} \to dS_i \frac{\partial}{\partial x^k} - dS_k \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad (16)$$

операторына алмастырыў арқалы түрленеди. Мысалы A^{ik} антисимметриялы тензорынан алынған интеграл ушын ийе боламыз:

$$\frac{1}{2}\oint A^{ik} df^*_{ik} = \frac{1}{2}\int\left(dS_i \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - dS_k \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^i}\right) = \int dS_i \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k}. \qquad (17)$$

Төрт өлшемли туйық сызық бойынша алынған интеграл усы сызық тәрепинен қамтып алынған бет бойынша интегралға

$$dx^i \to df^{ki} \frac{\partial}{\partial x^k} \qquad (18)$$

алмастырыўы арқалы түрлендириледи. Мысалы вектордан алынған интеграл ушын

$$\oint A_i dx^i = \int df^{ki} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \frac{1}{2}\int df^{ki}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right). \qquad (19)$$

аңлатпасына ийе боламыз. Бул аңлатпа Стокс теоремасының улыўмаластырылыўы болып табылады.

Төрт өлшемли тезлик. Әдеттеги үш өлшемли тезлик векторынан төрт өлшемли тензорды да түрлендириў мүмкин.

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} \qquad (20)$$

векторы бөлекшениң усындай 4 өлшемли тезлиги (4 тезлиги) болып табылады.

Оның қураўшыларын табыў ушын

$$ds = cdt\sqrt{1 - v^2 / c^2}$$

екенлигин еске түсиремиз. Бул аңлатпада v арқалы бөлекшениң үш өлшемли тезлиги белгиленген. Сонлықтан

$$u^1 = \frac{dx^1}{ds} = \frac{dx}{cdt\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{u_x}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

ҳ.т.б. Солай етип

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{v}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} \right). \qquad (21)$$

4 тезликтиң өлшем бирлиги жоқ шама екенлигин атап өтемиз.

4 тезликтиң қураўшылары бир биринен ғәрезсиз емес. $dx_i dx^i = ds^2$ екенлигин еске алып

$$u^i u_i = 1. \qquad (22)$$

аңлатпасына ийе боламыз. Геометриялық жақтан u^i бөлекшениң дүньялық сызығына урынба болған бирлик 4 вектор.

4 тезликтиң анықламасына сәйкес

$$w^i = \frac{d^2x^i}{ds^2} = \frac{du^i}{ds}$$

туўындысын 4 тезлениў деп атаў мүмкин. (3) ти дифференциаллап

$$u_i w^i = 0. \qquad (23)$$

екенлигин табамыз. *Демек тезлик пенен тезлениўдиң 4 векторлары өз-ара ортогонал екен*.

Ең киши тәсир принципи. Материаллық бөлекшелердиң қозғалысын изертлегенде биз ең киши тәсир принципинен келип шығамыз. Бул принциптиң мәниси мынадан ибарат: ҳәр бир механикалық система ушын тәсир деп аталатуғын S интегралы бар болып, бул интеграл ҳақыйқый қозғалысларда минимумга ийе болады, ал усыған байланыслы оның вариациясы δS нолге тең[10].

Еркин материаллық бөлекше ушын (бундай бөлекше қандай да бир сыртқы күшлердиң тәсиринде болмайды) тәсир интеггралын анықлаймыз.

Буның ушын биз дәслеп интегралдың аныў ямаса мынаў инерциал есаплаў системасынан ғәрезли емес екенлигин, яғный оның Лоренц түрлендириўлерине қарата инвариант екенлигин аңғарамыз. Демек буннан бул интегралдың скалярдан алыныўының керек екенлиги келип шығады. Сандай-ақ интеграл астында биринши дәрежели дифференциаллардың турыўы керек екенлиги түсиникли. Бирақ еркин материаллық бөлекше ушын дүзиў мүмкин болған усындай бирден бир скаляр интервал ds ямаса αds болыўы керек (α арқалы базы бир турақлы белгиленген).

Солай етип еркин бөлекше ушын тәсир мына түрге ийе болыўы керек:

$$S = -\alpha \int_a^b ds.$$

---

[10] Қатаң түрде айтқанда ең киши тәсир принципи S интегралының интеграллаў сызығының тек киши участкасы бойлап минимал мәниске ийе боады деп тастыйықлайды. Ықтыярлы узынлықтағы сызық ушын S интегралы минимум болып табылыўы шәрт емес экстремумға ийе болады деп тастыйықлаўға болады.

Интеграл берилген *a* ҳәм *b* ўақыялары арасындағы дүньялық сызық бойынша алынады (бөлекше *a* ҳәм *b* нокатларында белгили бир t_1 ҳәм t_2 ўақыт моментлеринде турады, яғный берилген дүньялық ноқатлар арасында деп есапланады); α болса берилген бөлекшени тәрийиплейтуғын базы бир турақлы. Барлық бөлекшелер ушын α ның оң шама болатуғынлығын аңсат көриўге болады. Ҳақыйқатында да $\int_a^b ds$ интегралы дүнялық сызық бойлап туўры бойында максималлық мәниске ийе болады, дүньялық сызықтың бойы бойлап оны қәлегенимизше киши етип алыўымызға болады.

Солай етип оң мәниси менен алынған интеграл минимумға ийе болмайды, ал кери белги менен алынған интеграл дүньялық сызық бойлып минимумға ийе болады.

Тәсирди ўақыт бойынша интеграл түринде бериўге болады:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt.$$

dt ның алдындағы коэффициент L берилген механикалық система ушын ***Лагранж функциясы*** деп аталады.

Бир қанша белгилеўлер қабыл етемиз. Мейли dt арқалы қозғалмайтуғын есаплаў системасындағы (яғный қозғалмай турған бизлер менен байланысқан системадағы) шексиз киши ўақыт аралығы, ал dt′ арқалы v тезлиги менен қозғалыўшы есаплаў системасындағы (қозғалыўшы сааттың жүриў тезлиги) dt ға сәйкес ўақыт аралығы белгиленген болсын. Ондай болса Лоренц түрлендириўлерине сәйкес

$$dt' = \frac{ds}{c} = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Демек $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ формуласының жәрдеминде аламыз:

$$S = -\int_{t_1}^{t_2} \alpha c\sqrt{1 - v^2/c^2}\, dt.$$

Бул аңлатпада v арқалы материаллық бөлекшениң тезлиги белгиленген. Демек бөлекшениң Лагранж функциясы мынаған тең болады екен:

$$L = -\alpha c\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Жоқарыда айтылғанындай α шамасы берилген бөлекшени тәрийиплейди. Классикалық механикада ҳәр бир бөлекше m массасы менен тәрийипленеди. Енди m ҳәм α шамалары арасындағы байланысты анықлаймыз. Бул байланыс $c \to \infty$ шегинде бизиң L ушын жазылған аңлатпамыз классикалық аңлатпаға өтиўи керек шәрти тийкарында табылады:

$$L = \frac{mv^2}{2}.$$

Бул отиўди әмелге асырыў ушын L ди v/c ның дәрежеси бойынша қатарға жаямыз. Бундай жағдайда жокары тәртипли ағзаларды таслап кетип, аламыз

$$L = -\alpha c\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c}.$$

Лагранж функциясындағы турақлы ағзалар қозғалыс теңлемелеринде сәўлеленбейди ҳәм соның ушын таслап кетиледи. L деги αc ны таслап кетип ҳәм классикалық аңлатпа $L = mv^2/2$ менен салыстырып α = mc екенлигине ийе боламыз.

Солай етип еркин бөлекше ушын тәсир мынаған тең:

$$S = -mc\int_a^b ds, \tag{24}$$

ал Лагранж функциясы болса

$$L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{25}$$

Энергия ҳәм импульс. Бөлекшениң импульсы деп **p** = ∂L/∂**v** векторына айтады (∂L/∂**v** жазыўы қураўшылары L ден **v** ның сәйкес қураўшысы бойынша алынған туўындығы тең вектордың символлық белгилениўи болып табылады). (25)-аңлатпаның жәрдеминде табамыз:

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{26}$$

Киши тезликлерде (v<<c) ямаса $c \to \infty$ шегинде бул аңлатпа классикалық **p** = m**v** аңлатпасына өтеди. Егер v = c болсы импульс шексизликке айланады.

Импульстен ўақыт бойынша алынған туўынды бөлекшеге тасир етиўши күшке тең. Мейли бөлекшениң тезлиги тек бағыты бойынша өзгеретуғын болсын (яғный күш тезликке перпендикуляр бағытланған). Онда

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{27}$$

Егер тезлик шамасы бойынша өзгеретуғын болса (яғный күш тезлик бағытында түсирилген)

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{28}$$

Еки жағдайда күштиң тезликке қатнасының бирдей емес екенлигин көремиз.

Бөлекшениң энергиясы E деп

$$E = \mathbf{pv} - L$$

шамасына айтамыз. L ҳәм **p** ушын (25)- ҳәм (26)-аңлатпаларын қойып, аламыз

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \quad (28)$$

Бул оғада әҳмийетли формула релятивистлик механикада еркин бөлекшениң энергиясының тезлик нолге тең (яғный v = 0) болғанда да нолге тең болмай, ал

$$E = mc^2 \quad (29)$$

шамасына тең болатуғынлығын көрсетеди. Оны бөлекшениң ***тынышлықтағы энергиясы (тынышлық энергиясы)*** деп атайды.

Киши тезликлер ушын (v<<c) (28)-аңлатпаны v/c ның дәрежелери бойынша қатарға жайсақ, онда

$$E \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2}$$

аңлатпасын аламыз. Демек бул жағдайда алынған формуладан mc^2 тынышлық энергиясын алып тасласақ, онда бөлекше ушын кинетикалық энергияның классикалық аңлатпасын аламыз.

Биз жоқарыда «бөлекше» ҳаққында сөз жүртип атырмыз, бирақ оның «элементарлылығы» ҳеш бир жерде пайдаланылмады. Сонлықтан алынған формулаларды көп бөлекшелерден туратуғын қәлеген курамалы дене ушын қолланыў мүмкин ҳәм бул жағдайда m арқалы денениң толық массасы, ал v арқалы оның тутасы менен қозғалыў тезлиги белгиленген. Мысалы (29)-формула қәлеген тынышлықта турған тутас дене ушын дурыс. Биз еркин денениң энергиясының (яғный қәлеген туйық системаның энергиясының) релятивистлик механикада белгили бир анық мәнимске ийе болатуғынлығын, барлық ўақытта да оң мәниске ийе болатуғынлығын ҳәм денениң массасы менен тиккелей байланысы бар шама екенлигине итибар бериўимиз керек. Усыған байланыслы биз классикалық механикада денениң энергиясы тек ықтыярлы аддитив шама дәллигинде анықланатуғынлығын, оның оң мәниске де, терис мәниске де ийе болатуғынлығын еске түсирип өтемиз.

Тынышлықта турған денениң энергиясы оның қурамына киретуғын бөлекшелердиң тынышлық энергиясынан басқа сол бөлекшелердиң кинетикалық энергияларын ҳәм олардың бир бири менен тәсирлесиў энергияларын да өз ишине алады. Басқа сөз бенен айтқанда mc^2 шамасы $\sum m_a c^2$ қа тең емес (m_a бөлекшелердиң массасы) ҳәм сонлықтан m ниң мәниси $\sum m_a$ ға тең емес. Солай етип релятивистлик механикада массаның сақланыў нызамы орын алмайды екен: қурамалы денениң массасы оның бөлеклериниң массасының қосындысына тең емес. Буның орнына тек энергияның сақланыў нызамы орын алып, буған бөлекшелердиң тынышлық энергиялары да киреди.

(26)- ҳәм (28)-аңлатпаларды квадратқа көтерип ҳәм оларды салыстырыў арқалы из бөлекшениң энергиясы менен импульсы арасындағы мына қатнасты аламыз:

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2c^2. \qquad (30)$$

Импульс арқалы аңлатылған энергияның Гамильтон функциясы Н деп аталатуғынлығы белгили:

$$H = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}. \qquad (31)$$

Киши тезликлерде $p << mc$ ҳәм жуўық түрде:

$$H \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m},$$

яғный егер тынышлық энергиясын алып тасласақ Гамильтон функциясының белгили классикалық аңлатпасын алады екенбиз.

(26)- ҳәм (28)-аңлатпалардан еркин бөлекшениң энергиясы, импульсы ҳәм энергиясы арасындағы төмендегидей қатнас келип шығады:

$$\mathbf{p} = \frac{E\mathbf{v}}{c^2}. \qquad (32)$$

$v = c$ болған бөлекшениң импульсы менен энергиясы шексизликке айланады. Бул массасы нолге тең болмаған бөлекшелердиң жақтылықтың тезлигиндей тезлик пенен қозғала алмайтуғынлығын билдиреди. Бирақ релятивистлик механикада массасы нолге тең ҳәм жақтылықтың тезлигиндей тезлик пенен қозғалатуғын бөлекшелердиң болыўы мүмкин. Бундай бөлекшелер ушын (32)-аңлатпадан ийе боламыз[11]:

$$p = \frac{E}{c}. \qquad (33)$$

Жуўық түрде тап усы формула массасы нолге тең емес бөлекшелер ушын бөлекшениң энергиясы E оның тынышлықтағы энергиясы mc^2 тан жүдә үлкен болған ***ультрарелятивистлик жағдайларда*** дурыс болады.

Енди барлық алынған қатнасларды төрт өлшемли түрде келтирип шығарамыз. Ең киши тәсир принципине сәйкес

$$\delta S = -mc\delta\int_a^b ds = 0.$$

δS ушын аңлатпаны ашамыз. Буның ушын $ds = \sqrt{dx_i dx^i}$ екенлигин аңғарамыз ҳәм сонлықтан

$$\delta S = -mc\int_a^b \frac{dx_i \delta dx^i}{ds} = -mc\int_a^b u_i d\delta x^i.$$

---

[11] Жақтылық квантлары – фотонлар сондай бөлекшелер болып табылады.

Бөлимлер бойынша интеграллап, табамыз:

$$\delta S = -mcu_i\delta x^i \Big|_a^b + mc\int_a^b \delta x^i \frac{du_i}{ds} ds. \qquad (34)$$

Мәлим, қозғалыс теңлемелерин табыў ушын берилген еки аўҳалдан өтетуғын ҳәр қыйлы траекториялар салыстырылады [яғный $(\delta x^i)_a$ = $(\delta x^i)_b$ = 0 шеклериндеги]. Ҳакыйқый траектория δS = 0 шәртинен анықланады. Бундай жағдайда (34)-формуладан $du^i/ds = 0$ теңлемесин алған болар едик, яғный төрт өлшемли түрде еркин бөлекшениң тезлигиниң турақлылығы.

Координаталардың функциясы сыпатында тәсирдиң вариациясын табыў ушын тек бир *a* ноқатын берилген деп есаплаў керек, соның ушын $(\delta x^i)_a$ = 0. Екинши ноқатты өзгермели деп есаплаў керек, бирақ сының менен бирге тек ҳақыйқый нокатларды, яғный траекторияның қозғалыс теңлемелерин қанаатландыратуғын ноқатларды қараў керек. Соның ушын (34)-аңлатпадағы интеграл δS ушын нолге тең. $(\delta x^i)_b$ ның орнына тек δx^i деп жазамыз ҳәм солай етип табамыз:

$$\delta S = -mcu_i\delta x^i. \qquad (35)$$

4 вектор

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i} \qquad (36)$$

4 импульс деп аталады. Механикадан мәлим болғанындай, ∂S/∂x, ∂S/∂y, ∂S/∂z бөлекшениң **p** импульсының үш кураўшысы болып табылады, ал ∂S/∂t туўындысы болса бөлекшениң энергиясы E болып табылады. Сонлықтан 4 импульстың ковариант қураўшылары p_i = (E/c,-p), ал контравариант қураўшылары болса[12]

$$p^i = \left(\frac{E}{c}, \quad p\right). \qquad (37)$$

(35)-аңлатпадан көринип турғанындай, еркин бөлекшениң 4 импульсының қураўшылары мынаған тең:

$$p^i = mcu^i. \qquad (38)$$

Бул аңлатпаға

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{v}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)$$

формуласынан u^i диң мәнисин қойсақ, онда **p** ҳәм E ушын (26)- ҳәм (28)-аңлатпалардың алынатуғынлығына исенемиз.

Солай етип релятивистлик механикада импульс пенен энергия бир 4 вектордың қураўшылары болып табылады екен. Буннан импульс пенен энергияның бир есаплаў

---

[12] Физикалық 4 векторларды есте сақлаў ушын миемоникалық қағыйдаға дыққат аўдарамыз: контравариант қураўшылар сәйкес үш өлшемли векторлар менен (x^i ушын r, p^i ушын p ҳ.т.б.) «дурыс», оң белги арқалы байланысқан.

системасынан екиншисине өткендеги түрлениў формулалары тиккелей шығады. 4 вектордың түрлениўиниң улыўмалық формулалары болған [(1)-формула]

$$A^0 = \frac{A'^0 + (V/c)A'^1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \; A^1 = \frac{A'^1 + (V/c)A'^0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \; A^2 = A'^2, A^3 = A'^3.$$

формулаларына (37)-аңлатпаны қойып мына формулаларды аламыз:

$$p_x = \frac{p_x{}' + (V/c)E'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \; p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z, \; E = \frac{E' + (V/c)p'_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \tag{39}$$

Бул аңлатпада p_x, p_y, p_z арқалы үш өлшемли **p** векторының қураўшылары белгиленген.

4 импульстың анықламасы болган (38) ден ҳәм $u^i u_i = 1$ теңлигинен еркин бөлекшениң 4 импульсының квадраты ушын ийе боламыз:

$$p^i p_i = m^2 c^2. \tag{40}$$

Бул аңлатпаға (37) ни қойып биз (30)-аңлатпаға қайтып келемиз.

Күш ушын әдеттеги анықламаға сәйкес күш 4 векторын мына туўынды түринде анықлаў мүмкин:

$$g^i = \frac{dp^i}{ds} = mc\frac{du^i}{ds}. \tag{41}$$

Оның қураўшылары $g_i u^i = 0$ теңлигин қанаатландырады. Бул 4 вектордың қураўшылары күштиң әдеттеги үш өлшемли $\mathbf{f} = d\mathbf{p}/dt$ векторы арқалы былайынша аңлатылады:

$$g^i = \left(\frac{\mathbf{fv}}{c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \frac{\mathbf{f}}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \tag{42}$$

Ўақытлық қураўшы күштиң жумысы менен байланысқан болып шығады.

Пайдаланылған әдебиятлар дизими

1. Hugh D. Young, Roger A. Freedman,cjntributing autor A.Lewis Ford. University Physics with modern Physics. 13th Edition. Addison-Wesley. 1598 p.

(p. 1223-1260).

2. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теоретическая физика. Учебное пособие для вузов. В. 10 т. Том II. Теория поля. 8-е издание. Издательство "ФИЗМАТЛИТ". Москва. 2003. 536 с.

Глава 1. §§ 5-7. Глава 2. §§ 8-9.

3. А.Н.Матвеев. Механика и теория относительности. Учебник для студентов высших учебных заведений. 3-е издание. Издательства "ОНИКС 21 век", "Мир и образование". Москва. 2003. 432 с.

Глава 3. §§ 13-14.

4. Benjamin Crowell. Spesial Relativity. www.lightandmatter.com, rev. February 11, 2016.

5. Lewis Ryder. Introduction to General Relativity. Cambridge University Press. 2009. 441 p.

5-лекция. Гравитациялық тәсирлесиўди геометрияластырыў. Улыўмалық салыстырмалық теориясы тийкарында жататуғын гипотезалар

Инерциал емес есаплаў системасына Евклид геометриясын қолланыўға болмайтуғынлығын көргеннен кейин геометрия деген не ҳәм оның неге кереги бар? Деген сораў үстинде ойлайық. Бул сораўға берилетуғын ең қысқа ҳәм дурыс жуўап мынадан ибарат:

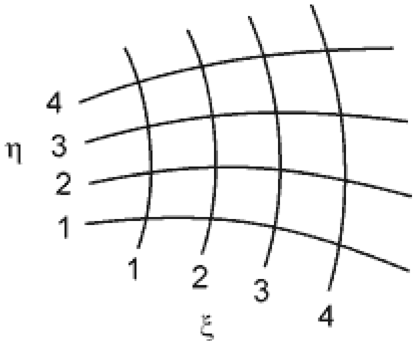
геометрия биринши гезекте кеңисликтеги ноқатлардың өз-ара жайласыўын анықлаў ушын керек. Ҳәр бир айқын жағдай ушын ноқатлардың өз-ара жайласыўды анықлаўшы қағыйдаларды ислеп шығыў геометрия илиминиң өзин қурайды.

Биз бул жерде кеңислик дегенде бизиң үш өлшеўли кеңислигимизди нәзерде тутыў шәрт емес. Кеңислик еки өлшемли ямаса төрт өлшемли (мысалы Минковский кеңислиги) болыўы мүмкин. Өлшемлери саны $n \geq 2$ болған қәлеген кеңислик ушын геометрияны дүзиў мәселеси туўры сызықлардың аппаратын ҳәм оған сәйкес келиўши аксеомалар менен теоремалардың Евклидлик системасын алдын-ала бериўсиз әмелге асырылады.

Биз жер өлшеўши адамды көз алдымызға келтирейик. Ол ойлы-бәлентли ҳәм қалың тоғай өскен жерди өлшеп усы участканың картасын дүзетуғын болсын. Ҳәр бир ноқатта турғанда ол әтирапындағы участканың киши бөлимин ғана көреди. Бизиң жер өлшегишимиздиң қолында тек өлшеў рулеткасы ғана бар. Бул рулетка үлкен емес үш мүйешликлер ямаса төрт мүйешликлерди өлшейди. Олардың төбелерин жерге қағылған қазықлар менен белгилеў мүмкин. Усындай жоллар менен өлшенген фигураларды бир бирине байланыстырып жер өлшеўши тоғайдың қашықлаў учаткаларына карай белгили бир избе-изликте жүриўге мәжбүр болады. Абстракт түрде айтатуғын болсақ жер өлшеўши үлкен емес областларда әдеттеги Евклид геометриясының усылларын қолланады. Бирақ бул усылларды пүтини менен алғандағы барлық жер участкасына қолланыў мүмкин емес. Бундай участканы тек бир учаскадан екинши учаскаға өтиў жолы менен геометриялық жақтан изертлеў мүмкин. Қала берсе Евклид геометриясын глобаллық мәнисте ойлы-бәлентли участкада қолланыўға болмайды: бундай участкада туўры сызық пүткиллей болмайды. Сызғыштың кысқа лентасын туўры деп есаплаўға болады, бирақ бийикликти бийиклик пенен, ойпатты ойпат пенен тутастыратуғын беттиң барлық ноқатларын тутастуратуғын (беттиң үстинде жататуғын) туўры сызық болмайды Солай етип Евклид геометриясы белгили бир мәнисте тек киши (ямаса инфинитезимал) областлар ушын ғана дурыс болады. Ал үлкен областларда болса кеңислик ямаса бет ҳаққында улыўмалырақ көз-караслар орын алады.

Егер жер өлшеўши системалы түрде жумыс ислегиси келетуғын болса, онда ол тоғай өскен бетти сызықлар торы менен қаплайды. Оларды казықлар менен бекитеди ямаса белгили ағашларға байланыстырады. Оған сызықлардың кесилисетуғын еки семейcтвосы керек болады.

Координаталардың Гаусслық системасы.



Сызықлар мүмкин болғанынша тегис ҳәм үзликсиз майысқан, ал ҳәр бир семество рамкаларында избе-из номерленген болыўы керек. Бир семейственың қәлеген бир ағзасының символлық белгилениўи ретинде ξ ди, ал баска сесейственың қәлеген ағзасы ушын η ди аламыз. Бундай жағдайда ҳәр бир кесилисиў ноқатын еки ξ ҳәм η саны тәрийиплейди (мысалы ξ = 3 ҳәм η = 5). Барлық аралықлық ноқатларды ξ ҳәм η шамаларының бөлшек мәнислери менен тәрийиплеў мүмкин. Майысқан беттиң ноқатларын анықлаўдың усындай усылын биринши рет Гаусс пайдаланды ҳәм сонлықтан ξ ҳәм η шамаларын **Гаусс координаталары** деп атайды. Гаусс усылының өзине тән өзгешелиги: ξ ҳәм η шамалары узынлықты да, мүйешти де, басқа да өлшенетуғын геометриялық шаманы аңлатпайды, ал тек санлар болып табылады.

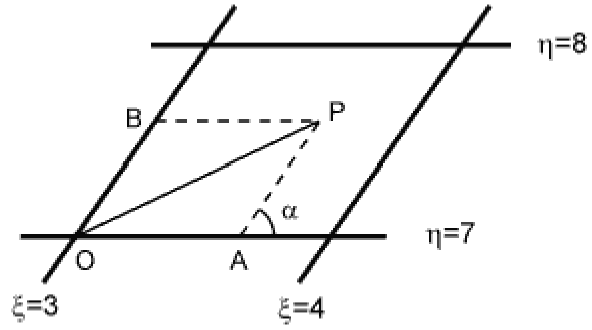
Участкадағы ноқатларды есаплаўдағы бирлик өлшемди анықлаў толығы менен жер өлшеўшиниң иси болып табылады. Оның рулеткасының узынлығы Гаусс координаталар системасындағы бир ячейкаға сәйкес областты анықлайды.

Жер өлшеўши енди бир ячейкадан кейин екинши ячейканы өлшеўи, усындай өлшеўлерди даўам етиўи мүмкин. Бул ячейкалардың ҳәр бирин киши параллелограмм деп караўға болады. Егер еки тәрепи менен оның арасындағы мүйеш анықланған болса бундай параллелограмды толық анықланған деп есаплаўға болады. Жер өлшеўши бул ячейкалардың ҳәр бирин өлшеўи керек ҳәм кейин оларды өзиниң картасына түсириўи керек. Бул процедураларды орынлағаннан кейин ол өзиниң картасында участканың геометриясы ҳаққында толық мағлыўматларды алады.

Ҳәр бир ячейка ушын үш санның (еки тәреп ҳәм мүйеш) орнына басқа усылды қолланыў көпшиликке мәлим. Оның артықмашлығы симметриясының жоқарылығында.

Ячейкалардың бирин қараймыз. Бул ячейка параллелограм болсын ҳәм оның тәреплери биринен соң бири келетуғын еки номерге сәйкес келсин ($\xi = 3$, $\xi = 4$ ҳәм $\eta = 7$, $\eta = 8$; см., сүўретте келтирилген).

Бир ячейка шеклериндеги қашықлықларды анықлаў.



Ячейка ишиндеги *P* базы бир ноқат, ал *S* арқалы мүйештиң төбесинде турған *O* ноқатынан қашықлығы белгиленген. Бул қашықлық өлшеў рулеткасының жәрдеминде анықланады. P ноқаты арқалы еки координата сызығына параллеллер өткеремиз: бул параллеллер координата сызықларын A ҳәм B ноқатларында кеседи.

Бундай жағдайда A ҳәм B ларға бизиң координата торымыз рамкаларында санлар ямаса Гаусс координаталары сәйкес келеди. A ноқаты $(\xi+\Delta\xi, \eta)$ координаталарына, ал B ноқаты $(\xi, \eta+\Delta\eta)$ координаталарына ийе, (ξ, η) болса O ноқатының координатасы болып табылады. Гаусс координаталарының өсимлери болған $\Delta\xi$ ҳәм $\Delta\eta$ шамаларын A ҳәм B ноқатлары ҳәм OA ҳәм OB қашықлықлары туратуғын параллелограмның тәреплери өлшеў ҳәм усы шамалардың параллелограмның тәреплерине қатнасын есаплаў жолы менен анықлаймыз. Бизиң параллелограмымыз өзиниң Гаусс координаталары менен бирге айрылатуғын сызықлар менен дүзилген болғанлықтан $\Delta\xi$ ҳәм $\Delta\eta$ өсимлери усы қатнасларға тең болады. Баска сөз бенен айтқанда олар A ҳәм B ноқатларының параллелограмның сәйкес тәреплерин қандай қатнаста бөлетуғынлығын көрсетеди.

OA қашықлығының ҳақыйқый мәниси $\Delta\xi$ емес, ал $a\Delta\xi$ шамасына тең. Бул жерде a арқалы өлшеў арқалы табылатуғын белгили бир шама. Тап сол сыяқлы OB узынлығының ҳақыйқый мәниси $\Delta\eta$ ге тең емес, ал базы бир $b\Delta\eta$ шамасына тең. Егер P ноқатын жылыстырсақ, онда оның Гаусс координаталары өзгереди; гаусс координаталарының ҳақыйқый узынлықларға қатнасы болған a ҳәм b шамалары болса бир ячейка шеклеринде өзгериссиз қалады.

Енди $OP = \Delta L$ қашықлығын табамыз. Косинуслар бойынша теоремадан

$$\Delta L^2 = OA^2+2\ OA\cdot OB\cos\alpha + OB^2. \qquad (1)$$

Бул аңлатпадағы α параллелограмның төбеси O ноқатындағы мүйеш болып табылады. Бул аңлатпаны $\Delta\xi$ ҳәм $\Delta\eta$ арқалы қайтадан жазсақ мынаны аламыз

$$\Delta L^2 = a^2\Delta\xi^2 + 2ab\cos\alpha\,\Delta\xi\Delta\eta + b^2\Delta\eta^2\,. \qquad (2)$$

Пропорционаллық коэффициентлери a, b ҳәм α мүйеши улыўма жағдайларда ячейкадан ячейкаға өткенде өзгереди (яғный олар O төбесиниң координаталары болған ξ ҳәм η шамаларының функциялары болып табылады. (2)-теңлемедеги үш көбейтиўшини басқа усыл менен белгилеў улыўма түрде қабыл етилген. Атап айтқанда

$$\Delta L^2 = g_{11}\Delta\xi^2 + 2g_{12}\Delta\xi\Delta\eta + g_{22}\,\Delta\eta^2\,. \qquad (3)$$

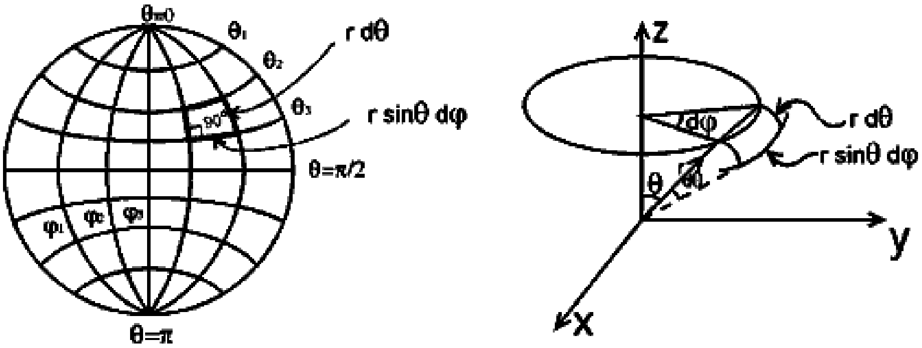
Бул формуланы Гаусс координаталарындағы **Пифагордың улыўмаластырылған теоремасы** деп атайды.

Бизиң аңлатпаларымызда пайда болған үш g_{11}, g_{12}, g_{22} шамалары параллелограмның шеклеринде қашықлықларды ҳәм ноқатлардың орынларын анықлайтуғын еки тәреп ҳәм муйеш сыпатында хызмет етеди. Сонлықтан оларды **метрлик коэффициентлер**, ал (3)-аңлатпаны **беттиң метрикасын** анықлайды деп есаплайды. Метрлик коэффициентлердиң мәнислери ячейкадан ячейкаға өзгерип барады, бул жағдайды картада белгилеп барыў ямаса ноқаттың Гаусс координаталары болған ξ, η шамаларының математикалық функциясы сыпатында бериў керек:

$$g_{11}(\xi,\eta)\,,\, g_{12}(\xi,\eta)\,,\, g_{22}(\xi,\eta)\,. \qquad (4)$$

Егер бул функциялар белгили болса, онда (3)-формула жәрдеминде координата басынан қәлеген ячейкада жайласқан қәлеген ноқатқа шекемги ҳақыйқый қашықлықларды есаплаў мүмкин (себеби олардың Гаусс координатлары ξ, η менен O ноқатының координаталары белгили). **Солай етип g_{ij} метрлик коэффициентлери беттиң барлық геометриясын анықлайды екен**.

Геодезиялық сызықлар ҳәм қыйсықлық. Қыйсық бетте туўры сызықлар болмайды, ал ең дүзиўлери болады. Сол сызықлар ноқатлар жуплары арасындағы қашықлықларды анықлайды. Олардың математикалық аты геодезиялық сызықлар. Мысалы сфералық бетте геодезиялық сызықлар үлкен дөңгелектиң шеңберлери болып табылады. Бул шеңберлер сфераның орайы арқалы өтиўши тегисликлер менен кесиледи.



Сферадағы метрика

Сферадағы еки Гаусс координатасы ретинде еки мүйешти алыў мүмкин (поляр мүйеш θ ҳәм азимуталлық мүйеш φ). Сфераның радиусын r арқалы белгилеп сферадағы метриканы мына түрде көрсетиў мүмкин:

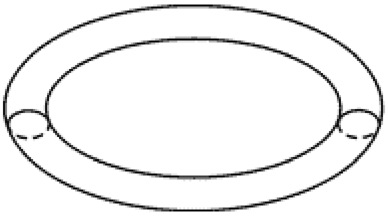
$$dL^2 = r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2 + r^2 \, d\theta^2. \qquad (5)$$

Бул улыўма формула болған (3)-аңлатпадағы метрлик коэффициентлерге сәйкес келеди:

$$g_{11} = r^2 \sin^2\theta \, , g_{22} = r^2, g_{12} = 0 \, . \qquad (6)$$

g_{12} қураўшысының нолге тең екенлиги координата системасының ортогоналлығын билдиреди.

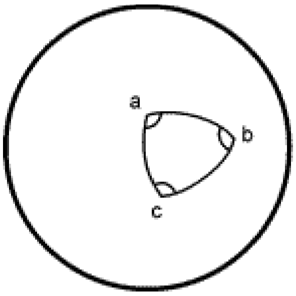
Тор.



Басқа бетлердеги ең кысқа сызықлар көпшилик жағдайларда қурамалы қурылысқа ийе болады; бирақ усыған қарамастан усы бетлердиң рамкаларында олар ең әпиўайы иймекликлер болып табылады ҳәм бул беттиң геометриясының каркасын пайда етеди (мысалы Евклид геометриясындағы туўры сызықлардың тегисликтиң каркасын пайда еткениндей).

Беттиң екинши фундаменталлық қәсийети – оның қыйсықлығы болып табылады. Қыйсықлықты әдетте үшинши кеңисликлик өлшем жәрдеминде анықлайды. Мысалы сфераның қыйсықлығы оның радиусы арқалы өлшенеди (атап айтқанды беттеги ноқаттан сфераның орайына шекемги аралық – сфералық беттен тыста орналасқан).

Тоғайлы орындағы жер өлшеўши қыйсықлықтың бул анықламасын пайдалана алмайды. Ол беттен тыста жайласқан ноқатларға бара алмайды. Сонлықтан қыйсықлықты анықлаў ушын тек өзиниң рулеткасынан пайдаланыўы керек. Гаусс усы усылдың ҳақыйқатында да дурыс екенлигин дәлилледи ҳәм усы жерде мәселениң сферада қалай шешилетуғынлығын көрсетип өтемиз. Буның ушын сфераның бетинде үш *a*, *b* және *c* ноқатларын аламыз ҳәм оларды геодезиялық сызықлар менен тутастырамыз.



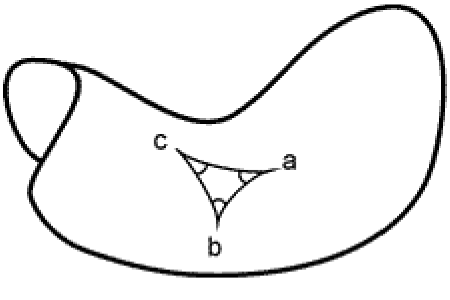
Сфера бетинде алынған үш мүйешликтиң ишки мүйешлериниң қосындысы π ден үлкен.

Нәтийжеде жоқарыдағы сүўретте көрсетилгендей үш мүйешлик алынады. Бул үш мүйешликтиң ишки мүйешлериниң қосындысы π ден (яғный 180° тан) үлкен болады. Бул сфераның дөңислигиниң нәтийжеси. Үш мүйешлик қаншама үлкен болса ишки мүйешлердиң қосындысының π ден айырмасы үлкен болады. Усы айырма жәрдеминде биз сфераның қыйсықлық дәрежесин – оның радиусын анықлай аламыз ба? - деген сораў туўылады. Әлбетте анықлаў мүмкин. Буның ушын үш мүйешликтиң ишки мүйешлериниң қосындысын Σ арқалы белгилеймиз ҳәм $\Sigma - \pi$ айырмасын үш мүйешликтиң майданы S_Δ ға бөлемиз:

$$\frac{\Sigma - \pi}{S_\Delta} = \frac{1}{R^2} \equiv C. \qquad (7)$$

Алынған шама $1/R^2$ қа тең (R арқалы сфераның радиусы белгиленген). Оны қыйсықлық деп атайды және C ҳәрипи жәрдеминде белгилейди.

Қәлеген қыйсайған бет жағдайында қыйсықлықты жоқарыда келтирилгендей жоллар менен анықлайды. Улыўма жағдайда бет ҳәр қыйлы ноқатларда ҳәр қыйлы болып қыйсайған болыўы мүмкин. Сонлықтан берилген орындағы қыйсықлықты анықлаў ушын үш мүйешликти шексиз киши етип алыў керек. Усындай жоллар менен сфера ушын алынған қыйсықлық оң мәниске ийе болып шығады. Бирақ терис мәниске ийе қыйсықлыққа ийе бетлер де бар. Усындай бетке мысал ретинде ер тәризли бетти келтириў мүмкин (төмендеги сүўрет).



Ер терис мәнисли қыйсықлыққа ийе бет болып табылады.

Усындай ер тәризли беттеги үш мүйешликтиң ишки мүйешлериниң қосындысы π ден киши, яғный

$$C = \frac{\Sigma - \pi}{S_\Delta} < 0, \qquad (8)$$

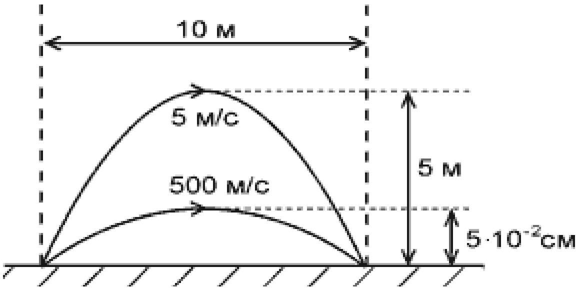
яғный қыйсықлық терис.

Беттиң қыйсықлығы ҳаққында шеңбер узынлығының оның радиусына қатнасы бойынша да таллаў мүмкин. Сферада бул қатнас 2π ден киши, ал ер тәризли бетте 2π ден үлкен.

Улыўма жағдайларда қыйсықлық R_{iklm} 4–рангалы тензоры жәрдеминде тәрийипленеди ҳәм ол **қыйсықлық тензоры** деп аталады ҳәм **ол метрлик тензор** $g_{\alpha\beta}$ арқалы аңлатылыўы мүмкин. Қыйсықлық тензорының барлық қураўшылары бир биринен ғәрезсиз емес. Мысалы 2 өлшемли кеңислик ушын R_{iklm} тензорының 16 қураўшысынан тек бир қураўшысы (R_{1212}) ғәрезсиз болып табылады.

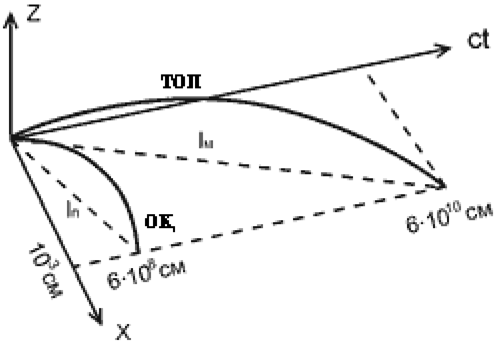
Үш өлшемли кеңисликте ҳәр бир ноқаттағы қыйсықлық 3 шаманың жәрдеминде тәрийипленеди (R_{iklm} тензорының 6 ғәрезсиз қураўшысы + координата системасын сайлап алыў). Төрт өлшемли кеңисликте қыйсықлық тензоры 20 ғәрезсиз қураўшыға ийе ҳәм ҳәр бир ноқатта 4 өлшемли кеңисликтиң қыйсықлығы 14 шаманың жәрдеминде тәрийипленеди (координата системасын арнап сайлап алыўдың есабынан).

Жердиң кеңислик-ўақытындағы қыйсықлық. Жердиң гравитациялық майданы менен байланысқан қыйсықлықты қалай өлшеўге болады? Бул сораўға топ пенен оқтың мысалында жуўап беремиз (төменде келтирилген сүўрет).



Топ пенен оқтың Жердиң тартыў майданындағы траекториясы.

Әлбетте бирден қарағанда еки траектория бир биринен күшли айрылады (егер гәп әдеттеги кеңисликтеги траекториялар ҳаққында айтылатуғын болса). Бирақ салыстырмалық теориясында гәп кеңислик-ўақыттың қыйсықлығы ҳаққында айтылады. Сонлықтан бул траекторияларды биз кеңислик-ўақытта сәўлелендириўимиз керек (төменде келтирилген сүўрет).



Топ пенен оқтың кеңислик-ўақыттағы траекториясы.

Белгили формулаларға сәйкес ушыў ўақыты көтерилиў бийиклиги менен былайынша байланысқан:

$$t = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{9}$$

Бул аңлатпада g арқалы еркин түсиў тезлениўи белгиленген. Сонлықтан оқ ушын $t_п = 2\cdot 10^{-2}$ сек, ал топ ушын $t_м = 2$ сек. Усы ўақыт ишинде жақтылық сәйкес $6\cdot 10^8$ см ҳәм $6\cdot 10^{10}$ см аралықларды өтеди (сүўретте келтирилген). Бул аралықлар 10 м ден әдеўир үлкен (жерге түскеннен кейинги топтың координатасы). Демек (x, ct) тегислигинде оқ пенен топ өткен жоллар сәйкес

$$l_о \approx 6\cdot 10^8 \text{ см}, \; l_т \approx 6\cdot 10^{10} \text{ см}. \tag{10}$$

Әлбетте 10 метрлик екинши категти есапқа алмаймыз.

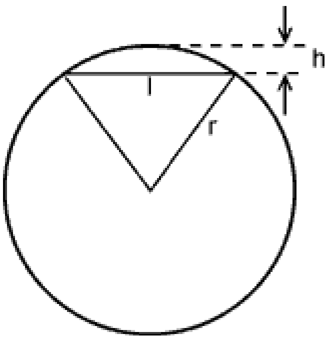
Енди қыйсықлық радиусын мына формула бойынша есаплаймыз (сүўретти қараңыз)

$$r = \frac{l^2}{8h}. \tag{10}$$

Барлық шамаларды қойыў арқалы қыйсықлық радиусы ушын аламыз

$$r_о = r_т \approx 10^{18} \text{ см} = 10^{13} \text{ км} \approx 1 \text{ жақтылық жылы}. \tag{11}$$

Солай етип кеңислик-ўақыттағы оқ пенен топтың траекториялары ҳақыйқатында да бирдей екен ҳәм ол шама менен 1 жақтылық жылына тең (Жер менен Қуяш арасындағы қашықлықтан 70 мың есе үлкен).



Қыйсықлық радиусын анықлаў.

Бундай үлкен санның қайдан алынатуғынлығын анықлаў қыйын емес. Жер бетинде гравитациялық эффектлер толығы менен еркин түсиў тезлениўи $g \approx 10^3$ см/сек^2 жәрдеминде анықланады. Усы шама менен жақтылықтың тезлиги жәрдеминде өлшем бирлиги узынлықтың өлшем бирлиги болған тек бир комбинацияны пайда ете аламыз:

$$r = \frac{c^2}{g} = c\,\frac{c}{g} \approx c \cdot 3 \cdot 10 \; sek = 1 \; jaqtılıq \; jılı. \tag{12}$$

Улыўмалық салыстырмалық теориясының геометриялық характери. Инерциал есаплаў системасындағы декарт координаталар системасында ds мына формула жәрдеминде анықланады:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \ . \tag{13}$$

Басқа қәлеген инерциал есаплаў системасына өткенде интервалдың өз түрин сақлайтуғынлығын биз жақсы билемиз. Бирақ егер биз инерциал емес есаплаў системасына өтетуғын болсақ, онда ds^2 шамасы төрт координатаның дифференциалларының қосындысы ҳәм квадратларының айырмасы болмайды. Мысалы бир текли айланыўшы координаталар системасына өтсек

$$x = x'\cos\Omega t - y'\sin\Omega t \, , y = x'\sin\Omega t + y'\cos\Omega t \, , z = z' \tag{14}$$

(Ω арқалы z көшери бағытындағы айланыўдың мүйешлик тезлиги белгиленген) интервал мына түрге ийе болады:

$$ds^2 = [c^2 - \Omega^2(x'^2 + y'^2)]dt^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + 2\Omega y'dx'dt - 2\Omega x'dy'dt \, . \tag{15}$$

Ўақыт қандай нызам бойынша түрлендирилетуғын болса да бул аңлатпа төрт координатаның дифференциалларының квадратларының қосындысына айланбайды.

Солай етип инерциал емес есаплаў системасында интервалдың квадраты координаталардың дифференциалларының улыўмалық түриниң базы бир квадратлық формасы болып табылады екен, яғный мына түрге ийе болады:

$$ds^2 = g_{ik}dx^idx^k. \tag{16}$$

Бул аңлатпадағы екинши рангалы g_{ik} тензоры метрлик тензор болып табылады. Ол кеңисликлик x^1, x^2, x^3 координаталары менен ўақытлық x^0 координатаның базы бир функциясы болып табылады. Солай етип төрт өлшемли x^0, x^1, x^2, x^3 координаталар системасы инерциал емес есаплаў системалары ушын қолланылғанда қыйсық сызықлы координаталар системасы болып табылады. Жоқарыда келтирилген g_{ik} шамалар берилген ҳәр бир иймек сызықлы координаталар системасындағы геометрияның барлық қәсийетлерин анықлап, бизге кеңислик-ўақыттың метрикасын береди.

Жоқарыдағы g_{ik} шамаларын i ҳәм k индекслери бойынша барлық ўақытта симметриялы деп қараў керек:

$$g_{ik} = g_{ki} \tag{17}$$

Себеби олар (16)-симметриялы квадратлық формадан анықланады. Бул аңлатпаға g_{ik} ҳәм g_{ki} бир түрдеги dx^idx^k көбеймесине көбейтилген халда киреди. Улыўма жағдайда 10 дана ҳәр қыйлы g_{ik} шамаларына ийе боламыз (төртеўи бирдей алтаўы ҳәр қыйлы индекслер менен). Инерциал есаплаў системасында декарт кеңисликлик координаталарын $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ ҳәм ўақытты $x^0 = ct$ қоланғанда g_{ik} шамалары мыналарға тең

$$g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 \text{ , } i \neq k \text{ болғанда } g_{ik} = 0. \qquad (18)$$

Усындай мәнислердеги g_{ik} лары бар төрт өлшемли координаталар системасын Галилей координаталар системасы деп атаймыз.

Эквивалентлик принципине муўапық инерциал емес есаплаў системалары базы бир күш майданларына эквивалент. Демек биз релятивистлик механикада бул майданлардың g_{ik} шамалары менен анықланатуғынлығын көремиз.

Усы айтылғанлар ҳақыйқый гравитациялық майданға да тийисли болады. Қәлеген гравитация майданы кеңислик-ўақыттың метрикасының өзгериси сыпатында анықланады (демек g_{ik} шамалары жәрдеминде анықланады). Бул оғада әҳмийетли жуўмақ болып табылады ҳәм оның мәниси мынадан ибарат: кеңислик-ўақыттың геометриялық қәсийетлери (оның метрикасы) физикалық қубылыслар менен анықланады, ал кеңислик пенен ўақыттың өзгермейтуғын және барлық ўақытлар ушын берилген турақлы қәсийети болып табылмайды.

Салыстырмалық теориясы тийкарында қурылған (дөретилген) гравитациялық майданлар теориясын улыўмалық салыстырмалық теориясы деп атаймыз. Бул теория бакалавр жумысының кирисиў бөлиминде айтылып өтилгениндей Альберт Эйнштейн тәрепинен дөретилген (1915-жылы толық дөретилди) ҳәм усы ўақытқа шекем дөретилген физикалық теориялардың ең сулыўы болып табылады. Бул теория Эйнштейн тәрепинен дедуктивлик усыллар тийкарында дөретилди ҳәм кейнинен астрономиялық бақлаўларда дурыслығы тастыйықланды.

Пайдаланылған әдебиятлар дизими

1. Hugh D. Young, Roger A. Freedman,cjntributing autor A.Lewis Ford. University Physics with modern Physics. 13th Edition. Addison-Wesley. 1598 p.

(p. 1223-1260).

2. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теоретическая физика. Учебное пособие для вузов. В. 10 т. Том II. Теория поля. 8-е издание. Издательство "ФИЗМАТЛИТ". Москва. 2003. 536 с.

Глава X. §§ 81-83.

3. Benjamin Crowell. Spesial Relativity. www.lightandmatter.com, rev. February 11, 2016.

4. Lewis Ryder. Introduction to General Relativity. Cambridge University Press. 2009. 441 p.

6-лекция. Гравитациялық майдан теңлемелери. Гравитациялық майданда қозғалыўшы материаллық ноқаттың қозғалыс теңлемеси

Гравитация теориясының теңлемелери системасы. Салыстырмалық теориясы тийкарында қурылған гравитациялық майданлар теориясын улыўмалық салыстырмалық теориясы деп атаймыз.

Биз усы жерде Эйнштейн тәрепинен 1915-жылы толық дүзилген гравитация майданының теңлемелерин жазып өтемиз. Ол мына түрге ийе болады:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik}.$$

Бул теңлемелер системасы (он дана сызықлы емес теңлемелер системасы) аралас қураўшыларда былай жазылады

$$R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = \frac{8\pi k}{c^4} T_i^k .$$

Бул теңлемелер улыўмалық салыстырмалық теориясының тийкарғы теңлемелери – гравитация майданының теңлемелери болып табылады. Бул теңлемелердеги симметриялы R_{ik} тензоры $(R_{ik} = R_{ki})$ Риччи тензоры, $R = g^{ik} R_{ik} = g^{il} g^{km} R_{iklm}$ тензоры кеңисликтиң скаляр қыйсықлығы, T_{ik} энергия-импульс тензоры деп аталады.

Егер Интернет тармағындағы Википедия универсаллық энциклопедиясына итибар беретуғын болсақ, онда биз "Уравнения Эйнштейна" атлы мақалада төмендегилерди оқыймыз:

Эйнштейн теңлемелери (гейпара жағдайларда "Эйнштейн-Гильберт теңлемелери" атамасы да ушырасады) улыўма салыстырмалық теориясындағы майысқан кеңислик-ўақыттың метрикасын усы кеңислик-ўақытта жайласқан материяның қәсийетлери менен байланыстыратуғын гравитациялылық майданның теңлемелери болып табылады. Термин бирлик сеплеўде де пайдаланылады. Себеби бул тензорлық түрде жазғанда бир теңлеме болып табылады, ал қураўшыларда болса теңлемелер системасынан турады.

Теңлеме мынадай түрге ийе болады:

$$\mathrm{R_{ab}} - \frac{\mathrm{R}}{2}\mathrm{g_{ab}} + \Lambda \mathrm{g_{ab}} = \frac{8\pi \mathrm{G}}{\mathrm{c}^4}\mathrm{T_{ab}}$$

ҳәм бул теңлемеде $\mathrm{R_{ab}}$ арқалы кеңислик-ўақыттың қыйсықлығы төртинши рангалы $\mathrm{R_{abcd}}$ тензорынан индекслердиң жубының сверткасы нәтийжесинде алынады, R арқалы скаляр қыйсықлық (яғный сверткаланған Риччи тензоры), $\mathrm{g_{ab}}$ арқалы метрлик тензор, Λ арқалы космологиялық турақлы (көп санлы авторлар λ арқалы да белгилейди), ал $\mathrm{T_{ab}}$ арқалы материяның энергия-импульс тензоры белгиленген. Теңлемелерге кириўши барлық тензорлары симметриялық тензорлар болғанлықтан төрт өлшемли кеңислик-ўақытта олар 4·(4+1)/2=10 дана скаляр теңлемелерге тең күшке ийе.

x^μ координаталар системасында қыйсықлық тензорының қураўшылары

$$\mathrm{R}^\rho_{\sigma\mu\nu} = \mathrm{dx}^\rho\left(\mathrm{R}(\partial_\mu, \partial_\nu)\partial_\sigma\right)$$

аңлатпасының жәрдеминде анықланады. Бул аңлатпада $\partial_\mu = \partial / \partial \mathrm{x}^\mu$ арқалы ҳәр бир ноқатта x^μ координаталық сызыққа урынба бағытында бағытланған векторлық майдан белгиленген. Кристоффель символлары термининде қыйсықлық тензорын мына түрде жазамыз:

$$\mathrm{R}^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}.$$

Эйнштейн теңлемелериниң ең әҳмийетли қәсийетлериниң бири олардың сызықлы емеслигинде. Сонлықтан оларды суперпозиция принципин шешкенде қолланыўға болмайды.

1917-жылы Эйнштейн жоқарыда келтирилген еки теңлемени космологиялық мәселелерди шешиў (тутас Әлем) ушын пайдаланды ҳәм Әлемниң стационарлығын (ўақыттан ғәрезсизлигин) тәмийинлеў ушын теңлемеге Λg_{ik} қосымша ағзасын қосты ҳәм мына түрге ендирди

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik} + \Lambda g_{ik}. \tag{1}$$

Биз гравитация майданы теңлемесине космология турақлысын қосқанлығын Эйнштейн «өмиринде жиберилген ең үлкен қәтелик» деп дағазалағанлығын атап өтемиз. Бирақ ўақыттың өтиўи менен Λ турақлысының физика илиминдеги әҳмийети артты. Ҳәзирги ўақытлардағы физика бул шаманы вакуумның энергиясы менен байланыстырады.

Жоқарыдағы теңлемедеги Λ шамасын космологиялық турақлы (космология турақлысы) деп атайды. Ҳәзирги ўақытлары гравитация майданының теңлемеси көпшилик жағдайларда Λ шамасы менен жазылады ҳәм көпшилик астрофизикалық мәселелер сол теңлемелерди шешиў менен шешиледи.

Потенциалы $\varphi << c^2$ болған әззи гравитациялық майданда кеңислик-ўақыттың метрикасы мына түрге ийе болады:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Ньютонлық жақынласыўында ҳәм қозғалыстың характери релятивистлик емес болғанда $2\varphi/c^2$ ағзасын ҳәм соның менен бирге әпиўайы қаўсырмадағы шамаларды есапқа алмаўға болады. Бирақ жақтылық ушын буны ислеў мүмкин емес.

Эйнштейн теңлемесин шешиў дегенимиз кеңислик-ўақыттың метрлик тензоры $g_{\mu\nu}$ ның түрин табыў деген сөз. Теңлемени шешиў ушын шегаралық шәртлер, координаталық шәртлер ҳәм энергия-импульс тензоры болған $T_{\mu\nu}$ тензорын жазыў менен әмелге асырылады. $T_{\mu\nu}$ тензоры ноқатлық массаға ийе объектти, тарқалған материяны ямаса энергияны, соның менен бирге тутасы менен алынған барлық Әлемди де тәрийиплеўи мүмкин. Энергия-импульс тензорының түрине байланыслы Эйнштейн теңлемесиниң шешимлерин вакуумлық, майданлық, тарқалған, космологиялық ҳәм толқынлық деп түрлерге бөледи. Усының менен бир қатарда шешимлердиң математикалық классификациялары да орын алған.

Енди бөлекшениң гравитация майдандағы қозғалысын қараймыз. Улыўмалық салыстырмалық теориясы бойынша бөлекшениң дүньялық сызығы геодезиялық пенен сәйкес келеди (биз «Геодезиялық сызық» сөзлериниң орнына «геодезиялық» сөзин пайдаланамыз). Басқа сөз бенен айтқанда 4 кеңисликтеги («4 кеңислик» термин сыпатында қабыл етилген, ол 4 өлшемли Минковский кеңислик-ўақытына сәйкес келеди) минималлық ямаса максималлық «узынлыққа» ийе x^0, x^1, x^2, x^3 сызығына сәйкес келеди. Гравитация майданы бар болса кеңислик-ўақыт Галилейлик емес болғанлықтан бул сызық Евклидлик мәнисте туўры сызық болмайды ҳәм бөлекшениң ҳақыйқый кеңисликлик қозғалысы тең өлшеўли емес ҳәм туўры сызықлы емес болады. Солай етип улыўмалық салыстырмалық теориясында гравитациялық майдандағы бөлекшениң кеңисликлик траекториясының қыйсайыўы Ньютон теориясындағы тартылыс күшиниң тәсири емес, ал кеңислик-ўақыттың өзиниң қыйсықлығы болып табылады. Бул қыйсық кеңислик-ўақытта бөлекше барлық ўақытта да ең қысқа жол (оның «көз-қарасы» бойынша) жол (оның «түсиниги» бойынша туўры), яғный геодезиялық бойынша қозғалады. 1 ҳәм 2 болған дүньялық ноқатлар арасындағы дүньялық сызықтың узынлығы интервалдың шамасы бойынша анықланады

$$s = \int_1^2 ds.$$

Әззи гравитация майданында ҳәм бөлекшениң тезлиги v жақтылықтың тезлигинен киши болғанда шексиз киши интервал

$$\mathrm{ds}^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{\mathrm{c}^2}\right)\mathrm{c}^2\mathrm{dt}^2 - \left(1 - \frac{2\phi}{\mathrm{c}^2}\right)(\mathrm{dx}^2 + \mathrm{dy}^2 + \mathrm{dz}^2)$$

аңлатпасы бойынша анықланады. Сонлықтан шекли өсим ушын

$$s - c\int_1^2 dt\sqrt{1 + \frac{2\varphi}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}} \approx \int_{t_1}^{t_2} dt\left(1 + \frac{\varphi}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

шамасына ийе боламыз. s шамасының экстремаллығы бөлекшениң төмендеги интегралдың экстремумын тәмийинлеўши траектория бойынша қозғалатуғынлығын билдиреди

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\left(\frac{\varphi^2}{2} - \varphi\right).$$

$T = mv^2/2$ ҳәм $U = m\varphi$ болғанлықтан (биринши бөлекшениң кинетикалық энергиясы, ал екиншиси потенциал энергия) классикалық механикадағы ең киши тәсир принципине сәйкес келеди (рус тилиндеги «принцип наименьшего действия» нәзерде тутылмақта). Бул принцип бойынша бөлекшениң траекториясы мына интегралдың экстремум шәрти

$$\mathrm{S} = \int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} \mathrm{dt}(\mathrm{T} - \mathrm{U})$$

бойынша анықланады. Бул интегралды механикада (пүткил физикада) "ҳәрекет" ("действие") деп аталады. Ньютонның II нызамының бул улыўмалық принциптиң нәтийжеси екенлигин көрсетиўге болады. Жақтылық болса (материаллық бөлекшелерден парқы) дүньялық сызық бойынша тарқалады. Оның ушын интервал $ds = 0$. Демек Эйнштейнниң геометриялық теориясының мәнисин төмендегидей үш жағдай түринде түсиниў керек екен:

a) Геодезиялық сызықлар локаллық жақтан туўры сызықлар;

b) Кеңислик-ўақыттың үлкен областларында дәслеп қашықласатуғын, ал кейин кеңислик-ўақыттың кыйсықлығы менен анықланатуғын тезлик пенен жақынласатуғын геодезиялық сызықлар геометрияның материяға тәсири ҳәм ҳәзирги ўақытлары биз айтып жүрген «тартысыў» болып табылады;

c) Материя өз гезегинде өзи жайласқан геометрияны (белгили бир геометрияға ийе кеңислик-ўақытты) деформациялайды.

Улыўмалық салыстырмалық теориясындағы қозғалыс теңлемеси. Ньютон механикасындағы бөлекшелердиң қозғалысына гравитациялық майданның қалайынша тәсир ететуғынлығы жақсы изертленген. Бундай жағдайда қозғалыс теңлемесиниң шеп тәрепинде изертленип атырған бөлекшениң тезлениўиниң усы бөлекшениң массасына көбеймеси турады (бул жағдайда инерт масса турады). Ал теңлемениң оң тәрепинде болса гравитациялық күштиң шамасы жазылады:

$$m_{inert}\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-G\frac{m_{grav}M}{r^3}\mathbf{r}.$$

Эквивалентлик принципине сәйкес денениң инерт массасы оның гравитациялық массасына тең болғанлықтан изертленип атырған бөлекшениң қозғалысы оның массасынан ғәрезли емес, яғный барлық денелер гравитация майданында бирдей болып қозғалады.

А.Эйнштейнниң гравитация теориясында болса гравитациялық күштиң орнын кеңислик-ўақыттың қыйсықлығы ийелейди. Гравитациялық майдандағы қозғалыс қыйсайған кеңисликтеги қозғалыс болып табылады, ал туўры сызық бойынша қозғалыстан аўысыў қыйсайған кеңислик-ўақытта жүзеге келетуғын туўры сызықтан аўысыў болып табылады.

Енди арнаўлы салыстырмалық теориясындағы қозғалыс теңлемесиниң қандай болатуғынлығын көрип өтемиз.

Арнаўлы салыстырмалық теориясында изертленип атырған бөлекшениң қозғалыс теңлемеси былайынша жазылады:

$$m_{inert}c^2\frac{du^a}{ds}=F^{\alpha}. \qquad (2)$$

Бул аңлатпада u^a арқалы бөлекшениң 4 өлшемли (4 тезлиги) тезлиги (бул физикалық анықлама) ямаса бөлекшениң траекториясына урынба вектор (бул математикалық анықлама) белгиленген. u^a шамасының өлшем бирлигиниң жоқ, ал ds шамасының [см] өлшем бирлигине ийе екенлигин атап өтемиз. Басқа сөз бенен айтқанда жоқарыдағы теңликтиң шеп тәрепинде см/сек^2 өлшем бирлигине ийе шама турыпты.

Электронның электромагнит майданындағы қозғалыс теңлемеси

$$m_ec^2\frac{du^a}{ds}=eF^{\alpha\beta}u_{\beta} \qquad (3)$$

түрине ийе болады. Теңлемениң шеп тәрепинде турған күш $F^{\alpha\beta}$ Максвелл тензорынан қуралған 4 инвариант Лоренц күши болып табылады.

Тәсир етиўши күшлер нолге тең болса, яғный $F^{\alpha}=0$ теңлиги орынланғанда бөлекшениң қозғалысы инерция бойынша болады. Бундай жағдайда (2)-теңлемениң шешими

$$u^{\alpha}(s)=u_0^{\alpha}, \qquad (4)$$

$$x^{\alpha}(s)=u^{\alpha}\cdot s=x_0^{\alpha} \qquad (5)$$

түрине ийе болады. Инерция бойынша қозғалыс туўры сызық бойынша қозғалыс болып табылады. Ал Евклид ҳәм псевдоевклид геометриясында туўры сызық деп еки ноқат арасындағы ең қысқа сызықты айтады. Евклидлик емес геометрияларда ең қысқа узынлыққа ийе сызықты геодезиялық сызық (ямаса геодезиялық) деп атайды. Сырттан тәсир ететуғын күшлердиң қосындысы нолге тең болған жағдайдағы қозғалыс евклидлик емес геометрияда улыўмалық ковариант теңлеме – геодезиялық сызық пенен алмастырылады.

Егер u^a фотонның тарқалыў бағытындағы бирлик вектор, ал s траектория бойынша афинлик параметр болса, онда (4)-теңлеме фотонның қозғалысын тәрийиплейди.

Геодезиялық сызықлар бойынша қозғалыс гравитациялық майдандағы изертленип атырған бөлекшениң қозғалысын тәрийиплейди. Бул қозғалыс евклидлик метрикаға ийе кеңисликтеги инерция бойынша қозғалыстың аналогы болып табылады.

(1)-теңлемениң ковариантлық улыўмаластырылыўын жазыў арқалы гравитация майданындағы қозғалыс теңлемесин жазамыз:

$$m_{inert}c^2\frac{Du^\mu}{ds} = F^\mu. \tag{6}$$

Бул аңлатпада D арқалы ковариантлық дифференциалдың белгиси аңлатылған. Сонлықтан гравитация теориясында қозғалыс теңлемесин толығырақ

$$\mathrm{m}_{\mathrm{inert}}\mathrm{c}^2\frac{\mathrm{du}^\mu}{\mathrm{ds}}+\mathrm{m}_{\mathrm{inert}}\mathrm{c}^2\Gamma^{\alpha\beta}_{\mu}\mathrm{u}^\alpha \mathrm{u}^\beta = \mathrm{F}^\mu \tag{7}$$

түринде жазамыз. Бул аңлатпада $\Gamma^{\alpha\beta}_{\mu}$ арқалы Кристоффель (Элвин Бруно Кристоффель, Elwin Bruno Christoffel, 1829—1900, немис математиги) символлары белгиленген. Енди қозғалыс теңлемеси тезликлер бойынша сызықлы болыўдан қалды, теңлемедеги шеп тәрептеги екинши ағза тезликлердиң квадратлық көбеймесине ийе.

Биз Кристоффель символларының қыйсықлық тензорының аңлатпасында пайда болатуғынлығын, бирақ символлардың өзлериниң тензор болып табылмайтуғынлығын атап өтемиз. Биз Кристоффель символларын компьютерде есаплаўдың усылын төменде келтиремиз ҳәм соның менен бирге I ҳәм II әўлад Кристоффель символларының бар екенлигин атап өтемиз.

Демек электронның электромагнит майданындағы қозғалыс теңлемеси

$$\mathrm{m_e c}^2\frac{\mathrm{Du}^\alpha}{\mathrm{ds}} = \mathrm{eF}^{\alpha\beta}\mathrm{u}_\beta \tag{8}$$

түрине ийе болады екен. Бул аңлатпада $\mathrm{F}^{\alpha\beta}$ арқалы электромагнит майданның тензоры, ал $\mathrm{m_e}$ менен e арқалы электронның сәйкес массасы менен заряды белгиленген.

Енди сыртқы күшлер болмағанда (яғный $\mathrm{F}^\alpha = 0$ теңлиги орынланғанда) изертленип атырған бөлекшениң қозғалысының евкилид геометриясындағыдай туўры сызық бойынша болмайтуғынлығы атап өтемиз. Сыртқы күшлер болмаған жағдайдағы қозғалысты барлық төрт координата ушын дүзилген екинши тәртипли дифференциал теңлемелер системасы тәрийиплейди. Олар изертленип атырған бөлекшениң төрт өлшемли траекториясын тәрийиплейди.

Пайдаланылған әдебиятлар дизими

1. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теоретическая физика. Учебное пособие для вузов. В. 10 т. Том II. Теория поля. 8-е издание. Издательство "ФИЗМАТЛИТ". Москва. 2003. 536 с.

Глава XI. §§ 91-95.

2. Lewis Ryder. Introduction to General Relativity. Cambridge University Press. 2009. 441 p.

7-лекция. Меркурий планетасының перигелийиниң аўысыўы. Қуяштың гравитациялық майданындағы жақтылық нурының бағытының өзгериси. Гравитациялық қызылға аўысыў

Меркурий планетасы ҳәм оның орбиталық қозғалысындағы аномалия. Қуяш системасының планеталарының ишинде Меркурий Қуяшқа ең жақын жайласқан ҳәм өлшемлери бойынша да ең киши планета болып табылады. Усы жағдайларға байланыслы ол астрономлар ушын "үлкен қыйыншылық туўдыратуғын" планета болып табылады. Тарийхый мағлыўматлар бойынша Коперник "мен Меркурийди ҳеш қашан көрмедим" деп бир неше айтқан.

Меркурий менен Қуяш арасындағы орташа қашықлық Жер орбитасының диаметриниң 0,37 шамасына тең. Меркурийдиң диаметри Жердиң диаметринен 3 есе киши. Қуяш системасындағы басқа денелердиң тәсиринде планетаның перигелийи, афелийи ҳәм эллипс тәризли орбитаның еки фокусы арқалы өтетуғын үлкен ярым көшердиң бағыты (апсид сызығы) кеңисликтеги бағытын өзгертеди. Усының менен бир ўақытта бәҳәрги күн теңлесиў ноқатына бағытланған туўры менен перигелийге бағытланған туўры арасындағы (буны перигелийдиң узынлығы деп атайды) мүйеш те өзгереди. Қозғалыс муғдарының сақланыў нызамы (импульс моментиниң сақланыў нызамы) бойынша планетаның бир тегисликте қозғалыўы керек. Ал тартылыс нызамы бойынша планета сол тегисликте туйық иймеклик (орбита) бойынша қозғалады. Бирақ сыртқы тәсирлердиң себебинен (буны әдетте уйытқыўлардың тәсиринде деп атайды) планета белгили дәўирден кейин өзиниң дәслепки орнына қайтып келмейди. Эллипс тәризли орбитаның Қуяшқа жақын жайласқан ноқаты (перигелий) кеңисликте аўысады.

Биз перигелий ҳаққында бир қатар мағлыўматларди атап өтемиз. Перигелий (әййемги грекше περί «пери» - әтирапында, ηλιος «гелиос» - Қуяш) - Қуяш системасының планетасының ямаса басқа да аспан денесиниң орбитасының Қуяшқа ең жақын ноқаты болып табылады. Перигелийдиң антоними афелий термини болып табылады. Афелий деп орбитаның Қуяштан ең қашық ноқатын түсинемиз. Афелий менен перигелий арасындағы сызықты апсид сызығы деп атайды.

Перигелийдиң радиусы $r_p = (1-e)a$ формуласының жәрдеминде есапланады. Бул формулада a арқалы орбитаның үлкен ярым көшериниң мәниси, e арқалы орбитаның эксцентритети белгиленген.

Перигелийдиң тезлиги

$$v_{per} = \sqrt{\frac{GM_{\odot}(1+e)}{a(1-e)}}$$

формуласының жәрдеминде есапланады. Бул формулада G арқалы гравитациялық турақлы, $M_{\odot}$ арқалы Қуяштың массасы белгиленген.

Жердиң перигелийи 147 098 291 км ге тең. Бул шама Қуяш пенен Жер арасындағы қашықлықтан шама менен 2,5 миллион км ге киши. Жер перигелий арқалы 2-5 январь күни өтеди (ең қысқа күннен кейин орташа 13 күннен соң).

Америка Қурама Штатларындағы НАСА агентлигиниң информациясы бойынша Қуяш системасының перигелийлериниң мәнислери төмендегилерден ибарат: Меркурий – 46 001 009 км, Венера - 107 476 170 км, Марс - 206 655 215 км, Юпитер – 740 679 815 км, Сатурн – 1 349 823 615 км, Уран – 2 734 998 229 км, Нептун – 4 459 753 056 км.

1-кестеде Қуяш системасының айырым планеталары ушын перигелийдиң әсирлик аўысыўларының (прецессияларының) мәнислери келтирилген.

1-кесте.

Гейпара аспан денелериниң перигелийлериниң аўысыўы (прецессиялары) (мүйешлик секундлардағы мәнислери)

Перигелийдиң жүз жыл даўамындағы қосымша аўысыўлары	Теориялық мәнис	Бақлаўлардың нәтийжелери
Меркурий	43	43,1 ± 0,5
Венера	8,6	8,4 ± 4,8
Жер	3,8	5,0 ± 1,2
Марс	1,35	1,1 ± 0,3

1-кестеде келтирилген мағлыўматлар астрономия илиминиң қандай дәл илимге айланғанлығын ҳәм перигелийдиң аўысыўының Қуяшқа жақын планеталарда үлкен мәниске ийе екенлигин айқын түрде көрсетеди. Соның менен бирге Жер менен Венера ушын келтилирген мағлыўматлардағы салыстырмалы үлкен қәтелик (мысалы Венера ушын 8,4 ± 4,8) бул планеталардың орбиталарының дерлик шеңбер тәризли екенлиги менен байланыслы.

Биз XVII ҳәм XVIII әсирлердиң астрономларының Меркурий планетасының қозғалыс теориясын дөретиў ушын өткерген бақлаўларының жеткиликли дәрежеде дәл емес екенлигин мойынлағанын атап өтемиз. Бирақ ҳәтте XIX әсирдиң басында бул "үлкен емес" планетаның қозғалысы дәл болжаўларға "бағынбады". Француз астрономы Урбен Жан Жозеф Леверье [французша Urbain Jean Joseph Le Verrier, (1811-1877), аспан механикасы мәселелери менен шуғылланған француз математиги, өзиниң өмириниң көпшилик бөлиминде Париж обсерваториясында ислеген] өзиниң астроном сыпатындағы жумысларын Ньютонның пүткил дүньялық тартылыс нызамын пайдаланыў тийкарында Меркурий планетасының қозғалыс теориясын изертлеўден баслады. Ол 1811-жылы туўылған ҳәм 1854-жылы Париж обсерваториясының директоры болып тайынланған. Өзиниң хызмет бабындағы ўазыйпаларын орынлаўда Леверье обсерватория хызметкерлериниң кеўилинен шықпаған. Сонлықтан көп узамай оның орнын басқа астроном Шарль Делоне ийелеген. Бирақ лаўазымнан босаў уллы астрономның жумысына тәсирин тийгизбеген. Делоне қайтыс болғаннан кейин 1873-жылы Леверье қайтадан Париж обсерваториясының директоры лаўазымына таярланған ҳәм бул лаўазымда ол 1877-жылы қайтыс болғанға шекем ислеген.

Меркурийдиң қозғалысының онша сәтли болмаған теориясының биринши вариантын Леверье 1843-жылы усынылды. Сол дәўирлердеги ең жетилискен ҳәм дәл болған бақлаў мағлыўматларын пайдаланыў жолы менен теорияны қайтадан қарап шығыўдың барысында ол және бир машқаланың бар екенлигин анықлады ҳәм оны ең баслы машқала деп есаплады. 1859-жылы ол Меркурий планетасының перигелийиниң аномаллық туўры аўысыўының орын алатуғынлығын тапты. Бул аўысыў теориялық болжаўлар менен бақлаў нәтийжелериниң арасындағы айырманың пайда болыўына алып келген.

1859-жылы шыққан мақалаларында Нептун планетасын ашқанлардың бири У.Леверье 1846-жылы Меркурий планетасының перигелийиниң теориялық жоллар менен алынған шамадан тезирек жылысатуғынлығын (аўысатуғынын) ашқанлығын жәриялады. Өзиниң есаплаўларында Леверье барлық планеталардың Меркурийдиң қозғалысына тәсирин есапқа алған. 2-кестеде Леверье тәрепинен есапланған сол тәсирлер астында Меркурийдиң перигелийиниң қанша шамаға бурылатуғыны келтирилген.

2-кесте.

Меркурий планетасының перигелийиниң аўысыўына басқа планеталардың тәсири

Планета	Меркурийдиң перигелийиниң бурылыўына қосқан үлеси (жүз жыл ишиндеги мүйешлик секундлардағы бурылыў)
Венера	280,6
Жер	83,6
Марс	2,6
Юпитер	152,6
Сатурн	7,2
Уран	0,1

Леверье теориясы бойынша Меркурийдиң перигелийи 100 жыл даўамында 526,7'' шамаға аўысыўы керек еди. Бирақ үлкен дәлликте өткерилген бақлаўлар ҳәм өлшеўлер бул шаманың 570'' екенлигин көрсетти (яғный есаплаўлар нәтийжелеринен 43'' шамасына үлкен).

Аномалия мәселесин шешиў ушын көп санлы астрономлар тийкарынан еки типтеги гипотезаларды усынды:

1. "Материаллық гипотезалар": аўысыў Қуяштың қасындағы қандай да бир материя менен байланыслы.

2. Планетаның қозғалысына Қуяштың формасының дәл сфералық емес формасының тәсири.

3. Ньютонның пүткил дүньялық тартылыс нызамынан басқа тартылыс нызамын излеў.

Көп санлы физиклер менен астрономлар перигелийдиң әсирлик аўысыўы ушын оғада көп санлы физикалық себеплерди табыўға тырысты. Олардың арасында XIX әсирдеги электродинамика бойынша белгили алым Вильгельм Вебер, 1909-жылы қайтыс болған швейцариялы жас физик Вальтер Ритц бар еди.

Меркурий планетасының орбитасы менен байланыслы болған машқала XIX әсирдиң ақырындағы ҳәм XX әсирдиң басындағы Қуяш системасындағы аспан денелерин изертлеген астрономлар арасындағы ең баслы машқалаға айланды.

XX әсирдиң басында жаңа физика пайда болды ҳәм раўажлана баслады. Салыстырмалық теориясының фундаменталлық әҳмийети көрине баслады. Физиклердиң жаңа әўлады нәтийжелери бақлаўлардың нәтийжелерине сәйкес келетуғын жаңа тартылыс теориясын дөретиў менен шуғыллана баслады. Ал 1915-жылы А.Эйнштейн өзиниң улыўмалық салыстырмалық теориясын дөретиў бойынша жумысларын жуўмақлады. Бул теория Леверье ҳәм басқа да астрономлар тапқан перигелийлердиң аўысыўын айқын түрде түсиндире алды. Улыўмалық салыстырмалық теориясы Меркурийдиң перигелийиниң аўысыўын түсиндириў мақсетинде дөретилген көплеген теорияларды бийкарлады. Ал кейинирек Меркурийдиң перигелийиниң аномаллық аўысыўын улыўмалық салыстырмалық теориясын ҳәм оның менен конкуренцияға түскен Р.Дикке тәрепинен дөретилген альтернативлик скалярлық-тензорлық теорияның дурыслығын тексерип көриў ушын пайдаланылды.

Релятивистлик емес физика илиминдеги Кеплер мәселеси. Егер Википедия сыяқлы универсаллық энциклопедияға итибар берип қарасақ, онда Кеплер мəселесиниң бир бири менен гравитация арқалы тəсирлесетуғын сфералық симметрияға ийе еки денениң қозғалысын табыў мəселеси болып табылады. Классикалық тартылыс теориясында бул машқаланың шешимин Исаак Ньютонның өзи тапқан: денелер конуслық кесимлер бойынша қозғалады, ал бул конуслық кесимлер басланғыш шəртлерге байланыслы эллипс, парабола ямаса гипербола тəризли болыўы мүмкин. Улыўмалық салыстырмалық теориясы бойынша бул мəселениң өзи "жаман" қойылған мəселе болып табылады. Себеби релятивистлик физикада абсолют қатты денениң орын алыўы мүмкин емес. Ал абсолют қатты емес денелер бир бири менен тəсирлескенде сфералық симметрияға ийе болмайды. Сонлықтан гейпара жағдайларда ноқатлық денелерге өтиўге туўры келеди. Бирақ бундай денелерди Ньютон механикасында пайдаланыў мүмкин болса да, улыўмалық салыстырмалық теориясында бир қатар машқалаларды пайда етеди. Усының менен бир қатарда денелердиң басланғыш орынлары менен тезликлерин бериў менен бирге барлық кеңисликтеги басланғыш гравитациялық майданды да бериў керек болады (буны улыўмалық салыстырмалық теориясындағы басланғыш шəртлер машқаласы деп атайды). Бул жағдайлар улыўмалық салыстырмалық теориясында Кеплер мəселесиниң дəл аналитикалық шешиминиң жоқ екенлигин билдиреди. Тап усындай мəселе сыпатында Ньютонның тартылыс нызамындағы үш дене мəселесин көрсетиў мүмкин. Бирақ ҳəзирги заман физикасында Кеплер мəселеси шеклеринде денелердиң қозғалысларын зəрүрли болған дəлликте есаплаўдың усылларының комплекси ислеп шығылған. Олардың қатарына сынап көрилетуғын дене жақынласыўы, постньютонлық (Ньютоннан кейинги) формализм, санлы улыўмалық салыстырмалық теориясын киргизиўге болады. Улыўмалық салыстырмалық теориясында гравитациялық майдан ҳаққында гəп етилгенде майысқан кеңислик-ўақыт нəзерде тутылады.

Кеплер мəселеси деп бир бири менен пүткил дүньялық тартылыс нызамы бойынша тəсирлесетуғын еки денениң басланғыш координаталар менен тезликлер ықтыярлы түрде берилген жағдайдағы еки денениң қозғалысы ҳаққындағы мəселе болып табылады.

Мəселени шешиўден бурын классикалық механиканың базы бир фактлери менен қағыйдаларын еске түсиремиз ҳəм бəрше тəрепинен қабыл етилген терминологияны түсиндиремиз.

Ҳəрекет деп

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q}_i, q_i, t)dt \qquad (1)$$

шамасына айтамыз. Бул интеграл астындағы $L(\dot{q}_i, q_i, t)$ функциясы q_i улыўмаластырылған координаталардың, $\dot{q}_i$ улыўмаластырылған тезликлердиң ҳəм ўақыт t ның скаляр функциясы болып табылады. Интеграллаў t_1 менен t_2 ўақыт аралығында алынады.

Ең киши тəсир принципи (Мопертюи принципи[13]) бойынша вариацияның жəрдеминде қозғалыс теңлемеси аңсат алынады:

---

[13] Мопертью принципи бойынша классикалық механикадағы консервативлик голономлық системаның ҳалы оның кинетикалық энергиясының квадрат түбиринен траектория бойынша алынған интеграл минималлық мəниске ийе болатуғындай болып өзгереди. Бул принциптиң термодинамикада аналогы бар: еркин энергияның минимум болыў принципи.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i\right) dt.$$

Вариацияның нолге тең болыўы сумманың ағзаларының барлық ағзаларының нолге тең болатуғынлығын аңғартады. Усының нәтийжесинде теңлемелер системасын аламыз ҳәм бул системада ҳәр бир дене өзиниң ҳәр бир еркинлик дәрежеси ушын бир бирден теңлемеге ийе болады. Анықламасы бойынша ҳәрекет анық интеграл болғанлықтан, ал интеграллаўдың ўақыт бойынша шеклери мәниси бойынша константалар болғанлықтан үшинши ағзаның вариациясы нолге тең болады. Лагранж теңлемеси бойынша $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ теңлигиниң орынланатуғынлығын есапқа алып

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial}{\partial t}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q_i}\right)\delta q_i\, dt.$$

аңлатпасына ийе боламыз .

Интеграл астындағы ағзаны бөлеклерге бөлип интеграллаўға болады ҳәм нәтийжеде төмендегидей аңлатпаға ийе боламыз:

$$\delta S_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right)\delta q_i dt.$$

Бул жерде де интегралланған ағзаның вариациясы нолге тең ҳәм усыған сәйкес интеграл астында турған аңлатпа да нолге тең болыўы керек. Буннан

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (2)$$

түриндеги аңлатпаға ийе боламыз. Бул формуланы илгерилемели қозғалыс ушын да, айланбалы қозғалыс ушын да Ньютонның улыўмаластырылған екинши нызамы деп атаўға болады. Бирақ алынған аңлатпаны пайдаланыў ушын $L(\dot{q}_i, q_i, t)$ функциясының түриниң қандай болатуғынлығын билиў шәрт (бул функцияны физикада Лагранж функциясы деп атайды).

Егер дене еркин қозғалатуғын болса (яғный ҳеш бир тәсирлесиў болмаса) скаляр функцияны тек $L \sim \sum_i \dot{q}_i^2$ болған бир жағдайда алыў мүмкин. Себеби басқа жуп дәрежелерди пайдаланған жағдайда псевдоскаляр алынады. Демек $L = \sum_i \alpha_i \dot{q}_i^2$ түриндеги аңлатпаға ийе боламыз ҳәм илгерилемели қозғалыс ушын $\alpha_i = \frac{m_i}{2}$ аңлатпасын алыўымыз керек болады. Бул аңлатпа денениң инерциялық массасына анықлама береди. Ал айланбалы қозғалыслар изертленгенде $\alpha_i = \frac{I_i}{2}$ аңлатпасын жазыўымыз керек. Бул жағдайда I_i арқалы денениң берилген көшерге салыстырғандағы инерция моменти белгиленген.

Теңлемениң екинши ағзасының қандай да бир скаляр функциясы екенлигине гүмән жоқ. Сонлықтан бул ағза улыўмалыстырылған күштиң орнын ийелейди ҳәм бир өлшемли илгерилемели қозғалыста Лагранж функциясының анық түрине $L = \frac{mv^2}{2} - U(x)$ функциясының сәйкес келетуғынлығын көрсетеди. Бул аңлатпадағы тек координатадан ғәрезли болған $U(x)$ функциясын потенциал энергия деп атаймыз. Усы жағдай ушын (2)-формуланы пайдалансақ алынатуғын теңлемени

$$m\ddot{x} - F(x) = 0$$

түринде жазамыз ҳәм оны Ньютонның екинши нызамы деп атаймыз.

Көпшилик жағдайда Лагранж функциясының айқын түрин табыў ҳеш қандай айрықша түрдеги қыйыншылықты пайда етпейди. Дифференциаллағаннан кейин алынатуғын теңлемелер системасын шешкенде қурамалы жағдайлар пайда болады. (декарт координаталар системасында Ньютонның екинши нызамының теңлемелери болып табылады). Мәселе соннан ибарат, ҳәр бир теңлемени ўақыт бойынша еки реттен интеграллаўға туўры келеди. Бундай математикалық операцияларды орынлаў ҳәтте әпиўайы мәселелерди шешкенде де әдеўир қыйыншылықларды пайда етеди. Бундай машқаладан шығыўдың ең стандарт усылларының бири алынған системадағы қандай да бир симметрияны (ямаса симметрияларды) табыўдан ибарат. Гейпара жағдайларда тек усы мәселе ушын тән болған дара жағдайдағы симметрияның орын алыўы мүмкин. Ал гейпара жағдайда алынатуғын симметрия улыўмалық әҳмийетке ийе болады.

Усындай улыўмалық симметриялардың бирин ўақыттан анық түрде ҳеш қашан ғәрезли емес, ал координаталар менен тезликлерден ғәрезли болған Лагранж функциясын дыққат пенен таллағанда көриўге болады. Егер усындай өзгерис ушын айрықша бағыт болмаса ўақыттан анық түрдеги ғәрезлилик те кесент жасай алмайды (яғный потенциалдың ўақытқа ғәрезли өзгериўиниң асимметриясы менен байланыслы болған күштиң қосымша қураўшылары пайда болмаса). Тәбиятта альтернативлик жағдайлардың болмайтуғынлығына итибар беремиз. Бундай жағдайда (тек усы жағдайда) теңлемелер системасын тек бир рет интеграллаў ҳәм тек басланғыш шәртлерге байланыслы болған интеграллаў константасын алыў мүмкин:

$$\sum_{i}\sum_{j} 2\alpha_j \dot{q}_{ji}^2 - L = const = E. \qquad (3)$$

Бул аңлатпада *j* арқалы денениң индекси, ал *i* арқалы координатаның индекси белгиленген. Бул ўақыттың өтиўи менен байланыслы болған константаны системаның энергиясы деп атайды. (3)-аңлатпа болса энергияның анықламасы болып табылады. Илгерилемели қозғалыс ушын аңлатпаны түсиндириў аңсат болатуғындай түрде жазыў мүмкин:

$$\sum_{i}\sum_{j} m_j V_{ji}^2 - L = const = E.$$

Кеплер мәселеси орайға қарата симметриялы болған майдандағы қозғалыслардың дара жағдайы болып табылады. Бундай қозғалысларда потенциал энергия бир бири менен тәсирлесетуғын объектлер арасындағы қашықлықтың скаляр функциясы болып табылады. Егер сырттан басқа күшлер тәсир етпесе, онда усы денелердиң массаларының орайы инерциаллық есаплаў системасы болып табылады ҳәм сонлықтан оны (орайды) координаталар басы деп сайлап алыў қолайлы болады. Усының менен бирге, егер бир денениң массасын екинши денениң массасынан әдеўир үлкен ҳәм оны массалар орайында тынышлықта тур деп есапласақ, онда тек масштаб ғана өзгериске ушырайды, ал қозғалыўшы денениң траекториясы өзгермейди (бул жағдай өзгериўшилерди сызықлы түрде алмастырыўдың нәтийжеси болып табылады).

Орайлық симметриядан келип шыққан ҳалда Лагранж функциясын ҳәм энергияны поляр координаталарда жазған қолайлы:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = U(r);\;\; E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = const.$$

Үшинши координатаға итибар бермеўге болады. Себеби бир бирине салыстырғандағы тезлик векторы ҳәм орай арқалы өтетуғын жалғыз тегисликти сайлап алғанда координаталар сайлап алынған тегисликтиң шеклеринен ҳеш ўақытта да шығып кетпейди (себеби бул мәселеде усы тегисликке нормал бағытланған күшлер де, күшлердиң қураўшылары да жоқ).

Мүйеш ушын жазылған (2)-теңлеме (қозғалыс теңлемеси) $mr^2\ddot{\varphi} = 0$ түрине ийе ҳәм ўақыт бойынша аңсат интегралланады:

$$mr^2\dot{\varphi} = const = M. \tag{4}$$

Алынған M константасы импульс моменти (қозғалыс муғдарының моменти) атамасына ийе. Қозғалыс моментиниң сақланыў нызамы қәлеген орайға қарата симметриялы майданлар ушын орынланатуғынлығы анық. $r^2\dot{\varphi}$ шамасы болса траекторияның майданын басып өтиў тезлиги болып табылады. Сонлықтан (4)-аңлатпа Кеплердиң II нызамының басқашалаў формулировкасы болып табылады.

(4)-аңлатпаны есапқа алған ҳалда энергияның сақланыў нызамын басқаша түрде көширип жазамыз:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r).$$

Бул аңлатпада

$$U_{eff}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} + U(r)$$

түриндеги белгилеў қолланылған.

Радиус бойынша шешим алыў ушын энергияның сақланыў нызамының жәрдеминде еки рет интеграллаўдың орнына бир рет интеграллаў менен шеклениўге болатуғынлығын аңсат аңғарыўға болады:

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U_{eff}(r)\right]}. \tag{5}$$

Квадрат түбирдиң алдында пайда болыўы мүмкин болған минусты жоқ етиўге болады. Себеби поляр координаталар системасында терис мәнисли радиус ҳеш қандай физикалық мәниске ийе болмайды. (4) ҳәм (5) түриндеги жазыўлар ўақытты жоқ етип траекторияның теңлемесин алыўға мүмкиншилик береди:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{M/(mr^2)}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U_{eff}(r)\right]}}$$

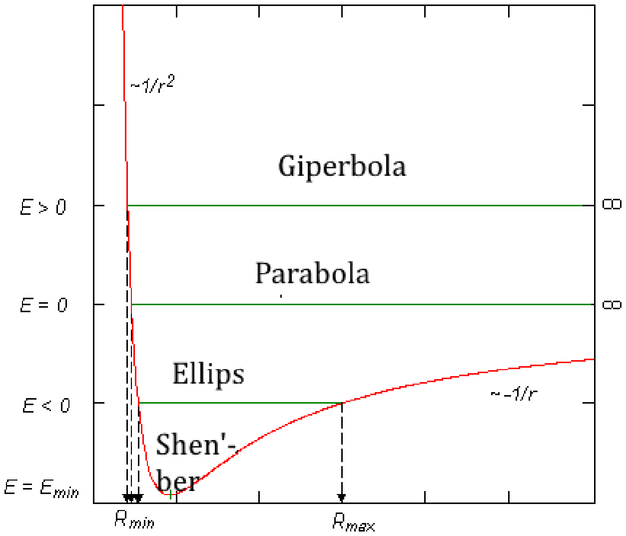
ямаса

$$\varphi = \varphi_0 + \int \frac{M\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{2m\left[E - U_{eff}(r)\right]}}. \tag{6}$$

Мүмкин болған траекторияларды табыў ушын $U_{eff}(r)$ функциясының айқын түрин табыў керек. Пүткил дүньялық тартылыс нызамынан гравитациялық потенциал $U = -a/r$ түрине ийе болады (биз $a = Gm_1m_2$ белгилеўин қабыл еттик). Бундай жағдайда

$$U_{eff}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{a}{r} \tag{7}$$

аңлатпасын аламыз. Бул формуладағы биринши ағзаны "орайдан қашыўшы потенциал" деп атайды. Бул функцияның характерли графиги 1-сүўретте көрсетилген.



1-сүўрет.

$$U_{eff}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{a}{r}$$

функциясының графиги.

1-сүўреттеги иймекликтиң төменинде ҳеш қандай шешимниң болмайтуғынлығы анық көринип тур. Себеби бул жағдай $E < E_{eff}$ теңсизлигине сәйкес келеди, ал бул жағдай (6)-аңлатпадағы квадрат түбирдиң астында турған шама терис мәниске ийе болғанда жүзеге келеди. Иймекликтиң өзин түсиникли фактлер менен байланыслы: киши қашықлықларда орайдан қашыўшы потенциал гравитациялық потенциалдың қасында баслы орынды ийелейди. Оның бөлими орайға шекемги қашықлықтың квадраты менен байланыслы. Бирақ жеткиликли дәрежедеги үлкен қашықлықларда гравитациялық потенциалдың модулиниң әстелик пенен кемейиўине байланыслы оның тәсирин есапқа алмаўға болады. Ҳәр қыйлы белгилерди есапқа алыў сүўретте көрсетилген иймекликтиң өзине тән характерли өзгешеликлерин айқын түрде сәўлелендиреди.

Траекториялардың принципиалық жақтан бир биринен айрылатуғын төрт түриниң бар болыўының мүмкин екенлигин атап айтыў керек: $E > 0, E = 0, E < 0$ ҳәм $E = E_{min}$. Соңғы жағдайда $r = const$, яғный траектория шеңбер болып табылады. Ал импульс моментиниң сақланыў нызамынан орбиталық тезликтиң турақлы екенлигин келип шығады. Бирақ тәбиятта бундай траекторияның жүзеге келиўиниң мүмкиншилиги жоқ. Себеби қәлеген сыртқы тәсир $E < 0$ болған жағдайға алып келеди.

$E > 0$ шәрти үлкен қашықлықларда гравитациялық тәсирлесиўге байланыслы болған потенциал энергиядан әдеўир үлкен болған кинетикалық энергия болатуғын ситуацияға сәйкес келеди. Бундай жағдайда потенциал энергияны есапқа алмаўға болады ҳәм траектория инфинитлик (яғный туйық емес ҳәм шекленбеген). Тек бир минималлық жақынласыў ноқаты бар болады. Денелер тек бир рет жақынласады ҳәм буннан кейин шексизликке ажырасып кетеди. Сәйкес келетуғын траектория гипербола тәризли болады.

$E = 0$ болған парабола тәризли орбитаға сәйкес келиўши жағдай $E > 0$ шәрти орынланатуғын жағдайдан аз айрылады. Бул жағдайда системаның толық энергиясы нолге тең. Сонлықтан тәбиятта бундай жағдайдың жүзеге келиўиниң итималлығы нолге тең.

$E < 0$ теңсизлиги орынланатуғын жағдай ең қызықлы жағдай болып табылады ҳәм ең жақын келиў ноқаты да, ең алыслаў ноқаты да орын алады. Бул жағдай эллипс тәризли орбитаға сәйкес келеди. Бундай байланысқан ҳалды денелер өзинше (яғный сырттан энергия алмай) өзгерте алмайды. Тап сол сыяқлы бундай ҳалға денелердиң өз-өзинен өтиўи де мүмкин емес (системаға энергия берилмейди).

Ең ақырында орайға қулап түсиўдиң де мүмкин емес екенлигин атап өтемиз (бундай қубылыстың жүзеге келиўине орайдан қашыўшы потенциал кесент береди). Демек, егер максималлық жақынласыў ноқаты бир бири менен тәсирлесетуғын объектлердиң радиусларынан киши болған жағдайларда ғана денелердиң соқлығысыўы мүмкин. Бирақ бундай жағдайдың орын алыўы жүдә сийрек ушырасады.

Енди (7)-эффективлик потенциалдың анық түрин бериў арқалы (6)-теңлемени туўрыдан-туўры интеграллаўға болады. $u = 1/r$ өзгериўшисин алған жағдайда (6)-теңлеме

$$\varphi = \varphi_0 - \int \frac{Mdu}{\sqrt{2m\left[E - U_{eff}(u)\right]}}$$

түрине енеди. Интеграллаў

$$\varphi = \varphi_0 + ArcCos\left(\frac{\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}}}\right)$$

аңлатпасын береди. Қурамалы болмаған түрлендириўлерден кейин алынған аңлатпаны былайынша жаза аламыз:

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cdot Cos(\varphi - \varphi_0). \qquad (8)$$

Бул аңлатпада $p = M^2/m\alpha$ (параметр) ҳәм

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$$

(эксцентриситет) белгилеўлери пайдаланылған. Биз Меркурий планетасы ушын эксцентриситеттиң $e = 0{,}206$ шамасына тең екенлигин атап өтемиз.

Әпиўайы таллаўлар мыналарды береди: $E > 0$ болған жағдайда $e > 1$ гиперболаны аламыз. $E = 0$ болған жағдайда $e = 1$ – параболаға ийе боламыз. $E < 0$ теңсизлиги орынланғанда $e < 1$ шәрти орынланатуғын эллипсти аламыз. Усының менен бир қатарда шеклик жағдай да бар. Бундай жағдайда $E = -m\alpha^2/2M^2$ теңлиги орынланады ҳәм эксцентриситет ушын $e = 0$ мәнисин аламыз. Бул шеңбер тәризли траекторияға сәйкес келеди.

Эллипс тәризли траектория жағдайында

$$r_{min} = \frac{p}{1+e} \text{ ҳәм } r_{max} = p/(1-e)$$

теңликлери орын алады. Демек үлкен ярым көшер ушын

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{\alpha}{2|E|},$$

ал киши ярым көшер ушын

$$b = a\sqrt{1 - e^2} = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}$$

аңлатпаларын аламыз.

Импульс моментиниң сақланыўы нызамы, атап айтқанда радиус-вектордың басып өтиў тезлигиниң турақлылығынан [(4)-формула] эллипстиң майданын есаплаў мүмкин: $\varphi = M/2m$, бирақ T ўақыты ишинде барлық майданның басып өтилиўи керек. Демек $S = MT/2m$. Екинши тәрептен эллипстиң майданы $S = \pi ab$ шамасына тең. Буннан айланыўдәўири ушын

$$T = \frac{\pi ab2m}{M} = \frac{2\pi\sqrt{m}}{\sqrt{\alpha}}a^{3/2} = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}$$

теңлигине ийе боламыз. Бул аңлатпа Кеплердиң үшинши нызамына сәйкес келеди.

Координаталардың ўақыттан ғәрезлигин табыў былайынша әмелге асырылады:

Импульс моментиниң сақланыўнызамын

$$M = mr^2\dot{\varphi} = const \tag{9}$$

түринде жазамыз. Бул аңлатпадан $\dot{\varphi}$ шамасын M арқалы аңлатып ҳәм энергия ушын жазылған аңлатпаға қойып

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) \tag{10}$$

аңлатпаларына ийе боламыз. Буннан

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2}} \tag{11}$$

ямаса өзгериўшилерди ажыратып ҳәм интеграллап ўақыт ушын

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2}}} + \mathrm{const} \tag{12}$$

аңлатпасын аламыз. Буннан кейин (9)-теңлемени

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2}dt$$

түринде жазып ҳәм бул аңлатпаға (11)-аңлатпадан dt шамасын қойып ҳәм интеграллап

$$\varphi = \int \frac{(M/r^2)\,dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - M^2/r^2}} + \mathrm{const} \tag{13}$$

формуласына ийе боламыз.

(12)- ҳәм (13)-формулалар улыўма түрде қойылған мәселени шешеди. (13)-аңлатпа $\boldsymbol{r}$ менен φ арасындағы байланысты анықлайды. (12)-аңлатпа болса орайдын қозғалатуғын ноқатқа шекемги қашықлық r ди ўақыттың анық емес функциясы сыпатында анықлайды. φ мүйешиниң ўақыттың өтиўи менен монотонлы өзгеретуғынлығын атап өтемиз. (9)-аңлатпадан $\dot{\varphi}$ шамасының ҳеш қашан белгисин өзгертпейтуғыны көринип тур.

(10)-аңлатпа қозғалыстың радиаллық бөлимин

$$U_{\text{эф}} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} \tag{14}$$

шамасына тең "эффективлик" потенциал энергиясы бар майдандағы бир өлшемли қозғалыс сыпатында қараўға болатуғынлығын көрсетеди. $M^2/(2mr^2)$ шамасын орайдын қашыўшы энергия деп атаймыз.

$$U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} = E \tag{15}$$

теңлиги орынланатуғын r диң мәниси орайдан қашықлығы бойынша қозғалыс областының шегарасын анықлайды. (15)-теңлик орынланғанда радиаллық тезлик $\dot{\varphi}$ нолге айланады. Бул жағдай ҳақыйқый бир өлшемли қозғалыстағыдай бөлекшениң тоқтағанын аңлатпайды. Себеби мүйешлик тезлик $\dot{\varphi}$ нолге тең болмайды. $\dot{r} = 0$ теңлиги траекторияның "бурылыў ноқатын" аңғартады. Бундай ноқатта $r(t)$ функциясы өсиўден кемейиўге ямаса кемейиўден өсиўге өтеди.

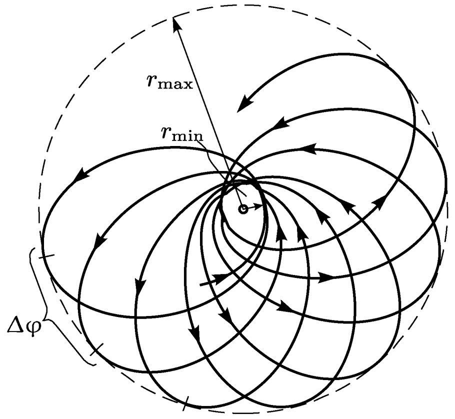
Егер r диң өзгериўиниң мүмкин болған областы тек $r \geq r_{min}$ шәрти менен шекленген болса, онда бөлекшениң қозғалысы инфинитлик болады. Бөлекшениң траекториясы шексизликтен келеди ҳәм шексизликке кетеди.

Егер r диң өзгериўиниң мүмкин болған областы r_{min} ҳәм r_{max} шамаларына тең еки шегараға ийе болса, онда финитлик қозғалысқа ийе боламыз ҳәм траектория толығы менен $r = r_{max}$ ҳәм $r = r_{min}$ шеңберлери тәрепинен шекленген сақыйнаның ишинде болады. Бирақ бул жағдай траекторияның сөзсиз туйық болатуғынлығын аңғартпайды. r диң шамасы r_{max} нан r_{min} ге ҳәм оннан кейин r_{max} ге шекем өзгеретуғын ўақыт ишинде радиус вектор $\Delta\varphi$ мүйешине бурылады. (13)-аңлатпаға сәйкес $\Delta\varphi$ мүйешиниң мәниси

$$\Delta\varphi = 2\int\limits_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{(M/r^2)\,dr}{\sqrt{2m(E-U) - M^2/r^2}} \tag{16}$$

аңлатпасының жәрдеминде есапланады [31].

Траекторияның туйық болыў шәрти бул мүйештиң 2π шамасының рационаллық бөлимине тең болыўына сәйкес келеди. Яғный $\Delta\varphi = 2\pi m/n$ шамасына тең. Бул аңлатпана m менен n леп пүтин санлар. Бундай жағдайда усы ўақыт аралығы n рет қайталанғанда ноқаттың радиус-векторы m дана айланып өзиниң ең дәслепки мәнисине қайтып келеди, яғный траектория туйықланады. Бирақ бундай жағдайдың орын алыўы оғада сийрек болады ҳәм $U(r)$ функциясының ықтыярлы түринде $\Delta\varphi$ шамасы 2π диң рационаллық бөлими болып табылмайды. Сонлықтан улыўма жағдайда финитлик қозғалыстың траекториясы туйық емес (2-сүўрет). Ноқат шексиз көп рет максималлық ҳәм минималлық қашықлықлар арқалы өтеди ҳәм шексиз үлкен ўақыт ишинде еки шегаралаўшы шеңбер арасындағы барлық сақыйнаны толтырады.



2-сүўрет.
Туйық емес финитлик қозғалысқа келтирилген мысал. Бундай жағдайда ноқат шексиз көп рет максималлық ҳәм минималлық қашықлықлар арқалы өтеди ҳәм шексиз үлкен ўақыт ишинде еки шегаралаўшы шеңбер арасындағы барлық сақыйнаны толтырады.

Финитлик қозгалыстың траекториялары туйық болатуғын орайлық майданның еки типи бар. Олар бөлекшениң потенциаллық энергиясы $\frac{1}{r}$ ҳәм r^2 шамаларына пропорционал болған майданлар болып табылады. Биринши жағдай бизиң қараўымыз болған Кеплер мәселесиниң потенциалы болып табылады. Екинши жағдай кеңисликлик осцилляторға сәйкес келеди ҳәм оны биз қарамаймыз.

Биз (12)-улыўмалық аңлатпаның жәрдеминде орбита бойынша қозғалғандағы координаталардың ўақыттан ғәрезлилигин тәрийиплейтуғын формуланы ала аламыз. Ондай формула қолайлы параметрлик түрде былайынша көрсетиледи:

Дәслеп эллипс түриндеги орбиталарды қараймыз. Жоқарыдағыдай жоллар менен a менен e шамаларын киргизип ўақытта анықлайтуғын (12)-интегралды былайынша жазамыз:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{r\,dr}{\sqrt{-r^2 + \frac{\alpha}{|E|}r - \frac{M^2}{2m|E|}}} = \sqrt{\frac{ma}{\alpha}} \int \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2e^2 - (r-a)^2}}.$$

Буннан кейин

$$r - a = -ae\cos\xi,$$

түриндеги орнына қойыў жолы менен бул интеграл

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} \int (1 - e\cos\xi)\,d\xi = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\xi - e\sin\xi) + \mathrm{const}$$

түрине алып келинеди. Бул формуладағы $const$ тың нолге айланыўы ушын ўақыттың басын сайлап алып r диң t дан ғәрезлиги ушын

$$\mathbf{r} = a(1 - e\cos\xi), \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\xi - e\sin\xi)$$

түриндеги формулаларды аламыз ($t = 0$ ўақыт моментинде бөлекше перигелийде жайласқан болады). ξ параметри арқалы бөлекшениң декарт координаталарын да аңлатыўға болады:

$$x = r\ cos\varphi, \quad y = r\ sin\varphi.$$

(x ҳәм y көшерлери эллипстиң сәйкес үлкен ҳәм киши ярым көшерлери бағытында алынған).

Жоқарыда келтирилген аңлатпалар тийкарында

$$ex = p - r = a(1 - e^2) - a(1 - e\cos\xi) = ae(\cos\xi - e)$$

түриндеги қатнаслар аңсат алынады. Бундай жағдайда y ушын $\sqrt{r^2 - x^2}$ аңлатпасының орынлы екенлигин есапқа алып ең ақырында

$$x = a(\cos\xi - e), \quad y = a\sqrt{1 - e^2}\sin\xi$$

формулаларына ийе боламыз. Эллипс тәризли орбита бойынша толық бир айланыў ушын ξ параметрининң нолден 2π ге шекемги өзгериси талап етиледи.

Тап сол сыяқлы есаплаўлар гиперболалық орбита ушын төмендегидей аңлатпаларды береди:

$$r = a(e\,\mathrm{ch}\,\xi - 1), \qquad t = \sqrt{ma^3/\alpha}\,(e\,\mathrm{sh}\,\xi - \xi),$$
$$x = a(e - \mathrm{ch}\,\xi), \qquad y = a\sqrt{e^2 - 1}\,\mathrm{sh}\,\xi,$$

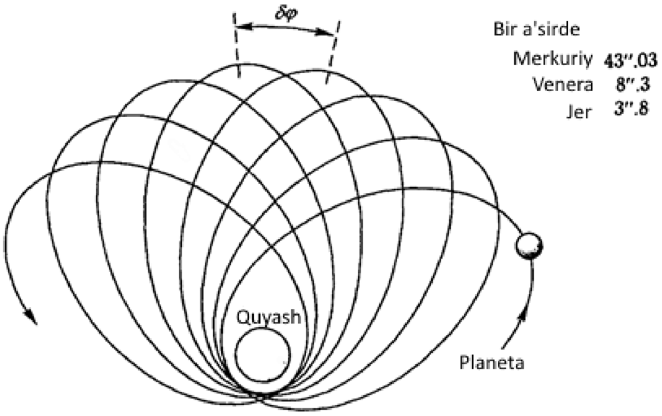
Бул аңлатпаларда ξ параметри -∞ ден +∞ ге шекем өзгереди.

Релятивистлик физикадағы Кеплер мәселеси. 1905-жылы арнаўлы салыстырмалық теориясын дөретип болғаннан кейин Альберт Эйнштейн тартылыс теориясының релятивистлик вариантын дүзиўдин зәрүрлигин мойынлады. Себеби Ньютонның теңлемелери Лоренц түрлендириўлерин қанаатландырмады, ал Ньютон гравитациясының тарқалыў тезлиги шексиз үлкен болды. 1907-жылы жазылған хатларының биринде Эйнштейн төмендегидей жағдайды атап өтти:

Ҳәзирги ўақытлары мен салыстырмалық теориясының позицияларында турып тарлытыс нызамын изертлеў менен шуғылланып атырман. Бул жумыс маған Меркурий планетасының орбитасының әсирлик аўысыўын түсиндириўге мүмкиншилик береди деп үмит етемен.

Релятивистлик тартылыс теориясының ең дәслепки вариантларын 1910-жыллардың басында Макс Абрахам, Гуннар Нордстрём ҳәм Эйнштейнниң өзи баспадан шығарды. Абрахамда Меркурийдиң перигелийиниң аўысыўы бақлаўларда алынған шамадан үш еседей киши болып шықты. Нордстрёмның теориясына ҳәтте аўысыўдың бағыты ушын да дурыс емес нәтийже алынды. 1912-жылғы Эйнштейнниң версиясы бақлаўларда алынған шаманың үштен бириндей шамаға киши мәнис алынды.

1913-жылы Эйнштейн және бир қәдем алға илгериледи – скаляр гравитациялық потенциалдан тензорлық көриниске өтти. Бул математикалық аппарат кеңислик-ўақыттың евклидлик емес метрикасын тәрийиплеўге мүмкиншилик берди. 1915-жылы болса Эйнштейн өзиниң тартылыс теориясының ең соңғы вариантын баспадан шығарды ҳәм сол вариант "улыўмалық салыстырмалық теориясы" атамасына ийе болды. Бул теорияда үлкен массаға ийе денелердиң қасында кеңислик-ўақыттың геометриясы евкилидлик геометриядан сезилерликтей ажыралады. Бул жағдай планеталардың қозғалысының классикалық траекторияларынан аўысыўға алып келеди. 1915-жылы 18-ноябрь күни Эйнштейн бул аўысыўды жуўық түрде есаплады ҳәм астрономиялық бақлаўларда алынған бир әсир даўамындағы 43'' шамасына дәл сәйкес келетуғын мәнисти алды. Усы шаманы алғанда константалардың мәнислерин өзгертиўге зәрүрлик болмаған ҳәм шамалар ықтыярлы түрде өзгертилмеген.



3-сүўрет. Планеталардың перигелийлериниң әсирлик аўысыўын түсирдиретуғын схема (аўысыў мүйешиниң мәниси үлкейтилген).

Арадан еки ай өтпей атырып Карл Шварцшильд тәрепинен Эйнштейн теңлемелериниң дәл шешими алынды (яғный 1916-жылы январь айында). Бул жумыста планеталардың перигелийлериниң қосымша аўысыўға ушырайтуғынлығы көрсетилди. Егер M арқалы Қуяштың массасы, c арқалы жақтылықтың тезлиги, A арқалы планетаның орбитасының үлкен ярым көшери, e арқалы орбитаның эксцентриситети, T арқалы планетаның Қуяштың дөгерегиндей айланыў дәўири белгиленген болса, онда улыўмалық салыстырмалық теориясында планета Қуяштың дөгерегинде бир рет айланғанда перигелийдиң радианлардағы бурылыўы

$$\delta\varphi \approx \frac{6\pi GM}{c^2 A(1-e^2)} = \frac{24\pi^3 A^2}{T^2 c^2 (1-e^2)}$$

шамасына тең болады екен. Бул формула Меркурий планетасы ушын 100 жылда 42,98'' шамасын береди. Бул шама астрономиялық бақлаўларда алынған шамаға дәл сәйкес келеди.

1919-жылға шекем (усы жылы Артур Эддингтон жақтылықтың гравитациялық аўысыўын ашты) Меркурийдиң перигелийиниң аўысыўы Эйнштейн теориясының дурыс екенлигиниң жалғыз тастыйықланыўы еди. 1916-жылы Гарольд Джеффрис улыўмалық салыстырмалық теориясының дурыс екенлигине гүмәнның бар екенлигин билдирди. Себеби теория Ньюком тәрепинен көсетилген Венера планетасының түйинлериниң аўысыўын түсиндире алмады. Бирақ 1919-жылы Джеффрис өзиниң пикирлеринен бас тартты. Жаңа мағлыўматлар бойынша Эйнштейн теориясына қайшы келетуғын Венераның қозғалысында қандай да бир өзгешеликлер табылмады.

Қалай деген менен улыўмалық салыстырмалық теориясын әшкаралаў 1919-жылдан кейин де даўам етти. Базы бир астрономлар Меркурийдиң перигелийиниң әсирлик аўысыўы ушын алынған эксперименталлық ҳәм теориялық мағлыўматлардың бир бирине сәйкес келиўин тосыннан болған ўақыя деп түсиндириўге тырысты. Бирақ ҳәзирги заманларда алынған дәл мағлыўматлар улыўмалық салыстырмалық теориясы берген муғлыўматлардың дурыс екенлигин айқын түрде тастыйықлады.

Улыўмалық салыстырмалық теориясының формуласы PSR B1913+16 қос жулдыз-пульсарында тексерип көрилди. Бул системада массалары Қуяштың массасы менен барабар болған еки жулдыз бир бирине жақын қашықлықларда айланады. Соның ушын ҳәр қайсысының пиастры (перигелийдиң аналогы) аўысыўға ушырайды. Бақлаўлар ҳәр жыллық аўысыўдың 4,2 градусқа тең екенлигин көрсетти ҳәм бул шама улыўмалық салыстырмалық теориясы беретуғын шамаға толық сәйкес келеди.

Спектраллық сызықлардың қызылға аўысыўы (гравитациялық қызылға аўысыў). Улыўмалық салыстырмалық теориясы үлкен массаға ийе денелердиң қасындағы нурланыўларда спектраллық сызықлардың басқа орынлардағы нурланыўлардың спектр сызықларына салыстырғанда төменги жийиликлер тәрепке қарай жылысатуғынлығын болжайды. Бул нәтийже улыўма болған мынадай тастыйықлаўдың дара жағдайы болып табылады: үлкен массаға ийе денелердиң қасында жүзеге келетуғын барлық процесслер әстеленген. Спектраллық жийиликтиң өзгериси Ньютон потенциалына пропорционал, демек үлкен массаға ийе денениң орайына шекемги қашықлыққа кери пропорционал. Жийиликлердиң усындай болып өзгериўин гравитациялық қызылға аўысыў деп атайды. Себеби жийиликтиң киширейиўи реңди қызыл тәрепке қарай жылыстырады. Басқа себеплерге байланыслы спектрдеги сызықлардың қызылға қарай аўысыўы да, фиолет тәрепке қарай аўысыўы да мүмкин. Мысалы жақтылықтың дереги бақлаўшы тәрепке қарай тез қозғалғанда фиолетке қарай жылысыў орын алады ҳәм бундай қубылысты Допплерлик аўысыў (ямаса Допплер эффекти) деп атайды. Келбетлик сыпатында қолланылған "Гравитациялық" сөзи жақтылық дерегиниң күшли гравитациялық майдан пайда ететуғын үлкен массалы денениң қасында турғанлығын атап көрсетеди. Ал 1960-жылы Гарвард университетинде ислеўши Р.Паунд ҳәм Ребкалар тәрепинен Жердиң гравитациялық майданы себепли пайда болған қызылға аўысыў лабораториялық шараятларда жүзеге келтирилди. Усы ўақытларға шекем қызылға аўысыў жүдә тығыз болған жулдызлардың қатарына кириўши ақ иргежейлилердиң спектринде бақланған еди. Бул эффект Қуяштың спектринде де бақланды.

Егер жақтылықтың дегерин жүдә қысылған массаға жақынлатсақ, онда жийиликтиң киширейиўи гравитациялық радиусқа жақын келгенде тербелислердиң толық тоқтаўы менен жуўмақланған болар еди.

Биз ҳәзир қарап атырған мәселе есаплаў системасының тезлениўши қозғалысына байланыслы мәселелердиң қатарына киреди. Тезлениўдиң есаплаў системаларына тәсири 1907-жылы А.Эйнштейн тәрепинен арнаўлы салыстырмалық теориясының шеклеринде изертленген еди. Сонлықтан бул параграфта талланып атырған мәселе арнаўлы салыстырмалық теориясында да, улыўмалық салыстырмалық теориясында да бар мәселе болып табылады.

Бул эффектлердиң биринshиси – ўақыттың гравитациялық әстелениўи бойынша гравитациялық шуқыр қаншама терең болса сааттың жүриўи де соншама әстеленеди. Бул эффекттиң орын алатуғынлығы көп санлы экспериментлерде тастыйықланды ҳәм Жердиң жасалма жолдасларының навигациясы системаларында есапқа алынады. Егер бул эффект есапқа алынбағанда ҳәр суткада (күнде) онлаған микросекунд қәтелик кеткен болар еди.

Пайдаланылған әдебиятлар дизими

1. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теоретическая физика. Учебное пособие для вузов. В. 10 т. Том II. Теория поля. 8-е издание. Издательство "ФИЗМАТЛИТ". Москва. 2003. 536 с.

Глава XII. §§ 99-101.

2. Lewis Ryder. Introduction to General Relativity. Cambridge University Press. 2009. 441 p.

8-лекция. Қара қурдымлар. Космология. Эйнштейн теңлемелериниң Фридман шешимлери. Фридман моделлери. Хаббл нызамы. Үрлениўши (инфляциялық) Әлем модели

Шварцшильд шешими ҳаққында. А.Эйнштейн өзиниң гравитация теңлемелерин баспадан шығарғаннан кейин бир неше айдан соң немис астрономы Карл Шварцшильд (немисше Karl Schwarzschild, 1873-1916) бул теңлемелердиң ең биринши дәл шешимлерин ала алды. Бул шешим аппроксимация емес ҳәм майданлардың "күши" ямаса "әззилиги" ҳаққында ҳеш бир болжаўға ийе емес еди.

Шварцшильд шешими бир сфералық массаның усы массаны қоршап турған кеңисликтеги гравитациялық майданын тәрийиплейди. Бул массадан жеткиликли дәрежелердеги қашықлықларда шешимлер классикалық тартылыс нызамының шешимине өтеди (яғный қашықлықтың квадартына кери пропорционал болған шешимге айланады). Ал гравитациялық майданның дереги үлкен емес өлшемлердеги ҳәм үлкен емес тығызлықтағы аспан денеси болып табылатуғын болса, онда Шварцшильд шешими менен Ньютон бойынша шешим арасында айырма болмайды. Тек гравитация майданының дерегиниң массасы жүдә киши көлемде тығызланған болған жағдайларда ғана денениң бетинде "күшли" гравитациялық майданлар пайда болады, астрономиялық бақлаўларда табылыўы мүмкин болған жаңа қызықлы қубылыслар жүзеге келеди.

Шварцшильд шешиминде оның аты менен аталатуғын метрика ең әҳмийетли орынды ийелейди. Шварцшильд метрикасы бос кеңисликтеги космологиялық константаға ийе Эйнштейн теңлемесиниң сфералық симметрияға ийе дәл шешими болып табылады. Мысалы бул метрика айланбайтуғын ҳәм электр зарядына ийе емес қара қурдымның ҳәм сфералық симметрияға ийе үлкен массаға ийе болған (ҳәм басқа денелерден үлкен қашықлықларда турған) денениң гравитациялық майданын тәрийиплейди.

Бул шешим статикалық шешим болып табылады. Сонлықтан сфералық гравитациялық толқынлардың болыўы мүмкин емес.

Шварцшильдтиң естелигине байланыслы Берлин илимлер академиясында өткерилген мәжилисте А.Эйнштейн Шварцшильдтиң жумысларын былайынша баҳалады:

"Шварцшильдтиң теориялық жумысларында изертлеўдиң математикалық усылларын толық исеним менен пайдаланыўы ҳәм оның астрономиялық ямаса физикалық машқаланың мәнисине қандай жеңил жететуғынлығы ҳайран қалдырады. Жүдә терең математикалық билим ондағы дурыс мәни бериў менен ойлаўдың жумсақлығы сийрек ушырайды. Усындай қәсийет оған басқа изертлеўшилерди өзиниң математикалық қыйыншылықлары менен қорқытқан әҳмийетли теориялық жумысларды орынлаўға мүмкиншилик берди".

Шварцшильд координаталары деп аталатуғын (t, r, θ, φ) координаталарында (бул координаталардың кейинги үшеўи үш өлшемли кеңисликтеги сфералық координаталарға сәйкес келеди) метрлик тензор былайынша жазылады:

$$g = \begin{bmatrix} 1-\frac{r_s}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1-\frac{r_s}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}.$$

Бундай метрикадағы интервалды былайынша жазады:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} - r^2 \left(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2\right),$$

Бул формулада $r_s = 2\frac{GM}{c^2}$ шамасын Шварцшильд радиусы ямаса гравитациялық радиус деп атайды. M арқалы гравитациялық майданды пайда ететуғын дененин массасы, G арқалы гравитация турақлысы, ал c арқалы жақтылықтың тезлиги белгиленген. Бундай жағдайда координаталар төмендегидей областларда өзгереди:

$$-\infty < t < \infty, r_s < r < \infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Усының менен бирге $(t, r, \theta, \varphi = 0)$ ҳәм $(t, r, \theta, \varphi = 2\pi)$ ноқатлары бирдей (әдеттеги сфералық координаталардағыдай).

Шварцшильд радиусының физикалық мәниси екинши космослық тезликтиң мәниси жақтылықтың вакуумдағы тезлигине тең болатуғын жағдай ушын $\frac{mc^2}{2} = G\frac{mM}{r}$ формуласынан келип шығатуғын r диң мәнисине тең. Қуяш ушын $r_s = 2\frac{GM_{\odot}}{c^2} \approx 3\ km$, ал Жер ушын $r_s = 2\frac{GM_{\oplus}}{c^2} \approx 0{,}9\ sm$.

r координатасы радиус-вектордың узынлығы емес, ал усы метрикада $t = const, r = r_0$ болған сфераның бетиниң майданы $4\pi r_0^2$ шамасына тең болатуғындай етип алынады. Бундай жағдайда ҳәр қыйлы r лерге ийе (бирақ басқа координаталары бирдей болыўы керек) еки ўақыя арасындағы "қашықлықтың" шамасы

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}} > r_2 - r_1, r_2, r_2 > r_s.$$

интегралының жәрдеминде бериледи.

Метриканың өзине тән өзгешеликлери $\boldsymbol{r = 0, r = r_s}$ болған ноқатларда айқын түрде көринеди. Ҳақыйқатында да Шварцшильд координаталарында денеге түсип баратырған бөлекшениң $\boldsymbol{r = r_s}$ бетине жетемен дегенше шексиз үлкен ўақыт $\boldsymbol{t}$ керек болады. Бирақ денеге түсип баратырған бөлекшеде жайласқан бақлаўшы ушын (буны еркин түсиўши бөлекше менен бирге жүриўши есаплаў системасындағы Леметр координаталарында деп атаймыз) сол беттеги кеңислик-ўақыттың ҳеш қандай айрықша өзгешеликлери болмайды. Сонлықтан еркин түсиўши бақлаўшы беттиң өзине де, $\boldsymbol{r \approx 0}$ болған областқа да шекли ўақыттың ишинде барып жетеди.

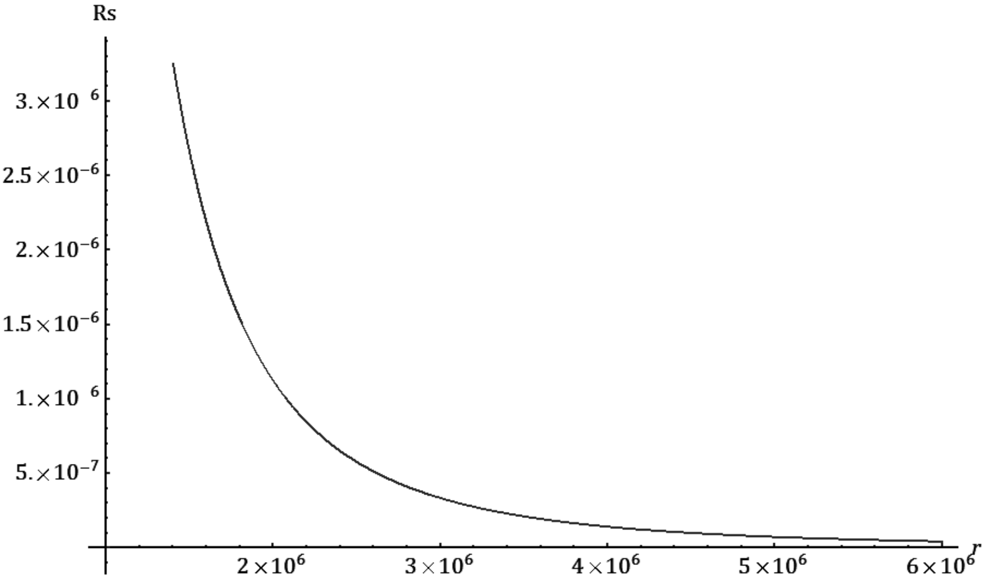
Шварцшильд метрикасының ҳақыйқый өзгешелиги $r \to 0$ шегинде орын алады. Бул ноқатта кыйсықлық тензорының скаляр инвариантлары шексизликке умтылады. Бул өзгешеликти (оны сингулярлық деп атаймыз) координата системасын өзгертиў жолы менен жоқ етиўге болмайды.

$\boldsymbol{r = r_s}$ бети ўақыялар горизонты деп аталады.

Координаталарды сәтли түрде сайлап алғанда (мысалы Леметр ямаса Крускала координаталарында) қара қурдымлардан ўақыялар горизонты арқалы ҳеш қандай сигналдың сыртқа шығыўының мүмкин емес екенлигин көрсетиўге болады. Бундай мәнисте Шварцшильд қара қурдымынан тыста майданның тек бир параметрден – дененин толық массасынан ғәрезли екенлиги таң қаларлық емес.

Күшли майданлар дегенимиз не? Аспан денелери Жердиң бетиндеги денелерге салыстырғанда жүдә үлкен, ал Жердиң өзи қозғалмайтуғын жулдызларға салыстырғанда жүдә киши. Ал қозғалмайтуғын жулдызлардың өзи галактикаларға салыстырғанда ҳеш нәрсе де емес. Бул жағдайлар Жердиң бетиндеги гравитациялық майданның басқа да гравитациялық майданлар ушын ҳеш қашан да стандарттың бола алмайтуғынлығын көрсетеди. Бирақ қәлеген жағдайда физика илими ушын гравитациялық майданның шамасы ғана емес (яғный берилген ноқаттағы сынап көрилетуғын дененің тезлениўи емес), ал гравитация майданының бар болыўының салдарынан пайда болатуғын қыйсықлық үлкен әҳмийетке ийе болады (1-сүўрет).

Кеңислик-ўақыттың қыйсықлығы жөнинде толығырақ және әпиўайы мағлыўматларды беремиз. Егер кеңислик радиусы r ге тең болған сфера болып табылатуғын болса, онда оның бетиндеги үш мүйешликтиң ишки мүйешлериниң қосындысы Σ шамасы π ден үлкен болады. Бундай жағдайда кеңисликтиң қыйсықлығы деп $C = \frac{\Sigma-\pi}{S}$ шамасына айтады. Бул аңлатпада S арқалы сфераның бетинде сызылған үш мүйешликтиң майданы белгиленген. Енди C шамасының $\frac{1}{r^2}$ шамасына тең екенлигин аңсат дәлиллеўге болады. Демек сфера тәризли еки өлшемли кеңисликтиң қыйсықлығы оның радиусының квадратына кери пропорционал болады екен. Ал улыўма жағдайда кеңислик-ўақыттың қыйсықлығы екинши рангалы тензордың жәрдеминде тәрийипленеди.



1-сүўрет. Гравитациялық майданның (кеңислик-ўақыттың) сантиметрлердеги қыйсықлығының шамасының (ордината көшеринде) радиус бойынша қашықлықтан (абсцисса көшеринде сантиметрлерде) ғәрезлиги.

Өз гезегинде қыйсықлықты қыйсықлық радиусының жәрдеминде тәрийиплеўге болады (қыйсықлық радиусы деп тап сондай қыйсықлыққа ийе сфераның радиусына тең шаманы айтамыз). Қыйсықлықтың шамасы киши болса оның радиусы үлкен болады. Биз қарап атырған объекттиң геометриялық өлшемлерине салыстырғанда қыйсықлық радиусы онша үлкен болмаса, онда тартысыў (гравитация) майданын күшли деп есаплаймыз. Егер Жердиң барлық массасын бир ноқатқа жыйнасақ, онда тартылыс майданы орайға жақынлаған сайын күшли болады Кеңислик-ўақыттың қыйсықлығының радиусы орайға 1 см ге шекем жақынласады (биз жоқарыда Жер ушын $r_s = 2\frac{GM_\oplus}{c^2} \approx 0,9\, sm$ екенлигин есаплаған едик). Тап сондай жоллар менен Қуяшты да қыссақ, онда орайдан 3 км қашықлықта қыйсықлық сезилерликтей мәниске ийе болады. Еки жағдайда да қыйсықлық радиусы Шварцшильд радиусына (ямаса гравитациялық радиусқа) тең болады. Қыйсықлығының шамасы Шварцшильд радиусына тең болғанда алынатуғын сфераны (яғный радиусы Шварцшильд радиусына тең болған сфераны) Шварцшильд сферасы деп атайды.

Гравитациялық радиус түсинигине басқаша да қараўға болады. Анықламасы бойынша екинши космослық тезликти (яғный космослық кораблдиң Жерди таслап кетиўи ушын жеткиликли болған тезлик) Жер – космос корабли системасы ушын толық энергияның нолге тең болыў шәрти менен анықлайды:

$$\frac{mv^2}{2} = G\frac{mM}{R}.$$

Бул аңлатпада m арқалы космос кораблиниң массасы (ол қысқарып кетеди), M арқалы Жердиң массасы, ал R арқалы әдетте Жердиң радиусы белгиленген. Бундай жағдайда $v = 11{,}2$ км/с шамасын аламыз. Ал $R = 0{,}9$ см болған жағдайда $v = c$ теңлигине ийе боламыз.

Квазарлар Әлемниң бақланатуғын бөлиминдеги ең жақтылы объектлер болып табылады. Оның нурланыўының қуўаты Қус жолы сыяқлы галактикалардағы барлық жулдызлардың қуўатлықларының суммасынан онлаған ҳәм жүзлеген есе үлкен. Квазарларды жүдә қуўатлы ҳәм алыстағы галактикалардың актив ядролары деп есаплайды. Квазарлардың әтирапындағы ата галактиканың излери кейинирек табылды.

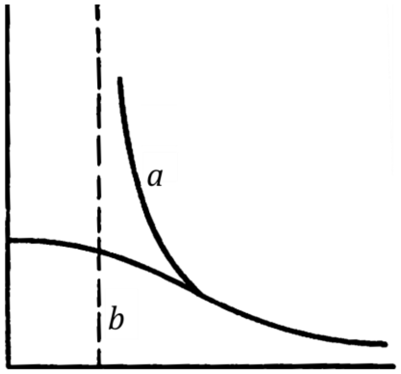
Квазарлар биринши гезекте үлкен қызылға аўысыўға, электромагнит нурланыўға ҳәм жүдә киши мүйешлик өлшемлерге ийе объектлер сыпатында көринди. Сонлықтан дәслепки жыллары астрономлар оларды ноқатлық объектлерден – жулдызлардан ажырата алмады.

Квазарлар галактикалардың актив ядролары болып табылады. Ядрода аса үлкен массаға ийе **қара қурдым** жайласқан деп есапланады. Ол аккрецияның салдарынан қоршаған кеңисликтен материяны өзине тартады. Нәтийжеде қара қурдымның массасы үлкейеди ҳәм галактиканың барлық жулдызларының қуўатынан үлкен нурланыў орын алады. Соңғы ўақытлары өткерилген бақлаўлар квазарлардың көпшилигиниң оғада үлкен эллипс тәризли галактикалардың орайларының қасында жайласқан екенлигин көрсетти.

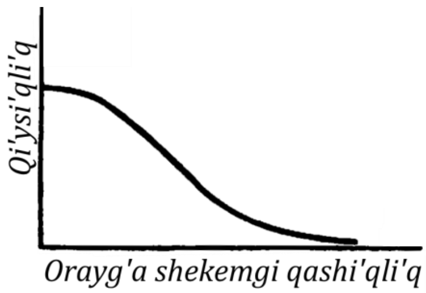
Айырым теорияларда квазарларды өзиниң раўажланыўының дәслепки дәўириндеги галактикалар деп түсиндиреди. Бул галактикаларда аса үлкен массаға ийе қара қурдым қоршап турған затларды жутады. Соңғы ўақытлары нурланыўдың дерегин аса үлкен массаға ийе қара қурдымның аккрециялық диски деп есапланбақта. Сонлықтан квазарлардың спектраллық сызықларының қызылға аўысыўы улыўмалық салыстырмалық теориясындағы гравитациялық аўысыў менен байланыслы.

Ҳәзирги ўақытлары квазарларға шекемги қашықлықлар ҳәм олардың өлшемлери бойынша бир қатар мағлыўматлар қолға киргизилген. Усыған байланыслы квазарлардың әтирапындағы кеңислик-ўақыттың қыйсықлығы жөнинде исенимли мағлыўматлар бар.

Шварцшильд сферасының ишинде. Сыртта (алыста) жайласқан бақлаўшы алатуғын мағлыўматлар бойынша бөлекше ҳеш ўақытта да Шварцшильд сферасына жете алмайтуғын ҳәм ҳеш бир жақтылық сигналы шекли ўақыт ишинде бул сфераны кесип өте алмайтуғын болса да еркин түсиўши бақлаўшыға Шварцшильд сферасының ишиндеги областқа өтиў ушын оның меншикли ўақытында шекли ўақыт керек болады. Усы жағдайға байланыслы еркин түсиўши бақлаўшыны сфераның ишинде қандай жағдайдың күтип туратуғынлығын билиў қызықлы мәселелердиң бири болып табылады. Бул жөнинде теорияның нени айтатуғынлығын билип алыўымыз керек. Биз қарап атырған жағдайды гравитацияны пайда етиўши масса жүдә қысылған ҳәм сонлықтан Шварцшильд сферасы денениң сыртында бос кеңисликте орналасқан. Әдеттегидей аспан денелеринде Шварцшильд сферасының бар екенлигине байланыслы болған ҳеш бир қубылыс бақланбайды. Бул жағдайды иллюстрациялаў мақсетинде 2-сүўретте еки жағдай ушын қызылға аўысыўдың шамасының ғәрезлилиги көрсетилген: массаның барлығы бир ноқатта топланған (а) ҳәм масса Шварцшильд сферасынан сыртқа шығатуғын шекли көлемде топланған (б). Шварцшильд сферасы өтетуғын районда зат кеңисликте тарқалған болғанлықтан бақлаўларды өткериўге (әсбапларды алып барыўға) механикалық жақтан кесент бериўи мүмкин. Бирақ мәселе онда емес. Ҳәтте аспан денеси арқалы тоннель қазған жағдайда да Шварцшильд сферасы өтетуғын районда ҳеш қандай таң қаларлық қубылыс бақланбаған болар еди. Себеби денени пайда ететуғын затлардың барлығы денениң ишки областындағы қыйсықлықты пайда етиўге қатнаспайды. 3-сүўретте сфера бойынша жайылған заттың орайына жақынлағанда қыйсықлықтың үлкейиўи көрсетилген. Усы сүўретти заттың массасының барлығы орайда деп есапланып соғылған 1-сүўрет пенен салыстырыў керек.

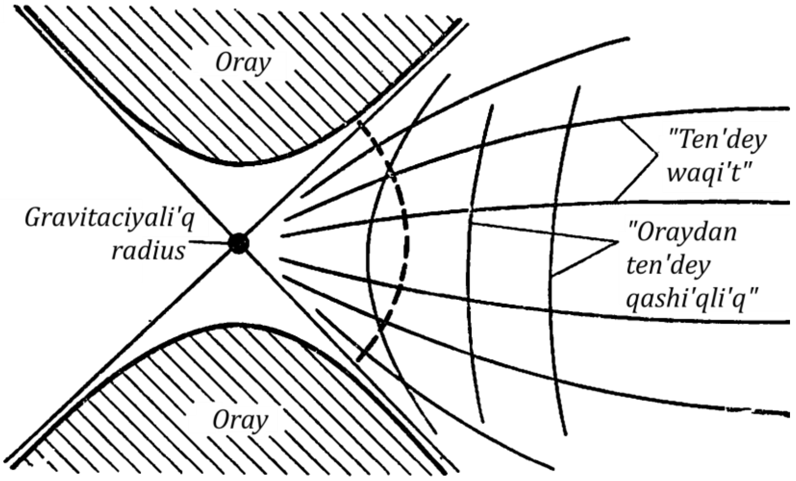


2-сүўрет. Қызылға аўысыўдың қашықлықтан ғәрезлиги.



3-сүўрет. Өлшемлери үлкен денениң кеңислик-ўақытының қыйсықлығы.

4-сүўретте зат орайда топланған жағдай сәўлелендирилген. Бундай схеманың барлық жағдайда да идеалластырылған сүўретти беретуғынлығы анық. Сүўретте орай арқалы өтетуғын тек бир радиаллық бағыт болған кеңисликлик бағыт ҳәм бир ўақытлық бағыт көрсетилген. Бул сүўретте өзгермели масштаб сайлап алынған. Сонлықтан ҳәр бир ңоқаттағы сыртқа ямаса ишке қарай тарқалатуғын нур вертикал бағытқа 45^0 лық мүйеш жасап бағытланған туўрының жәрдеминде көрсетиледи. Усы биссектрисалар ҳәм вертикаллық бағыт арасында жайласқан қәлеген бағыт ўақытқа мегзес. Бул биссектрисалардан қыялығы киши болған қәлеген бағыт кеңисликке мегзес. Орайдан қашықлықлары бирдей болған ноқатлар вертикаллық сызықларда емес, ал гипербола тәризли иймекликлерде жайласады. "Бир ўақытта" жүзеге келетуғын ўақыяларды беретуғын ноқатлар бир ноқат арқалы өтетуғын иймекликтиң бойынша жатады. Бул айрықша ноқат барлық шекли ўақытлар ушын Шварцшильд сферасының радиусын береди. Бул ноқаттан шығатуғын ҳәм оң тәрепке қарай 45^0 қа бағытланған еки сызық шексиз алыстағы болажақтағы ҳәм шексиз үлкен өтмиштеги Шварцшильд сферасының радиусы болып табылады. Бул еки сызық Шварцшильд сферасына салыстырғандағы сыртқы область деп есаплаў мүмкин болған кеңислик-ўақыттың сегментин шеклеп турады. Бул еки тәреплеме сигнал жибериў арқалы сырттан бақлаў мүмкин болған область болып табылады.



4-сүўрет. Шварцшильд сферасының қасындағы геометрия

Пунктир менен бөлекшениң дүньялық сызығы болып табылатуғын иймеклик белгиленген. Қәлеген ноқатта бул иймекликтиң қыялығы ўақытқа мегзес бағытқа ийе. 4-сүўреттеги графикалық шеклерге байланыслы бул траектория тек радиаллық қозғалысқа сәйкес келеди (орайға қарай ҳәм орайдан қарама-қарсы бағытта). Траекторияның бир бөлими Шварцшильд сферасынан тыстағы еки тәреплеме мүмкин болған (барыў мүмкин болған) область арқалы өтеди. Бул областта орналасқан ҳәм r диң турақлы мәнисине сәйкес келиўши иймекликтиң ҳәр қайсысында стационар бақлаўшыны жайластырыўға болады. Усындай қәлеген бақлаўшы материаллық бөлекшениң ықтыярлы бөлимине өзиниң жақтылық сигналын жибере ҳәм кейинирек шағылысқан сигналды қабыл ете алады. Солай етип ол материаллық бөлекше менен еки тәреплеме байланысты әмелге асырыў мүмкиншилигине ийе болады. Бирақ материаллық бөлекшелер Шварцшильд сферасын кесип өтетуғын еки ноқатта еки тәреплеме байланыс үзилиске ушырайды: бир рет сфераға киргенде, екинши рет сферадан сыртқа шыққанда. Бақлаўшы бөлекше Шварцшильд сферасынан шыққан моментти бақлай алады. Бирақ бул сигналды ол өзиниң сигналын жиберип қарсы ала алмайды. Керисинше, бақлаўшы тәрепинен жиберилген сигнал бөлекшеге сол бөлекше сфераның арғы тәрепине (ишине) өткен момент келеди. Бирақ бөлекшениң сфераға киргенлигин дәлиллейтуғын сигналды бақлаўшыға жеткериўдиң ҳеш қандай усылы жоқ.

Шварцшильд сферасының ишинде бир биринен айрылатуғын еки область бар болады. Олардың биреўин "өтмиштиң ишки областы", ал екиншисин "болажақтың ишки областы" деп атаў мүмкин. Стационар бақлаўшы биринши областтағы (өтмиштиң ишки областындағы) ўақыяларды көре ҳәм екинши областқа (болажақтың ишки областына) сигнал жибере алады. Бирақ "болажақтың ишки областына" сигналды жибере, ал "өтмиштиң ишки областын" көре алмайды. "Болажақтың ишки областынан" шыққан сигнал Шварцшильд сферасының сыртына шыға алмайды. Шварцшильд сферасы ишиндеги үшинши областы ҳеш бир сигналдың (еки бағыттағы сигналдың) жәрдеминде пүткиллей көриўге болмайды. 4-сүўреттеги штрихланған областлардың шегаралары ("орай" деп белгиленген) айрықша ноқатқа – "орайға" сәйкес келеди. Бул ноқатты ўақыттың өтиўине байланыслы қараўға болмайды. Себеби Шварцшильд сферасының ишинде ўақыт өзиниң әдеттегидей мәнисине ийе болмайды. Ал сыртқы стационар бақлаўшыға келсек, онда оның Шварцшильд сферасына "қолын жеткериўи" ушын шексиз көп ўақыт керек болады. Ол сфераның ишиндеги ўақыттың қалай өтип атырғанлығын анықлаў ушын сәйкес белги қоя алмайды. Ол Шварцшильд сферасының ишиндеги (яғный ўақыялар горизонты ишиндеги) нәрселерден изоляцияланған ҳәм сонлықтан сфераның ишиндеги бақлаўшы менен сигналлар жибериў жолы ямаса басқа да усыллар менен байланыса алмайды.

Ал Шварцшильд сферасы арқалы өтиўши ҳәм буннан кейин оның орайына қарай кетиўши бақлаўшы нелерди көреди? деген сораў туўылады. Жоқарыда айтылып өтилгениндей, ол сфераның бетине шекли ўақыттың ишинде келип жетеди, оның қолындағы саат саяхат басланған ўақыт моментинен баслап өткен ўақытты көрсетеди. Сфераның ишки областына өтиўден баслап ол сыртқы областты көре алмайды (сыртқы қарай сигнал жибериў мүмкиншилигине ийе болса да). Ол Шварцшильд сферасын кесип өткенде әдеттегидей емес ҳеш бир өзгеристи бақламайды. Бирақ бақлаўшы орайға жақынлаған сайын кеңислик-ўақыттың қыйсықлығы үлкейе баслайды, бақлаўшы орайға жеткенде қыйсықлықтың мәниси шексиз үлкен болады. Сонлықтан орайлық бөлим бақлаўшыға барлық қәсийетлери бойынша аномаллық болып көринеди. Бақлаўшы жиберген сигналлардың сыртқы шықпайтуғынлығы ҳаққында ол ҳеш нәрсе биле алмайды. Оның көз-қарасы бойынша сыртқы қарай жиберилген сигналлар әдеттегидей кетеди. Сигналлар сыртқы областқа өте алмайды. Себеби бақлаўшыға Шварцшильд сферасының бети жақтылықтың тезлигиндей тезлик пенен қашып баратырғандай болып көринеди. Сонлықтан оның жақтылық сигналлары шегараға жете алмайды. Бирақ шегара (Шварцшильд сферасының бети) айрықша белгилер менен белгиленип қойылмағанлықтан бақлаўшы бул шегараның сыртқа қарай қозғалысын бақлай алмайды. Егер Шварцшильд сферасына түсиўши бақлаўшы сырттығы стационар бақлаўшының саатына қараса, онда ол оның саатының кем-кемнен әсте жүрип атырғанлығын аңғарады. Бирақ сыртта қалған бақлаўшының сааты ҳеш қашан тоқтамайды. Керисинше, сыртқы бақлаўшы өзиниң саатының жүрисиниң кем-кемнен әстеленип атырғанлығын аңғарады ҳәм сол саат Шварцшильд сферасына түсип баратырған бақлаўшының сфераның шегарасы арқалы қашан өткенлигин ҳеш қашан көрсетпейди.

Радиусы гравитациялық радиустан кем болған, туўрыдан-туўры экспериментлерде еле ашылмаған астрономиялық объектлер "**қара қурдымлар**" деп аталады.

2016-жылдың 11-февраль күни Москва, Вашингтон ҳәм Пиза қалаларында бир ўақытта өткерилген пресс-конференцияда халық аралық LIGO коллаборациясы (коллаборация деп улыўмалық мақсетлерге жетиў ушын қандай да бир тараўдағы еки ямаса оннан да көп адамлардың, шөлкемлердиң биргеликтеги жумысына айтамыз) проектиниң (LIGO, инглиз тилинде Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory, гравитациялық-толқынлық обсерватория мәнисин береди) қатнасыўшылары гравитациялық толқынлардың табылғанлығын дағазалады. Гравитациялық толқынды регистрациялаў ўақыясын астрофизикада GW150914 (бул жазыўды "2015-жылы 14-сентябрь күни бақланған гравитациялық толқынлар" деп оқыў керек) ўақыясы деп белгилеў қабыл етилди. Бундай толқынлардың бар екенлиги буннан 100 жыл бурын Альберт Эйнштейн тәрепинен жаңа ғана дөретилген улыўмалық салыстырмалық теориясының (гравитация теориясының) тийкарында болжап айтылған еди. 12-февраль күни болса "Physical Review Letters" журналында сол проекттиң ағзаларының "Observation of Gravitational Waves from a Binaty Black Hole Merger" атамасындағы мақаласы шықты. Бул мақаланың авторларының саны дерлик бир ярым мың. Олар Жер жүзиниң 12 елинде жайласқан 133 университет пенен илимий мәкемелеринде жумыс ислейди. Регистрацияланған гравитациялық толқынларға сәйкес келиўши сигналдың формасы массалары шама менен Қуяштың массасынан 36 ҳәм 29 есе үлкен болған еки қара қурдымның қосылыўының нәтийжесинде пайда болатуғын гравитациялық толқынларға сәйкес келеди. Пайда болған қара қурдымның массасы Қуяштың массасынан шама менен 62 есе үлкен.

Секундтың оннан бир үлесине тең ўақыт ишиндеги нурланған гравитациялық нурлардың энергиясы Қуяштың массасынан 3 есе үлкен массаға эквивалент. Демек, Әлемде қара қурдымлардың бар екенлиги ҳаққындағы гипотеза 2016-жылдан баслап тастыйықланды деп жуўмақ шығарыў керек.

Жердиң "қара қурдым" ға айланыўы ушын оның радиусының қандай болатуғынлығы есаплайық. Мәселени шешиўдиң бир неше жолы бар. Мысалы қара қурдым деп екинши космослық тезликтиң шамасы (яғный параболалық тезликтиң шамасы) жақтылықтың тезлигине тең болған объектти айтыўға болады. Бундай жағдайда параболалық

$$c = \sqrt{2G\,\frac{m}{r}}$$

Бул аңлатпадан қара қурдымның радиусы ушын

$$r = 2G\,\frac{m}{c^2}$$

аңлатпасын аламыз. Егер усы аңлатпаға Жердиң массасын ҳәм жақтылықтың тезлигиниң квадратының мәнислерин қойсақ $r \approx 0.8$ см шамасына ийе боламыз.

Қуяшты қара қурдымға айландырыў ушын оның радиусын 3 км ге шекем киширейтиў керек.

Ескертиў: Радиусы гравитациялық радиусқа тең болған объектлерди қара қурдымлар деп атаўға болмайды. Радиусы гравитациялық радиусқа тең болған сфераның бетин "ўақыялар горизонты" деп атайды. Қара қурдым усы сфераның орайында жайласқан. Оның сызықлы өлшемлерин әдетте нолге тең деп есаплайды. Ўақыялар горизонты арқалы иштен сыртқа қарай ҳеш қандай материя (ямаса сигнал) шыға алмайды (себеби екинши космослық тезлик жақтылықтың вакуумдағы тезлигине тең).

Космологиялық турақлы. Әдетте гравитация теориясы теңлемелерине қойылатуғын улыўмалық талап тәсирге ийе вариациялық принципти

$$s = -mc\int ds - \frac{c^3}{16\pi G}\left[\int R dV + \int 2\Lambda dV\right] \qquad (1)$$

түринде жазыўға руқсат етеди. Бул аңлатпада V арқалы 4 өлшемли көлем берилген. Усындай жағдайда Эйнштейн теңлемелери мына түрге ийе болады:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R - \Lambda g_{ik} = \frac{\chi}{c^2}T_{ik}. \qquad (2)$$

Бул аңлатпадағы Λ космология турақлысы, ал бул шамаға пропорционал болған шамалар (ΛdV, Λg_{ik}) космологиялық ағзалар деп аталады. Λ ағзалары жоқ теңлемелер де қозғалыс теңлемелерин өз ишине алатуғын болғанлықтан (2)-аңлатпада локаллық лоренц-инвариантлылық шәртин қанаатландырады. Сонлықтан бурынғыдай $T^k_{i;k} = 0$.

(2) түриндеги теңлеме 1917-жылы А.Эйнштейнниң «Космология мәселелери ҳәм улыўмалық салыстырмалық теориясы» мақаласында пайда болды. Бул мақаланың 1-бетиниң фрагменти 3-сүўретте берилген. Сонлықтан 1917-жылды ҳәзирги заман космологиясының туўылған жылы деп атаймыз.

А.Эйнштейн дәрҳәл-ақ өзиниң 1915-жылдың ақырына таман толық дүзилген гравитация теңлемесиниң стационар шешимге ийе болмайтуғынлығын түсинди. Ал сол ўақытлары Әлемниң стационар, ўақытқа байланыслы өзгермейди деген пикир ҳүким сүрген еди. Сонлықтан Эйнштейнниң алдында стационар шешимлерге ийе теңлемелер керек болды. Сонлықтан ол өзиниң теңлемесине Λ ағзасын қосып (2) түриндеги теңлемени алды.

Әлбетте Λ ағзаны теңлемеге киргизиўдеги А.Эйнштейнниң алдына қойған мақсет нолге тең емес орташа тығызлық $T_0^0 = \rho c^2 = \mathrm{const}$ қа сәйкес стационар шешим алыў еди. Буның ушын $\Lambda = \frac{8\pi G\rho}{3c^2}$ деп алыў керек. Бирақ қызылға аўысыў қубылысы бақланғаннан кейин А.Эйнштейн Λ=0 болған теңлемеге қарай көбирек аўды. 1930-жылларға шекем Λ ≠ 0 болғандағы стационар ҳәм стационар емес шешимлер терең изертленди. Бирақ Λ ағзасынаң нолге теңлиги ямаса тең емес екенлиги, егер нолге тең болмағанда қандай мәниске тең болатуғынлығы елеге шекем анық шешилген жоқ.

Космология турақлысының физикалық шешими неден ибарат? Физика ушын оның қандай әҳмийети бар?

Λ ниң өзине тартатуғын бир қәсийети оның өлшеминде ([Λ=см$^{-2}$]). Усындай көз-қарастан Λ бос кеңисликтиң жоқ қылыўға болмайтуғын иймеклиги (қыйсықлығы) болып табылады (материясыз ҳәм гравитациялық толқынларсыз бос кеңисликтиң). Бирақ тартылыс теориясы иймекликти материяның энергиясы, импульсы ҳәм басымы менен байланыстырады. Λ ны майдан теңлемениң оң тәрепине өткерип мына түрге ийе теңлемени аламыз:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik} - g_{ik}\Lambda. \tag{3}$$

Λ≠0 болжаўы Λ = 0 болған жағдайдағыдай, бирақ барлық көлемди

массасының тығызлығы $\rho_\Lambda = \frac{c^2\Lambda}{8\pi G}$,

энергиясының тығызлығы $\varepsilon_\Lambda = \frac{c^4\Lambda}{8\pi G}$,

басымы $P_\Lambda = \varepsilon_\Lambda$ болған бос кеңисликтиң гравитациялық майдан пайда ететуғынлығын өз ишине алады. Егер Λ = 10^{-55} см$^{-2}$ деп болжасақ ρ_Λ = 10^{-28} г/см^3, ε_Λ = 10^{-7} эрг/см^3. Усындай мәнисте вакуумның энергиясының тығызлығы менен басымы (керим тензоры) ҳаққында айтамыз.

Бизиң ρ_Λ ҳәм ε_Λ ҳаққындағы болжаўларымыздың себебинен теорияның релятивистлик инвариантлығы бузылмайды, ρ_Λ пенен P_Λ шамалары бир бирине салыстырғанда қозғалатуғын барлық координаталар системасында бирдей (Лоренц бойынша түрлендирилгенде).

Космология турақлысы Λ нолге тең болмаса да абсолют шамасы бойынша жүдә киши. Соның ушын Λ тек космологияда ғана әҳмийетке ийе бола алады. Сонлықтан төменде еки жағдайды да (нолге тең болған, нолге тең болмаған) қараймыз.

Эйнштейн теңлемелериниң стационар шешимлери. Биз дәслеп А.Эйнштейнниң 1917-жылы шыққан «Космология мәселелери ҳәм улыўмалық салыстырмалық теориясы» мақаласын талқылаймыз. Бул мақала мына сөзлер менен басланады:

«Пуассонның дифференциаллық теңлемеси

$$\Delta\varphi = 4\pi K\rho \tag{4}$$

ның материаллық ноқаттың қозғалыс теңлемеси менен Ньютонның узақтан тәсирлесиў теориясын алмастыра алмайтуғынлығы белгили. Кеңисликтеги шексизликте потенциал φ диң белгили бир шекке умтылатуғынлығын қосыў зәрүр. Салыстырмалықтың улыўмалық принципинен тап сондай аўҳалдың тартылыс теориясында да орын алатуғынлығы келип шығады. Егер биз кеңисликте шексизликке шекем тарқалған дүньяны қарайтуғын болсақ, онда дифференциал теңлемелерге кеңисликлик шексизлик ушын шегаралық шәртлерди киргизиўимиз керек.

Планеталық системаға байланыслы мәселени қарап шыққанымызда кеңисликлик шексизликте тартылыстың барлық потенциаллары $g_{\mu\nu}$ турақлы болып қалатуғын координата системасын сайлап алдық. Бирақ Әлемниң үлкен бөлимлерин қарағанымызда усындай шегаралық шәртлердиң дурыс болатуғынлығы көзге анық көринип турған жоқ. Усы ўақытқа шекем бул әҳмийетли мәселе бойынша алынған нәтийжелер төменде баянланған.»

Буннан кейин мақалада Ньютон теориясы талқыланады. А.Эйнштейн былай жазады:

«Кеңисликтеги шексизликте φ ушын турақлы шектиң болыўы формасындағы Ньютонның шегаралық шәртинен материяның тығызлығының шексизликте нолге айланатуғынлығы келип шығатуғынлығы белгили. Ҳақыйқатында да әтирапында материяның гравитациялық майданы тутасы менен алғанда сфералық симметрияға (орайға) ийе болатуғын таптық деп есаплайық. Бундай жағдайда Пуассон теңлемесинен қашықлық r диң өсиўи менен шексизликте φ диң базы бир шекке тең болыўы ушын орташа тығызлық ρ ның $1/r^2$ қа салыстырғанда тезирек нолге умтылатуғынлығы келип шығады. Бундай мәнисте шексиз үлкен массаға ийе бола алатуғын болса да Ньютон дүньясы шекли.

Буннан аспан денелери тәрепинен шығарылған нурланыў Ньютон дүньясын ортадан радиал бағытлар бойынша кейнинен изсиз жоғалыў ушын таслап кетеди. Бирақ бундай аўҳал тутас аспан денесинде болыўы мүмкин емес…

Егер газ молекулаларының Больцман бөлистирилиўин жулдыз системасын стационар жыллылық қозғалысындағы газ деп қарап жулдызлар ушын қолланатуғын болсақ Ньютон әлеминиң болыўының мүмкин емес екенлигин көремиз. Себеби орай менен шексизлик арасындағы шекли мәнистеги потенциаллар айырмасына тығызлықлардың шекли қатнасы сәйкес келеди. Демек шексизликтеги ноллик тығызлық орайдағы ноллик тығызлыққа алып келеди.

Көринип турғанындай, бул қыйыншылықлардан Ньютон теориясы рамкаларында турып шығыў мүмкин емес. Усыған байланыслы сораў туўылады: Ньютон теориясын модификациялаў жолы менен сол қыйыншылықлардан шығыў мүмкин емес пе? Буның ушын ең алдын дыққат қойып қабыл етиў ушын жолды көрсетемиз, себеби бул жол кейинги талқылаўларды жақсырақ түсинип алыў ушын хызмет етеди. Пуассон теңлемесиниң орнына жазамыз

$$\Delta\varphi - \lambda\varphi = 4\pi K\rho \tag{5}$$

Бул аңлатпадағы λ базы бир универсал турақлы шама болып табылады.

Егер ρ_0 массаның тарқалыўының турақлы тығызлығы болса, онда

$$\varphi = -\frac{4\pi K}{\lambda}\rho_0 \tag{6}$$

(5)-теңлемениң шешими болып табылады. Бул шешим қозғалмайтуғын жулдызлардың кеңисликтеги тең өлшеўли тарқалыўына сәйкес келеди. (6)-формуладағы тығызлық ρ_0 дүньялық кеңисликтеги материяның ҳақыйқый орташа тығызлығына тең болыўы керек. Бул шешим материя менен орташа тең өлшеўли толтырылған шексиз үлкен кеңисликке сәйкес келеди.»

Усындай жоллар менен А.Эйнштейнде ўақытқа байланыслы өзгермейтуғын (стационар) шексиз үлкен әлем пайда болған. Материя менен бир текли толтырылған бул әлемди биз Эйнштейн әлеми деп атаймыз.

Эйнштейнниң биз қарап атырған мақаласының 3-параграфы «Тең өлшеўли тарқалған материясы бар кеңисликтеги туйық дүнья» деп аталады. Бул параграфта биз мынадай жағдайлар менен танысамыз:

«Материяның тарқалыўы ҳаққындағы бизге белгили мағлыўматлар ишиндеги ең әҳмийетлиси жулдызлардың салыстырмалы тезликлериниң жақтылықтың тезлигинен жүдә киши екенлигинде. Сонлықтан мен дәслеп мынадай жуўық болжаўды талқылаўларымызға тийкар етип аламан: материя көп ўақытлар даўамында тынышлықта туратуғын координата системасы бар деп есаплаймыз. Усы координата системасында материяның тензоры мынадай әпиўайы түрге ийе болады:

$$\begin{matrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \rho\end{matrix}$$

Тығызлықтың бөлистирилиўи скаляр ρ (орташа) кеңисликтеги координаталардың функциясы болыўы мүмкин. Бирақ биз дүньяны кеңислик бойынша туйық деп болжаймыз. Сонлықтан ρ турған орыннан ғәрезли емес деген гипотезаны қабыл етемиз ҳәм бул гипотеза буннан кейинги талқылаўларымыздың тийкарында турады.

Гравитация майданына келетуғын болсақ

$$\frac{d^2x_\nu}{ds^2}+\begin{Bmatrix}\alpha\ \beta\\ \gamma\end{Bmatrix}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}=0$$

қозғалыс теңлемесинен статикалық гравитациялық майданда тек g_{44} орынға байланыссыз болғанда материаллық ноқаттың тынышлықта туратуғынлығы келип шығады.

Мақаланың 4-параграфы «Гравитациялық майданға киргизиў зәрүр болған қосымша ағза ҳаққында» деп аталады. Онда

«Ықтыярлы түрде сайлап алынған координаталар системасындағы гравитациялық майданның теңлемелери мына түрге ийе болады:

$$G_{\mu\nu}=-\chi(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T). \tag{7}$$

Бул аңлатпада

$$G_{\mu\nu}=-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{Bmatrix}\mu\ \nu\\ \alpha\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\mu\ \alpha\\ \beta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\nu\ \beta\\ \alpha\end{Bmatrix}+\frac{\partial^2\lg\sqrt{-g}}{\partial x_\mu\partial x_\nu}-\begin{Bmatrix}\mu\ \nu\\ \alpha\end{Bmatrix}\frac{\partial^2\lg\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}.$$

...(Бул) теңлемелер системасы салыстырмалық постулатына ҳәм (5)-түрдеги Пуассон теңлемесин улыўмаластырыўға сәйкес бир улыўмаластырыўға мүмкиншилик береди. Улыўмалық ковариантлықты бузбай (кейинги) теңлемениң шеп тәрепине ҳәзирше белгисиз фундаменталлық константа λ ге көбейтилген фундаменталлық тензор $g_{\mu\nu}$ ды қоса аламыз. Онда (сол теңлемениң) орнына

$$G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\chi\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T)\right) \tag{8}$$

теңлемесин аламыз. Бул теңлеме λ шамасының жеткиликли дәрежеде киши мәнислери ушын Қуяш системасында жүргизилген бақлаўларға сәйкес келеди. Бул теңлеме импульс пенен энергияның сақланыў нызамларын да қанаатландырады...»

5-параграф есаплаўлар нәтийжелерин баянлайды ҳәм «Есаплаўлар. Нәтийже» деп аталады. Онда былай делинеди:

«Бизиң континуумның барлық ноқатлары бирдей болғанлықтан есаплаўларды мысалы координаталары $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ болған бир ноқат ушын орынлаған жеткиликли болады.

Бундай жағдайда $g_{\mu\nu}$ диң орнына ($g_{\mu\nu}$ лар дифференциалланбаған ямаса бир рет дифференциалланған орынлар ушын) мына мәнислердиң қойылыўы мүмкин:

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Солай етип дәслеп мына аңлатпа алынады:

$$G_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_1}\begin{Bmatrix}\mu\ \nu \\ 1\end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2}\begin{Bmatrix}\mu\ \nu \\ 2\end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_3}\begin{Bmatrix}\mu\ \nu \\ 3\end{Bmatrix} + \frac{\partial^2 \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu}.$$

...барлық (8)-теңлемелериниң егер

$$-\frac{2}{R^2} + \lambda = -\frac{\chi\rho}{2}, \quad -\lambda = -\frac{\chi\rho}{2}$$

қатнаслары орынланған жағдайда қанаатландырылатуғынлығы келип шығады. Ямаса

$$\lambda = \frac{\chi\rho}{2} = \frac{1}{R^2}.$$

Солай етип егер тең салмақлық ҳалында сақланатуғын орташа тығызлық ρ, сфералық кеңисликтиң радиусы R ҳәм оның көлеми $2\pi^2R^3$ белгили болса жаңадан киргизилген универсаллық константа λ ниң мәнисин анықлаў мүмкин болады. Бизиң көз-қарасымыз бойынша Әлемниң толық массасы шекли ҳәм

$$M = \rho 2\pi^2 R^3 = 4\pi^2 \frac{R}{\chi} = \frac{\sqrt{32}\pi^2}{\sqrt{\chi^3\rho}}$$

шамасына тең.».

Ҳәзирги ўақытлардағы мағлыўматлар бойынша $\rho \approx 10^{-30}$ г/см^3, ал Әлемниң радиусы болса $R \approx 10^{28}$ см. Демек

$$M_{әлем} = 2\pi^2 R^3\rho \approx 2\cdot10^{56}\ г.$$

Егер Қуяштың массасының $2\cdot10^{33}$ г екенлигин есапқа алсақ, онда $M_{әлем}/M_{Қуяш} = 10^{24}$ екенлиги келип шығады. Бул ҳәзирги ўақытлары қабыл етилген мағлыўматларға толық сәйкес келеди.

Эйнштейн теңлемелерин айырым космологиялық мәселерди шешиўде пайдаланыў. Фридман космологиясы. Улыўмалық талаплар. Егер Әлем бир текли ҳәм изотроп болса, оның геометриясы Робертсон-Уокер метрикасы менен бериледи:

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2\right]. \tag{9}$$

Бул аңлатпада k = +1, 0, -1 (+1 жабық, 0 кеңислиги тегис ҳәм -1 ашық моделлер ушын). R(t) функциясының ўақытқа ғәрезлилиги менен k шамасын анықлаў ушын Эйнштейн теңлемелери қолланылатуғын болса алынған кеңислик-ўақыт Фридман модели деп аталады (гейпара ўақытлары, әсиресе космология турақлысы нолге тең болмаған жағдайларда бул модельди Леметр модели деп те атайды). R(t) дан алынған еки биринши туўынды ҳәзирги дәўирлер ушын (ҳәзирги дәўирди 0 индекси менен белгилеймиз) Хаббл турақлысы

$$H_0 \equiv \left(\frac{dR}{dt}\right)R \ \ (R = R_0\ де) \tag{10}$$

ҳәм әстелениў параметри деп аталатуғын

$$q_0 \equiv \left[\left(\frac{d^2R}{dt^2}\right)R\right]\Big/\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 \ \ (R = R_0\ де) \tag{11}$$

параметриниң жәрдеминде параметрлестириледи.

Космологияда улыўма айтқанда затлар кеңейиў ҳәм қысылыў ҳалларында болады. Соның ушын базы бир бақлаўшыға жеткен жақтылық нуры өзиниң дерегине салыстырғанда қызылға ямаса фиолетке аўысқан болып шығады. Бул аўысыў z шамасы менен тәрийипленип, мына формула бойынша анықланады:

$$1 + z \equiv \frac{\nu_{nur\,l.}}{\nu_{baql.}} = \frac{\lambda_{nur\,l.}}{\lambda_{baql.}}. \tag{12}$$

Көпшилик жағдайларда z тиң шамасы бақлаўшыдан қашықлыққа байланыслы монотонлы өзгереди, сонлықтан ҳәрдайым «z қызылға аўысыўында турған объект» деген түсиникти пайдаланады.

Мейли ρ ҳәм p арқалы Әлемди толтырып турған масса-энергияға ийе материяның тығызлығы менен басымы белгиленген болсын. Онда ρ >> p жағдайда затлар басым модель, ал p ≈ (1/3)ρ нурланыў басым болған модель ҳаққында гәп етиледи.
Биз дәслеп

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)\right] \tag{13}$$

түринде жазылған Робертсон-Уокер метрикасын

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)\left[d\chi^2 + \Sigma^2(\chi)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)\right] \qquad (14)$$

ямаса

$$ds^2 = R^2(\eta)\left[-d\eta^2 + d\chi^2 + \Sigma^2(\chi)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)\right] \qquad (15)$$

түринде жазыўға болатуғынлығын көрсетемиз. Бул аңлатпалардағы

$$\Sigma^2(\chi) = \begin{cases} k = +1 \ ushın \ sin^2\chi, \\ k = 0 \ ushın \ \chi^2, \\ k = -1 \ ushın \ sh^2\chi. \end{cases}$$

Мейли

$$r = \begin{cases} k = +1 \ ushın \ sin\chi, \\ k = 0 \ ushın \ \chi, \\ k = -1 \ ushın \ sh\chi \end{cases}$$

болсын. Онда

$$dr = \begin{cases} k = +1 \ ushın \ \cos\chi, \\ k = 0 \ ushın \ d\chi, \\ k = -1 \ ushın \ ch\chi, \end{cases}$$

$$\frac{dr^2}{1 - kr^2} = \begin{cases} d\chi^2, \\ d\chi^2, \\ d\chi^2. \end{cases}$$

Демек

$$\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 = d\chi^2 + \Sigma^2(\chi) d\Omega^2,$$

бул жерде жоқарыда алынғанындай

$$\Sigma^2(\chi) = \begin{cases} k = +1 \ ushın \ sin^2\chi, \\ k = 0 \ ushın \ \chi^2, \\ k = -1 \ ushın \ sh^2\chi. \end{cases}$$

Енди t өзгериўшисинен η өзгериўшисине

$$dt = R(\eta) d\eta$$

қатнасының жәрдеминде түрлендириўди анықлаймыз. Онда

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)(d\chi^2 + \Sigma^2 d\Omega^2 = R^2(\eta)(-d\eta^2 + d\chi^2 + \Sigma^2 d\Omega^2).$$

Енди Робертсон-Уокер метрикасының Эйнштейнниң майдан теңлемелерин қанаатландыратуғынлығын талабынан шығып идеал суйықлық пенен толтырылған космологиялық Фридман модели ушын динамикалық теңлемелерди келтирип шығарайық.

Ортонормировкаланған жолдас координата системасында

$$T_0^0 = -\rho,\ \ T_r^r = T_\varphi^\varphi = T_\varphi^\varphi = p. \tag{16}$$

Демек (кери изге ийе) энергия-импульс тензоры $\overline{\mathrm{T}}$ мынадай қураўшыларға ийе болады:

$$T_0^0 = -\frac{1}{2}(\rho + 3p),\ \ T_1^1 = \frac{1}{2}(\rho - p). \tag{17}$$

Бул шаманы 1/(8πG) ға көбейтемиз ҳәм алынған нәтийжени Риччи тензорына көбейтемиз. Бул тензордың қураўшылары

$$\begin{aligned} R_0^0 &= 3\ddot{R}/R, \\ R_1^1 &= \frac{1}{R^2}(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k). \end{aligned} \tag{18}$$

Буннан

$$\begin{aligned} &3\ddot{R} + 4\pi G(\rho + 3p)R = 0, \\ &R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k - 4\pi G(\rho - p)R^2 = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

теңлемелерин аламыз.

Егер (19)-теңлемедеги биринши теңлемени $\ddot{R}$ ге бөлсек, онда

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2 \tag{20}$$

теңлемесин аламыз.

$$\frac{1}{2} d\left[\left(\dot{R}\right)^2\right] \Big/ dR = \ddot{R} \tag{21}$$

екенлигин еске түсиремиз. Онда (19)-теңлемелердиң биринши теңлемесинен

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dR}\left(\frac{8\pi G}{3}\rho R^2\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dR}\left(\dot{R}\right)^2 = \ddot{R} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3p)R, \\ &\frac{d}{dR}\left(\rho R^2\right) = -(\rho + 3p)R, \\ &\frac{d}{dR}\left(\rho R^2\right) = -3pR^2 \end{aligned} \tag{22}$$

екенлигине ийе боламыз ҳәм (19)-теңлемелердиң екинши теңлемесин аламыз.

Енди Фридман модели ушын ρ, k ҳәм q шамалары арасындағы байланысларды келтирип шығарамыз.

$$H \equiv \dot{R}/R$$

анықламасынан ҳәм (20)-теңлемеден

$$\frac{8\pi G\rho}{3}=\frac{k}{R^2}+H^2 \qquad (23)$$

теңлемесин тиккелей аламыз. Ал егер усы теңлемени R бойынша дифференциалласық, (21)-теңлеме менен биринши тәртипли басқа

$$d(\rho R^3)/dR=-3pR^2$$

теңлемени ҳәм

$$q\equiv-\ddot{R}R/\dot{R}^2$$

анықламасын есапқа алсақ биз

$$-8\pi Gp=\frac{k}{R^2}+H^2(1-2q) \qquad (24)$$

теңлемесине ийе боламыз.

Егер ρ >> p болса (24)-теңлемениң шеп тәрепин оң тәрепине салыстырғанда есапқа алмай кетиўге болады (бул модельде затлар басым болған жағдайға сәйкес келеди) ҳәм биз

$$\frac{k}{R^2}=(2q-1)H^2 \qquad (25)$$

аңлатпасына ийе боламыз. (25)-аңлатпаны (23)-аңлатпаға қойсақ

$$\frac{8\pi G\rho}{3}=2qH^2$$

аңлатпасын аламыз.

Егер p = ⅓ρ болса, онда (9-15) пенен (9-16) дан ρ ны жоғалтып

$$\frac{k}{R^2}=(q-1)H^2$$

екенлигин көремиз. Ал k/R^2 ағзасын жоқ етиў барысында

$$\frac{8\pi G\rho}{3}=qH^2$$

екенлигине исенемиз.

Солай етип басым p менен ρ арасындағы ҳәр қыйлы қатнаслар ҳәр қыйлы теңлемелерге алып келеди екен.

Енди биринши тәртипли Фридман теңлемесин R(t) ға карата еки жағдай ушын шешемиз. Биринши жағдайда материяның тығызлығына затлар, екинши жағдайда материяның тығызлығына нурланыў тийкарғы үлес қосатуғын болсын. Ҳәзирги дәўирдиң параметрлерин H_0 ҳәм q_0 арқалы белгилеймиз жәнe усы шамалардың мәнислериниң турақлы екенлигин ескертип өтемиз.

Биринши жағдай. Затлар материяның басқа түрлерине қарағанда көп болған жағдайда басымды есапқа алмай кетиўимизге болады. Бундай аўҳалда масса-энергияның тығызлығы Әлемниң көлеминиң үлкейиўи менен кемейеди:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 . \qquad (26)$$

$$d\eta = dt / R$$

аңлатпасының жәрдеминде жаңа ўақытлық координатаны анықлаймыз. Бундай жағдайда Фридман теңлемеси былайынша жазылады:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \left(\frac{dR / d\eta}{R^2} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 - \frac{k}{R^2} \qquad (27)$$

ямаса

$$\frac{1}{\sqrt{R}} \frac{dR}{d\eta} = 2 \frac{d}{d\eta} \sqrt{R} = \left(\frac{8\pi G}{3} \rho_0 R_0^3 - kR \right)^{1/2} . \qquad (28)$$

Алынған теңлемени интегралласақ мынаған ийе боламыз:

$$\frac{1}{2} \eta = \int_0^{R^{\frac{1}{2}}} \frac{dR^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{8}{3} \pi \rho_0 R_0^3 - kR \right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (29)$$

интегралын интергаллаў k шамасының ҳәр қыйлы мәнислеринде ҳәр қыйлы нәтийжелериди береди.

1) $k = +1$ теңлиги орынланғанда

$$\frac{1}{2} \eta = \arcsin \frac{R^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{8}{3} \pi \rho_0 R_0^3 \right)^{\frac{1}{2}}},$$

2) $k = 0$ теңлиги орынланғанда

$$\frac{1}{2} \eta = \frac{R^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{8}{3} \pi \rho_0 R_0^3 \right)^{\frac{1}{2}}},$$

3) $k = -1$ теңлиги орынланғанда

$$\frac{1}{2} \eta = arcSh \frac{R^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{8}{3} \pi \rho_0 R_0^3 \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Енди

$$q_0 = \frac{4\pi G}{3} \frac{\rho_0}{H_0^2} \qquad (30)$$

ҳәм

$$R_0^2 = \frac{k}{(2q_0 - 1) H_0^2}, \quad (k = \pm 1) \qquad (31)$$

екенлигин есапқа аламыз. (31)-аңлатпаның шеп тәрепиниң оң мәниске ийе екенлигинене k=sign(2q₀-1) екенлигинен түсиникли. Демек (29)-аңлатпада мынаған ийе боламыз:

$$\frac{8\pi}{3}\rho_0 R_0^3 = \frac{2q_0}{H_0|2q_0-1|^{3/2}}, \quad k = \pm 1.$$

Енди (29)-теңлемени R₀ ге қарата шешсек мына аңлатпаларға ийе боламыз:

$k = +1$ ушын

$$R = \frac{q_0}{H_0(2q_0-1)^{\frac{3}{2}}}(1-\cos\eta),$$

$k = 0$ ушын

$$R = \frac{1}{12}H_0^2R_0^3\eta^2, \tag{32}$$

$k = -1$ ушын

$$R = \frac{q_0}{H_0(2q_0-1)^{\frac{3}{2}}}(\operatorname{sh}\eta - 1).$$

Ең кейнинде $dt = Rd\eta$ шамасын интеграллап мыналарды аламыз:

$k = +1$ ушын

$$t = \frac{q_0}{H_0(2q_0-1)^{\frac{3}{2}}}(\eta - \sin\eta),$$

$k = 0$ ушын

$$t = \frac{1}{12}H_0^2R_0^3\eta^3, \tag{33}$$

$k = -1$ ушын

$$t = \frac{q_0}{H_0(2q_0-1)^{\frac{3}{2}}}(\operatorname{sh}\eta - \eta).$$

Жоқарыда шешилген мәселеде $k = 0$ болған жағдай ушын жуўаптан R₀ ди жоқ қылыў мүмкин емес екенлигин аңсат аңлаў мүмкин. Бул факт усындай жағдайларда Әлемниң кеңисликлик қашықлықларда ықтыярлы масштабларға ийе болатуғынлығын, ал оның геометриясының ўақыттың барлық моментлеринде бирдей болып «көринетуғынлығын» сәўлелендиреди. Сонлықтан R₀ диң сан мәниси қәлеген физикалық өлшенетуғын шамаға кирмейди.

Биз (32)- менен (33)-аңлатпалардан әҳмийетли жуўмақлар шығарамыз:

A). **Әлем жабық болған жағдай**

$$(k = +1). R = \frac{q_0}{H_0(2q_0-1)^{\frac{3}{2}}}(1-\cos\eta).$$

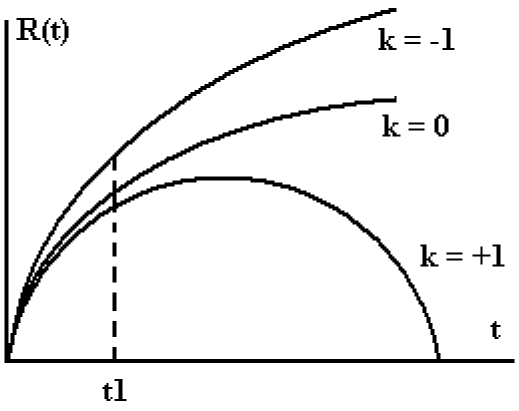
Демек R диң мәниси η ның мәнисине ғәрезли (1-Cosη) нызамы. Егер η = 0 ҳәм η=nπ болса $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ $R = 0$. Ал $\eta = \left(\frac{n}{2}\right)\pi$ болған жағдайларда

$$R = \frac{q_0}{H_0(2q_0 - 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Биз көрген мысаллардың үшеуинде де R=0 болған жағдайларды көремиз. Соның менен бирге бул жағдай η = 0 де t = 0 болатуғын мәнислерге сәйкес келеди ҳәм t → 0 де R → 0, ал тығызлық ρ = ∞ екенлиги келип шығады. Жабық моделде R=0 жағдайы дәўирли түрде қайталанады, ал ашық ҳәм тегис моделлерде t = 0 (η = 0) болған ўақыт моментинде тек бир рет орын алады. R(t) функциясы t = 0 (η = 0) болған моменттен баслап монотонлы түрде өседи. R диң максималлық мәниси [әлбетте тек жабық модельде ($k = +1$)]

$$R_{max} = 2\frac{q_0}{H_0(2q_0 - 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ал ашық ҳәм тегис моделлерде R диң мәниси шексиз өседи. Бул жағдай төменде келтирилген сүўретте берилген.



R = R(t) ғәрезлилиги. Бул сүўретке Λ = 0, бир текли ҳәм изотроп әлем сәйкес келеди. k = +1 болған жағдайда кеңейиў қысылыў менен алмасады, k = 0 ҳәм k = -1 болған жағдайларда кеңейиў шексиз даўам етеди. t1 ўақыт моменти ҳәзирги Әлемге сәйкес келеди. Үш жағдайда да R(t) = 0 болған жағдай бақланады (сингулярлық)

Солай етип t=0 мәнисиндаги R→0 изотроп моделдиң кеңислик-ўақытлық моделиниң айрықша ноқаты болып табылады (усы гәплер жабық моделдеги R=0 болған барлық ноқатларға да сәйкес келеди). Егер R менен t арасындағы байланысты анықлайтуғын болсақ [(32)-аңлатпа менен (33)-аңлатпаны салыстырып табамыз ҳәм ол байланыс $R = \sqrt{const \cdot t}$ түринде болады], онда t ның белгиси өзгергенде R(t) шамасының жормал мәниске ийе болатуғынлығын дәлиллейди. Интервал ушын аңлатпадағы g_{ij} шамасының барлық төрт қураўшысы терис мәниске, ал g анықлаўшысы оң мәниске ийе болған болар еди. Физикалық жақтан бундай метрика мәниске ийе емес. Бул метриканы айрықша ноқаттан t ның терис мәнислерине қарай даўам еттириўдиң физикалық мәниске ийе болмайтуғынлығын көрсетеди.

Екинши жағдай. Нурланыў басым болған ўақытлары жолдас кеңисликтиң берилген көлеминдеги масса-энергия турақлы болмайды. Бул жағдайда фотонлардың қызылға аўысыўының есабынан тығызлықтың қосымша кемейиў эффекти орын алады. Сонлықтан

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^4. \qquad (34)$$

(27)-аңлатпаның аналогы мына теңлеме болып табылады:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2=\left(\frac{dR/d\eta}{R^2}\right)^2=\frac{8\pi G}{3}\rho_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^4-\frac{k}{R^2}$$

ямаса

$$\frac{dR}{\left(\frac{8}{3}\pi G\rho_0 R_0^4-kR^2\right)}=d\eta.$$

Бул теңлемениң шешими мына түрге ийе болады:

$$R=\sqrt{\frac{8\pi}{3}G\rho_0 R_0^4}. \tag{35}$$

Бул жағдайда да k ның +1, 0 ҳәм -1 болған мәнислери ушын сәйкес

$$sin\eta,$$
$$\eta,$$
$$sh\eta$$

шешимлерине ийе боламыз.
(30)-аңлатпаның орнына енди

$$q_0=\frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_0}{H_0^2},$$

ал (31)-аңлатпаның орнына

$$R_0^2=\frac{k}{(q_0-1)H_0^2},\quad (k=\pm 1)$$

аңлатпаларына ийе боламыз. Демек (35)-формула енди

$$\begin{gathered}\frac{8\pi}{3}G\rho_0 R_0^4=\\ k=+1\ ushın\frac{q_0}{(q_0-1)^2H_0^2},\\ k=0\ ushın\ H_0^2R_0^4\end{gathered} \tag{36}$$

шешимлерин аламыз. Ал $dt=Rd\eta$ қатнасын интеграллаў бизге мынаны береди:

$$t=\begin{cases}k=+1\ \ ushin\ \ \dfrac{1}{H_0}\left[\dfrac{q_0^{1/2}}{q_0-1}\right](1-\mathrm{Cos}\eta)\\ \qquad k=0\ \ ushin\ \ \dfrac{1}{2}H_0R_0^2\eta^2.\\ k=-1\ \ ushin\ \ \dfrac{1}{H_0}\left[\dfrac{q_0^{1/2}}{q_0-1}\right](\mathrm{Ch}\eta-1)\end{cases} \tag{37}$$

Енди және бир космологиялық мәселени шешейик. Жабық Фридман әлемин қарайық (k=+1). Бул әлемниң барлық өмири ушын кеткен ўақыттың тек жүдә киши бөлегин нурланыў дәўири тутатуғын болсын. Жоқарыда алынған нәтийжелерден пайдаланып усы әлем «туўылғаннан» баслап өлгенге шекем фотонның неше рет әлемди айланып шығатуғынлығын есаплайық.

Егер Фридман метрикасында ўақыт $d\eta = dt / R$ аңлатпасы менен есапланатуғын «развертка мүйеши» менен анықланатуғын болса радиус бойынша тарқалатуғын фотон ($d\varphi = d\upsilon = 0$) ушын жазылған интервал мына түрге ийе:

$$0 = ds^2 = R^2(\eta)(-d\eta^2 + d\chi^2).$$

Бул аңлатпадағы $d\chi^2 = dr^2/(1-r^2)$ шамасы 3 лик сферадағы «тригонометриялық» радиаллық координата. (32)- ҳәм (35)-теңлемелерден әлемниң жасаў ўақыты (R функциясының еки ноли арасындағы аралық) $\Delta\eta = 2\pi$ аралығына сәйкес келеди. Демек сол фотон әлемди тек бир рет айланып шығады екен.

Солай етип Эйнштейн теңлемелери изотроп ҳәм бир текли әлем ушын әпиўайыласады екен. Бундай әлемди Фридман әлеми деп атаймыз. Ал Фридман әлеми ушын көплеген мәселелерди сол әпиўайыластырылған Эйнштейн теңлемелерин пайдаланып шешиўге болады екен.

Инфляция (космослық инфляция, Әлмниң инфляциясы ямаса Әлемниң үрлениўи), яғный ең дәслепки ўақытлары Әлемниң аса үлкен тезликлер менен кеңейиўи (үрлениўи) идеясы ХХ әсирдиң 80-жыллары пайда болды. Әлемниң бақлаўларда анықланған қәсийетлерин түсиндириўдеги инфляциялық парадигманың табысларының нәтийжесинде бул теория бәрше тәрепинен қабыл етилген теорияға айланды. Ҳәзирги ўақытлары инфляциялық сценарийлердиң саны оғада көп ҳәм олардың ишинен әмелде жүзеге келетуғын сценарийди (ўакыялардың избе-излигин) айырып алыў қыйын мәселе болып табылады. Инфляциялық моделлердиң саны турақлы түрде өсип келмекте [31-35]. Сонлықтан биз хаотикалық инфляция деп аталатуғын инфляция базасында дүзилген инфляциялық моделдиң қәсийетлерин додалаймыз ҳәм сәйкес мәселелерди шешемиз.

Инфляциялық дәўирди тәриплеўдиң ең әпиўайы ҳәм кең тарқалған усылының мазмуны төмендегидей:

Базы бир скаляр майданның (инфлатонның) бар екенлиги болжап айтылады ҳәм бул скаляр майдан өзи пайда еткен гравитация майданы менен бирликте эволюцияға ушырайды. Бул майданның потенциалына қойылатуғын базы бир шәртлерде (бундай шәртлерди төменде додалаймыз) де Ситттер моделин еске түсиретуғын аўҳал пайда болады. Басқа сөз бенен айтканда горизонттың берги тәрепиндеги кеңисликтиң сызықлы өлшемлери экспоненциаллық нызам менен тез өседи. Бул жағдай инфляциялық дәўирдиң ең баслы өзгешелиги болып табылады.

Скаляр майданнан ҳәм оның гравитациялық майданынан туратуғын системаның лагранжианының тығызлығы былайынша жазылады:

$$L = \sqrt{-g}\left\{\frac{1}{16\pi G}R + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\varphi)\right\} \tag{38}$$

Бул аңлатпада $g = \det(g_{\mu\nu})$, G арқалы гравитациялық турақлы белгиленген.

Инфляциялық процесстиң скаляр майданның энергиясының үлкен болған тығызлықларында эффективли түрде жүретуғынлығын алдын ала ескертемиз. Энергияның бундай үлкен тығызлықлары квант флуктуацияларының себебинен пайда бола алады. Анықсызлық қатнасын пайдаланып флуктуацияның өлшемлерин баҳалаймыз.

$$\Delta E \Delta t \sim 1 \ \ (\hbar = 1) \tag{39}$$

Апиўайылық ушын дәслеп $\mathrm{V}(\varphi)=\frac{m^2\varphi^2}{2}$ деп аламыз. m арқалы скаляр майданның массасы белгиленген. Ал майданның фонлық мәниси $\varphi_0=0$ деп есаплаймыз, яғный төменги энергияларды қараймыз. Флуктуациялар себеплик пенен байланысқан областларда пайда болады. Бул болса оның (флуктуацияның) кеңисликлик өлшемлерине $\Delta l{\sim}\Delta t$ түриндеги шек қояды. Лагранжианы (2-17) түрде жазылған системаның энергиясы

$$E=\int d^3x\,\sqrt{-g}\,\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi+V(\varphi) \tag{40}$$

түринде жазылады. Бул аңлатпада скаляр қыйсықлық R есапқа алынбаған, себеби есаплаў тек скаляр майдан φ ушын исленеди. Жоқарыда айтыланларды есапқа алып (40)-интегралдының шамасын баҳалаймыз ҳәм (39)-теңликтен флуктуацияның кеңисликтеги өлшемин табамыз:

$$\Delta l^3\Delta t\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right)^2+\frac{1}{2}m^2\Delta\varphi^2\right]{\sim}\Delta\varphi^2\Delta l^2[1+m^2\Delta l^2]{\sim}1.$$

Демек флуктуация амплитудасы дәрежеси бойынша

$$\Delta\varphi{\sim}\frac{1}{\Delta l\sqrt{1+m^2\Delta l^2}}.$$

шамасына барабар екен. Бирақ бул улыўмалық аңлатпа болып табылады. Оның тийкарында берилген кеңисликлик өлшемге ийе флуктуациялардың энергиясын есаплаў мүмкин. Мысалы электрәззи ҳәм күшли тәсирлесиўлердиң симметриясының бузылыўының дәрежесин анықлаўға болады. Бул жағдайда $\Delta l{\sim}\frac{1}{M_{GUT}}{\sim}\frac{1}{M_{Pl}}$. Бул аңлатпада M_{Pl} арқалы Планк массасы, ал M_{GUT} арқалы төрт тәсирлесиўдиң бирлесиўине сәйкес келиўши масса белгиленген, $M_{GUT}\sim10^{16}$ ГэВ, $M_{Pl}\sim10^{-5}$ г $\sim10^{19}$ ГэВ. $M_{Pl}^2=\frac{1}{G}$ ямаса $M_{Pl}^2=\frac{1}{8\pi G^2}$. Егер тәбийий түрдеги $\mathrm{m}\ll M_{GUT}$ болжаўын қабыл етсек аңлатпаларымыз оннан да әпиўайыласады. Бундай жағдайда потенциал энергияның флуктуациялары

$$\Delta V{\sim}m^2M_{GUT}^2,$$

ал кинетикалық энергияның флуктуациялары

$$\Delta E{\sim}M_{GUT}^4.$$

Биз усы аңлатпалардың жәрдеминде бизди қоршаған кеңисликтеги майданлардың квантлық флуктуацияларының тығызлығы жүдә жоқары болған энергияларға ийе областларды пайда етеди екен. Сырттан қараған бақлаўшының көз-қарасы бойынша бундай флуктуациялардың жасаў ўақыты жүдә аз. Жоқарыда қарап өтилген мысалда жасаў ўақыты 10^{-40} сек. Флуктуация ийелеген кеңисликтеги областтың өлшеми $\sim10^{-30}$ см ди қурайды. Бул киши шамалар Планк шамаларына салыстырғанда үлкен шамалар болып табылады. Сонлықтан бундай областлар ишинде Эйнштейн теңлемелерин стандарт түрде пайдаланыў мүмкиншилигине ийе бола аламыз. Ал иште турған бақлаўшының көз- қарасына төменде итибар беремиз.

Скаляр майданның теңлемеси (2-16) аңлатпадан келип шығады:

$$\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\; g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi\right) + \sqrt{-g}V'(\varphi) = 0. \tag{40}$$

Кеңисликтиң метрикасын әдеттегидей деп болжаймыз. Кеңисликтиң бир теклилигине байланыслы скаляр майдан φ диң де тарқалыўындағы бир теклиликти болжаймыз ҳәм $\varphi = \varphi(t)$, яғный скаляр майдан тек ўақыттың функциясы болып қалады. Бундай жағдайда жоқарыдағы (41)-аңлатпа әпиўайыласады:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V(t) = 0. \tag{42}$$

Скаляр майданның энергиясының $\rho = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi)$ екенлигин есапқа алсақ және бир теңлемени аламыз. Бундай жағдайда Хаббл параметриниң формуласын быланынша жаза аламыз:

$$H^2 = \frac{8pG}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi)\right). \tag{43}$$

Бул $\varphi(t)$ ҳәм $a(t)$ динамикалық өзгериўшилери ушын жазылған екинши теңлеме болып табылады. (43)-аңлатпадағы $\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2$ қосылыўшысы кинетикалық энергияға (ўақыт бойынша алынған туўындының тезликке сәйкес келетуғынлығын билемиз), ал $V(\varphi)$ потенциал энергияға сәйкес келеди. Сонлықтан H^2 шамасының (яғный $H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2$ шамасының) толық энергияға сәйкес келетуғынлығын аңғарамыз.

Инфляциялық процесс ушын ең әҳмийетли мөмент φ скаляр майданның (инфлатонның) әстелик пенен өзгериўи болып табылады. Бундай жағдайда (43)-аңлатпа ҳәтте Λ = 0 болған жағдайда да Ситтер кеңислигиндегидей қәсийетке ийе болады. Материаллық ноқаттың әдеттеги механикасы менен уқсаслықты атап өтемиз. Бул жерде әстелик пенен қозғалыс ҳаққында гәп болады, егер сүйкелис ушын жуўапкер болған $3H\dot{\varphi}$ қосылыўшының шамасы үлкен болса, яғный

$$3H|\dot{\varphi}| \gg |\ddot{\varphi}|. \tag{44}$$

Бул жағдай теңлемелерди және де әпиўайыластырыўға мүмкиншилик береди. Ҳақыйқатында да (44)-теңсизликти пайдаланып (42)-теңлемени былайынша көширип жазамыз:

$$3H|\dot{\varphi}| + V'(t) = 0. \tag{45}$$

Демек.

$$V'(\varphi) \sim 3H\dot{\varphi} \gg \ddot{\varphi}$$

теңсизлигине келемиз. Биринши ҳәм ақырғы ағзаны φ шамасына көбейтип ҳәм интеграллаўдан кейин биз излеп атырған теңсизликти аламыз:

$$\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi). \tag{46}$$

Бул теңсизлик кинетикалық энергияның потенциал энергияға салыстырғанда киши екенлигин билдиреди. Демек инфляцияның барысында кинетикалық энергия аз өзгерислерге ушырайды деп жуўмақ шығарамыз. Соның менен бирге $V \cong const$ ҳәм усының менен бирге (43) теги Хаббл параметри де дерлик тураклы, яғный

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \cong \sqrt{\frac{8\pi G}{3} V(\varphi)}. \qquad (47)$$

(47)-теңлеме $a(t) \sim \exp(Ht)$ түриндеги шешимге ийе болады ҳәм масштаблық фактордың экспоненциаллық өсетуғынлығын билдиреди. Демек физикалық қашықлықлар да де Ситтер кеңислигиндей өзгерислерге ушырайды деген сөз. Бул таң қаларлық жағдай емес. Себеби скаляр майданның (инфлатонның) шама менен тураклы потенциалы φ шамасын космологиялық турақлы сыпатында интерпретациялаў мүмкин.

Улыўма салыстырмалық теориясының улыўмалық әҳмийети ҳәм альтернатив теориялар ҳаққында. Улыўмалық салыстырмалық теориясы ҳаққында жоқарыда келтирилген мағлаўматлар менен бир қатар Internet тармағы арқалы алынған көп санлы илимий мағлыўматлар тийкарында төмендегидей жуўмақлар шығарыў мүмкин:

1. Улыўмалық салыстырмалық теориясы бақланатуғын астрономиялық эффектлерди дәл түсиндиреди (планеталардың траекторияларына дүзетиўлер киргизиў, жақтылықтың жийилигиниң өзгериўи, нурлардың иймейиўи, радиосигналлардың белгили бир аралықларды өткенде кешигиўи);

2. Улыўмалық салыстырмалық теориясы Әлемниң тутасы менен алғандағы ең улыўмалық қәсийетлерин түсиндиреди. Қара қурдымлардың бар екенлиги болжанды. Қара қурдымлар түсинигиниң жәрдеминде рентген қос системаларындағы, галактикалар менен квазарлардың ядроларындағы қубылыслар табыслы түрде түсиндириледи.

3. Гравитациялық толқынлардың бар екенлиги болжап айтылды. Олардың ҳақыйқатында да тәбиятта бар екенлиги өз ишине пульсарларды алыўшы қос жулдызлардың қозғалысынан анықланды.

4. Тартылыс теориясын геометриялық жақтан формулировкалаў кеңислик-ўақытлық многообразияның қәлеген ноқатында ҳәм қәлеген еркин қозғалыўшы бақлаўшының дүньялық сызығы бойлап локаллық инерциаллық координаталарды енгизиўдиң мүмкиншилигин автомат түрде өз ишине алады. Бундай координаталар системасында салмақсызлық орын алады ал жоғалтылмайтуғын гравитациялық тәсир қоршаған орталықты тасыў-қайтыў характеринде деформациялайды. Теорияда салмақ майданы ҳәм координата системасының тезлениўши қозғалысы арасындағы локаллық эквивалентлик принципи орынланады. Тәжирийбе эквивалентлилик принципин тастыйықлайды.

5. Тартылыс теңлемелери материяның қозғалысы менен кеңисликти толтырып турған майданның өзгерисине белгили бир шеклер қояды. Дара жағдайда ноқатлық бөлекше ушын қозғалыс теңлемесиниң өзи кеңислик-ўақыттың геометриясының салдары болып табылады. Улыўма жағдайда сол шеклеўлер гравитациялық күшлердиң тәсирин есапқа алғандағы энергия, импульс ҳәм момент ушын баланс теңлемелери түрине ийе болады.

Усы атап өтилген улыўмалық салыстырмалық теориясының 5 өзгешелигиниң өзи бул теорияның әҳмийетин ҳәм дурыслығын айқын сәўлелендиреди.

Егер космологияға келетуғын болсақ биз төмендегилерге тоқтап өтемиз:

Эйнштейн теңлемелериниң қолланылыў областлары киши кашықлықлар менен материяның үлкен тығызлықларында шекленбеген (бул гәплер киши қашықлықлар менен үлкен тығызлықларда теңлемелердиң ишки қарама-қарсылықларға алып келмейтуғынлығының салдарында айтылған). Бундай мағанада айтқанда кеңислик-ўақытлық метриканың өзгешеликлерин изертлеў толығы менен корректли жумыс болып табылады. Соның менен бирге сондай қашықлықлар менен үлкен тығызлықларда квантлық қубылыслардың басым болып кететуғынлығына гүмән жоқ. Бирақ бундай қубылыслар ҳаққында ҳәзирги теория ҳеш нәрсе билмейди. Тек болажақта ғана тартылыс теориясы менен квант теориясының синтези классикалық теорияның қайсы нәтийжелериниң ҳақыйқый мәнислерин сақлайтуғынлығын анықлай алады. Қалай деген менен Эйнштейн теңлемелериниң шешимлеринде айырықша жағдайлардың пайда болыў факти терең физикалық мәниске ийе болады деп есаплаймыз.

Бирақ усы айтылғанларға қарамастан, улыўмалық салыстырмалық теориясына альтернативлик теориялар пайда болмақта. Неликтен альтернативлик теориялар пайда болмақта? Усы сораўға байланыслы еки тенденцияны атап өтемиз:

Биринши тенденция улыўмалық салыстырмалық теориясын классикалық (квантлық емес) гравитация областындағы дурыс емес ҳәм қанаатландырмайтуғын теория деп дағазалайды. Мәселениң бундай етип қойылыўының өзинше нюанслары бар. Екинши жағдайлар улыўмалық салыстырмалық теориясы жәрдеминде есапланған айырым шамалардың экспериментлерде анықланған шамаларға дәл сәйкес келмеўинде. Тәжирийбелер бундай теориялардың узақ ўақыт жасап атырмағанлығын көрсетеди.

Альтернативлик теориялардың ең белгилилериниң бири А.А.Логуновтың басшылығында дөретилген гравитацияның релятивистлик теориясы болып табылады. Бул ҳәм басқа да альтернатив теориялардың көпшилиги гравитацияны кеңислик-ўақыттың геометриясының өзгешелиги емес, ал ҳақыйқый физикалық майдан (мысалы электромагнит майданы, ядро күшлери майданы ҳәм басқалар) сықлы майдан деп қарайды. Демек сол теориялардың авторлары теорияның мазмунына емес, ал формасына қайыл емес. Мысалы электромагнит майданы Максвелл электродинамикасы тийкарында толық түсиндириледи ҳәм электромагнит майданы ҳақыйқый физикалық майдан болып табылады (электромагнит майданын Фарадей-Максвелл типиндеги физикалық майдан деп атаймыз, бундай көз қарастан қарағанда улыўма салыстырмалық теориясындағы гравитация майданы физикалық майдан емес, ал кеңислик-ўақыттың иймейиўи екенлиги биз көрдик). Оның (электромагнит майданының) энергия-импульс тензоры сәйкес түрлендириў ҳәм сақланыў нызамларына ийе жақсы ҳәм локаллық анықланған физикалық шама болып табылады. Улыўма салыстырмалық теориясының стандарт «геометриялық» формулировкасында болса гравитациялық энергияның локализациясы анық емес болып қалады. Бул улыўма салыстырмалық теориясының ең тийкарғы «кемшилиги» болып табылады.

2004-жылы «Успехи физических наук» журналының 6-санында «Гравитацияның релятивстлик теориясының авторлары А.А.Логунов, М.А.Мествиришвили ҳәм В.А.Петровлардың «Как былы открыты уравнения Гильберта-Эйнштейна» мақаласы шықты. Бул мақаланың авторларының мағлыўматлары бойынша гравитациялық майданның теңлемелерине Гильберт пенен Эйнштейн бир биринен ғәрезсиз еки түрли жол менен келген. Бул жоллар ҳәр қыйлы еди, бирақ бул жоллар бир мақсетке алып келген. Еки автор да өзлериниң атларының гравитациялық майданның теңлемесинде турыўы ушын урынған. Ал улыўмалық салыстырмалық теориясы болса толығы менен А.Эйнштейнниң теориясы болып табылады. Мақаланың авторларының «салыстымалылықтың дара теориясының аңлатпаларының сызықлы ортогоналлық түрлендириўлерге қарата ковариант болыўының зәрүрлиги постулатына сүйенгенлиги сықлы улыўмалық салыстырмалық теориясы барлық теңлемелер системасының анықлаўшысы (определители) 1 ге тең болған түрлендириўге қарата ковариантлылығын постулатына тийкарланған. Бул теорияның гөззаллығы усы теорияны ҳақыйқатында да түсинетуғын адамлардан жасырынып қала алмайды, теория Гаусс, Риман, Кристофел, Риччи ҳәм Ливи-

Чивиталар тәрепинен раўажландырылған абсолют дифференциаллық есаплаўдың ҳақыйқый шыңын аңғартады» сөзлери орынлы болып табылады.

Студентлердиң өз бетинше үйрениўи ушын усынылатуғын базы бир материаллар

Иймек сызықлы координаталар

Енди төрт өлшемли геометрияны ықтыярлы координаталарда пайдаланыўға қолайлы формада аңлатыўға байланыслы мәселелерди қараймыз.

Дәслеп бир x^0, x^1, x^2, x^3 координаталар системасын екинши x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 координаталар системасына түрлендириўди қараймыз.

$$x^i = f^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$$

Бул формулада f^i арқалы базы бир функция белгиленген. Координаталарды түрлендиргенде олардың дифференциаллары

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k \qquad (3.1)$$

формулаларына сәйкес түрленеди.

Контравариант 4 вектор деп сондай A^i төрт шамасының жыйнағына айтылып, координаталарды түрлендиргенде олар өзлериниң дифференциаллары

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k \qquad (3.2)$$

сыяқлы түрленеди.

Мейли φ базы бир скаляр болсын. $\partial\varphi / \partial x^i$ туўындысы координаталар түрлендирилгенде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \qquad (3.3)$$

формуласы бойынша түрленеди. *Ковариант 4 вектор* деп сондай A_i төрт шамасының жыйнағына айтылып, олар скалярдың туўындылары сыяқлы түрленеди:

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k . \qquad (3.4)$$

Тап усындай жоллар менен ҳәр қыйлы рангалардағы 4 тензорлар анықланады. Мысалы 2-рангалы A^{ik} контравариант 4 тензор деп еки контравариант вектордың көбеймеси түринде, яғный

$$A^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} A'^{lm} \qquad (3.5)$$

нызамы бойынша түрленетуғын 16 шаманың жыйнағына айтады. 2-рангалы ковариант A^{ik} тензоры

$$A_{ik} = \frac{\partial x'^{l}}{\partial x^{i}} \frac{\partial x'^{m}}{\partial x^{k}} A'_{lm} \tag{3.6}$$

нызамына сәйкес түрленеди. Ал A_k^l аралас 4 тензоры болса

$$A_k^i = \frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{l}} \frac{\partial x'^{m}}{\partial x^{k}} A'^{l}_{m} \tag{3.7}$$

формулалары бойынша түрленеди.

Берилген анықламалар Галилей координаталарындағы 4 векторлар менен 4 тензорлардың тәбийий улыўмаластырылыўы ҳәм усыған муўапық dx^i диффренциаллары контравариант, ал $\partial\varphi/\partial x^i$ туўындылары ковариант 4 вектор болып табылады[14].

Басқа 4 тензорлардың көбеймесин қайтадан көбейтиў ямаса әпиўайыластырыў арқалы 4 тензорларды Галилей координаталарында алыў қағыйдалары иймек сызықлы координаталар ушын да дурыс болады. Мысалы (2)- ҳәм (3)- түрлендириў нызамларына сәйкес еки A^iB_i 4 векторларының скаляр көбеймесиниң ҳақыйқытанда да инвариант екенлигине исениўге болады.

$$A^{i}B_{i} = \frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{i}} \frac{\partial x'^{m}}{\partial x^{i}} A'^{l} B'_{m} = \frac{\partial x'^{m}}{\partial x'^{l}} A'^{l} B'_{m} = A'^{i} B'_{i}.$$

δ_k^i бирлик 4 тензорының анықламасы иймек сызықлы координаталарға өткенде өзгермейди: оның кураўшылары $i \neq k$ да $\delta_k^i = 0$, ал $i = k$ да 1 ге тең. Егер A^k шамасы 4 вектор болып табылатуғын болса, онда δ_k^i ға көбейтиўде биз

$$A^k \delta_k^i = A^i$$

ди, яғный және де 4 векторды аламыз. Усының менен бирге δ_k^i шамасының тензор екенлиги дәлилленеди.

Иймек сызықлы координаталардағы узынлық элементиниң квадраты dx^i дифференциалларының квадратлық формасы болып табылады:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k. \tag{3.8}$$

Бул аңлатпадағы g_{ik} координаталардың функциясы. Бул g_{ik} шамасы i ҳәм k индекслерине қарата симметриялы:

$$g_{ik} = g_{ki}. \tag{3.9}$$

---

[14] Бирақ усының менен бир ўақытта Галилей системасында x^i координаталарының өзлери (тек олардың дифференциаллары ғана емес) де 4 векторды қурайды. Ал иймек сызықлы координаталарда бундай аўҳал орын алмайды.

g_{ik} ның контравариант тензор $dx^i dx^k$ ға көбеймеси (әпиўайыласыўы) скаляр болғанлықтан g_{ik} ның өзиниң ковариант тензор екенлиги келип шығады. Бул тензор *метрлик тензор* деп аталады.

Егер

$$A_{ik}B^{kl} = \delta^i_k$$

теңлиги орынланса, онда A_{ik} ҳәм B^{kl} тензорлары бир бирине кери тензорлар деп аталады. Мысалы, дара жағдайда g^{ik} контравариант метрлик тензоры деп g_{ik} тензорына кери болған тензорға айтамыз, яғный

$$g_{ik}\, g^{ik} = \delta^i_k. \qquad (3.10)$$

Бир векторлық физикалық шама контравариант қураўшыларда да, ковариант кураўшыларда да бериле алады. Ал контра- ҳәм квовариант қураўшылары арасындағы байланысты анықлайтуғын бирден бир шамалар метрлик тензордың қураўшылары болып табылады. Усындай байланыс

$$A^i = g^{ik}A^k, \quad A_i = g_{ik}A^k. \qquad (3.11)$$

Галилей координаталар системасында метрлик тензор

$$g^{(0)}_{ik} = g^{ik(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (3.12)$$

қураўшыларына ийе болады. Усының менен бирге (11)-формулалар $A^0 = A_0$, $A^{1,2,3} = -A_{1,2,3}$, байланысларын береди[15].

Жоқарыда айтылганлар тензорлар ушын да дурыс. Бир физикалық тензордың ҳәр қыйлы формалары арасындағы өтиў метрлик тензордың жәрдеминде

$$A^i{}_k = g^{il}A_{lk},\ A^{ik} = g^{il}g^{km}A_{lm}$$

ҳ.т.б. формулалар жәрдеминде әмелге асырылады.

Төрт өлшемли векторларды қарағанымызда координаталардың Галилей системасындағы e^{iklm} антисимметриялық бирлик тензоры анықланған еди. Енди оны ықтыярлы түрде алынған координаталардың иймек сызықлы системасына түрлендиремиз ҳәм оны енди E^{iklm} арқалы белгилеймиз. $e^{0123} = 1$ (ямаса e_{0123} = -1) мәнислери бойынша бурынғыдай жоллар менен анықланған шамалар ушын e^{iklm} белгилеўин сақлаймыз.

Мейли x'^I Галилей, ал x'^I ықтыярлы иймек сызықлы координаталар болсын. Тензорларды түрлендириўдиң улыўмалық қағыйдасына сәйкес

---

[15] Сәйкеслик ҳаққында гэп етип координаталардың Галилей системасын биз қолланғанымызда усындай координаталар системасын тек тегис 4 кеңисликте сайлап алыўға болатуғынлығын нәзерде тутыўымыз керек. Ал иймек 4 кеңислик ҳаққында гэп болғанда 4 кеңисликтиң шексиз киши көлемдеги сайлап алынған галилей координаталары (бундай системаны барлық ўақытта да сайлап алыўға болады) ҳаққында гэп етиў керек. Усындай анықлылық киргизиўдиң салдарынан шығарылған барлық жуўмақлар өзгериссиз калады.

$$E^{iklm}=\frac{\partial x^i}{\partial x'^p}\frac{\partial x^k}{\partial x'^r}\frac{\partial x^l}{\partial x'^s}\frac{\partial x^m}{\partial x'^t}e^{prst}$$

ға ийе боламыз ямаса

$$E^{iklm}=Je^{prst}.$$

Бул аңлатпада J арқалы $\partial x^i/\partial x'^p$ туўындыларынан қуралған анықлаўшы белгиленген, яғный бул шама Галилей координаталарынан иймек сызықлы коориднаталарға түрлендириўдиң якобианы болып табылады:

$$J=\frac{\partial(x^0,x^1,x^2,x^3)}{\partial(x'^0,x'^1,x'^2,x'^3)}.$$

Бул якобианды метрлик тензор g_{ik} ның анықлаўшысы аркалы аңлатыўға болады (x^i системасында). Буның ушын метрлик тензордың түрлениў формуласын жазамыз

$$g^{ik}=\frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x^k}{\partial x'^m}g^{lm(0)}$$

ҳәм усы теңликлиң еки тәрепинде турған шамалардан туратуғын анықлаўшыларды бир бири менен теңлестиремиз. Кери тензордың анықлаўшысы $\left|g^{ik}\right|=1/g$. $\left|g^{lm(0)}\right|$ анықлаўшысы болса -1 ге тең ($\left|g^{lm(0)}\right|=-1$). Сонлықтан 1/g = -J² екенлигине ийе боламыз, буннан $J=1/\sqrt{-g}$ екенлиги келип шығады.

Солай етип иймек сызықлы координаталарда 4-рангалы бирлик антисимметриялы тензор

$$E^{iklm}=\frac{1}{\sqrt{-g}}e^{iklm} \tag{3.13}$$

түринде анықланыўы керек. Бул тензордың индекслерин түсириў

$$e^{prst}g_{ip}g_{kr}g_{ls}g_{mt}=-ge_{iklm}$$

формуласының жәрдеминде әмелге асырылады, сонлықтан оның ковариант қураўшылары

$$E_{iklm}=\sqrt{-g}e_{iklm}. \tag{3.14}$$

Галилей координата системасында $d\Omega'=dx'^0dx'^1dx'^2dx'^3$ бойынша алынған интеграл x'^i та скаляр болып табылады, яғный $d\Omega'$ элементи интеграллағанда скаляр қәсийетине ийе болады (жоқарыдағы параграфты караңыз). Иймек сызықлы x^i координаталарына түрленгенде интеграллаўдың $d\Omega'$ элементи мынаған өтеди:

$$d\Omega' \rightarrow \frac{i}{J} d\Omega = \sqrt{-g} d\Omega.$$

Солай етип иймек сызықлы координаталарда 4 көлем бойынша интеграллағанда $\sqrt{-g} d\Omega$ көбеймеси инвариант болып табылады[16].

Ең биринши параграфтың ақырында айтылған гипербет, бет ҳәм сызық бойынша интеграллаў элементлери иймек сызықлы координаталарда да өз күшин сақлайды. Бирақ биз бул жерде дуаллық тензорлардың анықламасының азмаз өзгеретуғынлығын айтып өтиўимиз керек. Үш шексиз киши аўысыўлардан қурылған гипербеттиң «майданының» элементи dS^{ikl} контравариант антисимметриялық тензор болып табылады. Оған дуаллық болған вектор $\sqrt{-g} e_{iklm}$ тензорына көбейтиўдиң нәтийжесинде алынады, яғный

$$\sqrt{-g} dS_i = -\frac{1}{6} e_{iklm} dS^{klm} \sqrt{-g}. \qquad (3.15)$$

шамасына тең.

Тап усыған сәйкес, егер df^{ik} шексиз киши аўысыўлардан қурылған бет элементи болатуғын болса (еки өлшемли), онда оған дуаллық болған вектор былайынша анықланады[17]:

$$\sqrt{-g} df^*_{ik} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} e_{iklm} df^{lm}. \qquad (3.16)$$

Бизлер бурынғыдай $\frac{1}{6} e_{iklm} dS^{klm} \sqrt{-g}$, $\frac{1}{2} \sqrt{-g} e_{iklm} df^{lm}$ ушын сәйкес dS_i ҳәм df^*_{ik} белгилеўлерин қалдырамыз (олардың $\sqrt{-g}$ ға көбеймеси ушын емес). Ҳәр қыйлы интегралларды бир бирине түрлендириўдиң (14-19)-қағыйдалары бурынғыдай болып калады. Себеби оларды келтирип шығарыў сәйкес шамалардың тензорлық характеринен ғәрезсиз формал характерге ийе. Олардың ишинде бизге гипербет бойынша интегралды 4 көлем бойынша интегралға түрлендириў айрықша керек болады (Гаусс теоремасы). Бул түрлендириў

$$dS_i \rightarrow d\Omega \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad (3.17)$$

---

[16] Егер φ скаляр болатуғын болса, онда dΩ бойынша интеграллағанда инвариант беретуғын $\sqrt{-g}\varphi$ шамасын әдетте *скаляр тығызлық* деп атайды. Усыған сәйкес векторлық ҳәм тензорлық тығызлықлар $\sqrt{-g} A^i$, $\sqrt{-g} A^{ik}$ ҳ.т.б. ҳаққында айтады. Бул шамалар 4 көлем элементи dΩ га көбейтилгенде векторды ямаса тензорды береди (улыўма айтқанда шекли область бойынша $\int A^i \sqrt{-g} d\Omega$ интегралы вектор болып табылмайды, себеби A^i векторының түрлениў нызамлары областтың ҳәр кайлы ноқатларында ҳәр кыйлы).

[17] Усы жағдайларда x^i координатасының геометриялық мәнисиниң кандай болыўынан ғәрезсиз dS^{klm} ҳәм df^{ik} элементлери шексиз киши аўысыўлар dx^i, dx'^i, dx''^i лерден қурылған болады. Бундай жағдайда dS_l, df^*_{ik} элементлериниң бурынғы формаллық мәнислери де өз күшинде калады. Мысалы, дара жағдайда $dS_0=dx^1dx^2dx^3=dV$. Биз буннан былай dV белгисин үш кеңисликлик координаталардың дифференциалларының көбеймесин белгилеў ушын сақлап каламыз. Бирақ барлық ўақытта да кеңисликлик көлемниң геометриялық элементиниң иймек сызықлы координаталарда dV ның өзи арқалы емес, ал $\sqrt{\gamma} dV$ көбеймеси арқалы берилетуғынлығын умытпаў керек. Бул көбеймеде γ арқалы кеңисликлик метрлик тензордың анықлаўшысы белгиленген (бул шама келеси параграфта табылады).

алмастырыўы менен әмелге асады.

Қашықлықлар ҳәм ўақыт аралығы

Улыўмалық салыстырмалық теориясында есаплаў системасын сайлап алыў ҳеш қандай шекленбеген; x^1, x^2, x^3 кеңисликлик координаталары дененин кеңисликтеги орнын анықлайтуғын қәлеген шамалар болыўы мүмкин, ал ўақытлық координата x^0 ықтыярлы түрде жүретуғын саатлар жәрдеминде анықланады. Усыған байланыслы сораў туўылады: x^0, x^1, x^2, x^3 шамаларының қандай мәнислери бойынша ҳақыйқый қашықлықлар менен ўақыт аралықларын табыўға болады?

Биз сол ҳақыйқый ўақыт аралығын τ арқалы белгилеймиз ҳәм оның x^0 координатасы менен байланысын табамыз. Буның ушын кеңисликтиң бир ноқатында жүз беретуғын бир бирине шексиз жақын еки ўақыяны караймыз. Бундай жағдайда сол еки ўақыя арасындағы интервал ds^2 тың шамасы $cd\tau$ дан басқа ҳеш нәрсе емес, бул жерде $d\tau$ аркалы еки ўақыя арасындағы (ҳақыйқый) ўақыт аралығы. $d\,x^1 = dx^2 = dx^3 = 0$ деп болжап улыўмалық $ds^2=g_{ik}dx^idx^k$ аңлатпасынан

$$d\,s^2 = c^2d\tau^2 = g^{00}(dx^0)^2$$

екенлигине ийе боламыз. Буннан

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}dx^0 \qquad (4.1)$$

ямаса кеңисликтиң бир ноқатында жүзеге келетуғын қәлеген еки ўақыя арасындағы ўақыт ушын

$$\tau = \frac{1}{c}\int\sqrt{g_{00}}dx^0 \qquad (4.2)$$

шамасын аламыз.

Бул катнаслар x^0 координатасының өзгериўи бойынша ҳақыйқый ўақыт аралығын (ямаса кеңисликтиң берилген ноқаты ушын *меншикли ўақытты*) анықлайды. Келтирилген формулалардан g_{00} шамасының оң мәниске ийе екенлиги көринип тур:

$$g_{00} > 0. \qquad (4.3)$$

(3)-шәрттиң мәниси менен g_{ik} тензорының анық сигнатурасы (бас мәнислердиң белгиси) шәртиниң мәнисиниң айырмасын атап өтиў зәрүр.Усы шәртлердиң еикншисин қанаатландырмайтуғын g_{ik} тензоры қандай да бир ҳақыйқый гравитациялық майданға (яғный кеңислик-ўақыттың метрикасына) сәйкес келе алмайды. (3)-шәрттиң орынланбаўы сәйкес есаплаў системасының ҳақыйқый денелер тәрепинен жүзеге келе алмайтуғынлығын билдиреди. Егер бас мәнислер ҳаққындағы шәртлер усы жағдайда орынланатуғын болса, онда координаталарды зәрүр болғанынша түрлендирип g_{00} диң оң мәниске ийе болыўына жетисиў мүмкин (усындай системаға мысал ретинде айланыўшы координаталар системасын көрсетиў мүмкин).

Енди кенисликтеги қашықлық болған dl элементин анықлаймыз. Арнаўлы салыстырмалық теориясында dl ди бир ўақыт моментинде жүзеге келетуғын бир бирине шексиз жақын жайласқан еки ўақыя арасындағы кашықлық сыпатында анықлайды. Улыўма айтқанда улыўмалық салыстырмалық теориясында буны ислеўге болмайды, яғный $dx^0=0$ ди ds ке қойып dl ди анықлаўға болмайды. Себеби гравитация майданында кеңисликтиң ҳәр кыйлы ноқатларындағы меншикли ўақыт x^0 координатасы менен ҳәр қыйлы болып байланысқан.

dl шамасын анықлаў ушын енди былайынша ҳәрекет етемиз.

Мейли кеңисликтиң базы бир B ноқатынан оған шексиз жақын турған (координаталары $x^\alpha + dx^\alpha$ болған) A ноқатына жақтылық сигналы жиберилсин. Буннан кейин сигнал тап сол жол бойынша кери қарай жиберилсин. Усы ушын зәрүр болған (тек бир B ноқатында өлшенетуғын) ўақыттың c ға көбеймеси сол еки ноқат арасындағы қашықлықтың еки еселенген мәниси болып табылады.

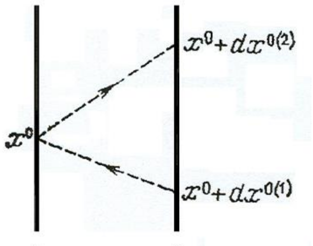
Кеңисликлик ҳәм ўақытлық координаталарды айырып көрсетип интервалды жазамыз:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + g_{0\alpha}dx^0 dx^\alpha + g_{00}\left(dx^0\right)^2. \tag{4.4}$$

Бул аңлатпада да әдеттегидей еки рет қайталанатуғын грек индекслери бойынша 1, 2, 3 мәнислери бойынша суммалаў нәзерде тутылады. Бириншиси бир ноқаттан сигналдың кетиўи, ал екиншиси екинши ноқатта сол сигналдың келиўи болған ўақыялар арасындағы интервал нолге тең. $ds^2 = 0$ теңлемесин dx^0 ге қарата шешиўдиң нәтийжесинде сигналдың A ҳәм B ноқатлары арасында еки бағытта тарқалыўына сәйкес келетуғын еки түбир аламыз:

$$\begin{aligned} dx^{0(1)} &= \frac{1}{g_{00}}\left(-g_{0\alpha}dx^\alpha - \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})dx^\alpha dx^\beta}\right), \\ dx^{0(2)} &= \frac{1}{g_{00}}\left(-g_{0\alpha}dx^\alpha + \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})dx^\alpha dx^\beta}\right). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Егер x^0 арқалы A ноқатына сигналдың келип жетиў мометни белгиленген болса, онда оның B дан жиберилиў ҳәм кери қарай B ға қайтып келиў мосентлери сәйкес $x^0+dx^{0(1)}$ ҳәм $x^0+dx^{0(2)}$ болады. Бул жағдай схема түринде мына сүўретте келтирилген:



Бунда тутас туўрылар берилген x^α ҳәм $x^\alpha+dx^\alpha$ координаталарына сәйкес келиўши дүньялық сызықлар, ал штрихланған сигналлар ушын дүньялық сызықлар[18]. Бир

---

[18] Сүўретте $dx^{0(2)}>0$, $dx^{0(1)}<0$ деп болжанған. Бирақ бул шәртли емес: $dx^{0(2)}$ пенен $dx^{0(1)}$ диң белгилери бирдей болыўы да мүмкин. Усындай жағдайдағы A ноқатына сигналдың келип жетиў моменти x^0(A) дың мәнисиниң сигналдың B ноқатынан шығыў моменти x^0(B) дан киши болыў факты ҳеш қандай қарама-қарсылыққа ийе болмайды. Себеби кеңисликтиң ҳәр қыйлы ноқатларындағы саатлардың жүриўи қандай да бир усыл менен синхронластырылған деп болжанбайды.

ноқаттан сигналдың жиберилип ҳәм усын ноқатта қабыл етилиўи арасындағы толық ўақыттың

$$dx^{0(2)} - dx^{0(1)} = \frac{2}{g_{00}} \sqrt{(g_{0\alpha} g_{0\beta} - g_{\alpha\beta} g_{00}) dx^{\alpha} dx^{\beta}}$$

екенлиги анық. Сәйкес келиўши ҳақыйкый ўақыттың мәниси (1) ге байланыслы $\sqrt{g_{00}}\,/c$ ға көбейтиў, ал еки ноқат арасындағы dl қашықлығы және c/2 ге көбейтиў арқалы алынады. Нәтийжеде аламыз:

$$dl^2 = \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}} \right) dx^{\alpha} dx^{\beta}.$$

Бул аңлатпа биз излеп атырған кеңисликлик координаталар элементи арқалы анықланатуғын қашықлық ушын жазылган аңлатпа болып табылады. Оны мына түрде кайтадан көширип жазамыз:

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}. \tag{4.6}$$

Бул аңлатпадағы

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}} \tag{4.7}$$

шамасы үш өлшемли тензор болып, метриканы, яғный кеңисликтиң геометриялық қәсийетлерин анықлайды. (7)-қатнаслар арқалы реал кеңисликтиң метрикасы менен төрт өлшемли кеңислик-ўақыттың метрикасы арасындағы байланыс орнатылады[19].

Бирақ соны атап өтиў керек, улыўма айтқанда g_{ik} шамасы x^0 ден ғәрезли, демек (4.6)-кеңисликлик метрика ўақытқа байланыслы өзгереди. Усы себепке байланыслы dl ди интеграллая мәниске ийе болмайды – усындай интегралдың кеңисликтиң берилген ноқатлары арасындағы дүньялық сызықтан алынғанлығынан ғәрезли болған болар еди. Солай етип улыўма айтқанда улыўмалық салыстырмалық теориясында денелер арасындағы анық бир қашықлық ҳаққындағы мәнис жоғалады,

---

[19] (6)- квадратлық форма оң мәниске ийе болыўы керек. Сонлықтан оның коэффициентлери мына шәртлерди қанаатландырыўы лазым:

$$\gamma_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{vmatrix} > 0.$$

γ_{ik} ны g_{ik} арқалы аңлатып бул шәртлердиң мына түрди қабыл ететуғынлығын аңсат табыўға болады:

$$\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad g < 0.$$

Бул шәртлерди (3)-шәртлер менен бирге қәлеген есаплаў системасындағы метрлик тензордың қураўшылары қанаатландырыўы керек. Бундай есаплаў системасиниң ҳақыйқый денелер жәрдеминде әмелге асырылыўы мүмкин..

ал тек шексиз киши қашықлықлар хаққында айтқанда ғана өз күшин сақлайды. Қашықлықлар кеңисликтиң шекли областында анықланатуғын бирден бир жағдай бар: бул жағдайда g_{ik} ўақытқа ғәрезли болмайтуғын есаплаў системасы бар болып, сонлықтан бул системада $\int dl$ интегралы кеңисликлик иймеклик бойынша базы бир анық мәниске ийе болады.

Мынаны аңғарыў пайдалы: $\gamma_{\alpha\beta}$ тензоры үш өлшемли контравариант $g^{\alpha\beta}$ тензорына кери тензор болып табылады. Ҳақыйқатында да қураўшыларда $g^{ik}g_{kl} = \delta^i_l$ теңлигин жазып

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta}g_{\gamma\beta} + g^{\alpha 0}g_{\gamma\beta} &= \delta^{\alpha}_{\gamma}, \\ g^{\alpha\beta}g_{\beta 0} + g^{\alpha 0}g_{00} &= 0, \\ g^{0\beta}g_{\beta 0} + g^{00}g_{00} &= 1. \end{aligned} \qquad (4.8)$$

$g^{\alpha 0}$ ди екинши теңликтен анықлап ҳәм оны бириншиге қойып аламыз:

$$-g^{\alpha\beta}\gamma_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}.$$

Усы теңликтиң дурыслығын дәлиллеў талап етилген еди. Бул нәтийжени басқаша да айтыў мүмкин: $g^{\alpha\beta}$ шамалары (4.6)

$$\gamma^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta} \qquad (4.9)$$

метрикасына жуўап беретуғын контравариант үш өлшемли метрлик тензорды қурайды.

Және де бир әҳмийетли жағдайды көрсетип өтемиз: g_{ik} ҳәм $\gamma_{\alpha\beta}$ шамаларынан туратуғын g ҳәм γ анықлаўшылары бир бири менен әпиўайы

$$- g = g_{00}\gamma \qquad (4.10)$$

қатнасы менен байланысқан.

Кейинирек қолланыў ушын ковариант қураўшылары

$$g_{\alpha} = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} \qquad (4.11)$$

болған үш өлшемли g векторын киргизген қолайлы. g ны кеңисликтеги метрикасы (6) болған вектор сыпатында қарап оның контравариант қураўшыларын $g^{\alpha} = \gamma^{\alpha\beta}g_{\beta}$ түринде анықлаўымыз керек. (9) бенен (8)-теңликтиң екиншисинен

$$g^{\alpha} = \gamma^{\alpha\beta}g_{\beta} = -g^{0\alpha} \qquad (4.12)$$

екенлигин аңсат көриўге болады.

(8)-теңликлердиң үшиншисинен келип шығатуғын

$$g^{00} = \frac{1}{g_{00}} - g_{\alpha}g^{\alpha} \qquad (4.13)$$

формуласын да атап өтемиз.

Енди улыўмалық салыстырмалық теориясындағы бир ўақытлылық түсинигин анықлаўға өтемиз. Басқа сөз бенен айтқанда кеңисликтиң ҳәр қыйлы ноқатларында турған саатларды синхронхронластырыў мүмкиншилиги ҳаққындағы мәселени анықлаймыз (яғный бул саатлардың көрсетиўлерин бир бирине сәйкеслендириў).

Әлбетте бундай синхронластырыў еки ноқат арасында жақтылық сигналларын алмасыў менен әмелге асырылады. Жоқарыдағы сүўретте келтирилген бир бирине шексиз жақын жайласқан A ҳәм B ноқатлары арасындағы сигналлардың тарқалыў процессин және қараймыз. A ноқатындағы x^0 моменти менен B ноқатындағы сааттың

$$x^0 + \Delta x^0 = x^0 + \frac{1}{2}(dx^{0(2)} + dx^{0(1)})$$

көрсетиўин бир ўақыт деп қараў керек (бул момент сигналдың жиберилиў моменти менен сигналдың усы ноқатқа кери қарай қайтып келиў моментлериниң ортасы болып табылады).

Бул аңлатпаға (5) ти қойып бир бирине шексиз жақын ноқатларда болып өтетуғын еки бир ўақытлы ўақыялар ушын x^0 «ўақыттың» мәнислериниң айырмасын мына түрде табамыз:

$$\Delta x^0 = -\frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{g_{00}} \equiv g_\alpha dx^\alpha. \qquad (4.14)$$

Бул қатнас кеңисликтиң қәлеген шексиз киши көлеминдеги саатларды синхронластырыўға мүмкиншилик береди. Усындай синхронластырыўды A ноқатынан арман қарай өтип даўам етиў арқалы саатларды синхронластырыў, яғный қәлеген туйық емес сызық бойынша ўақыялардың бир ўақытлылығын анықлаў мүмкин[20].

Туйық контур бойынша саатларды синхронластырыў улыўма айтқанда мүмкин емес. Ҳақыйқатында да контур бойынша жүрип дәслепки ноқатқа қайтып келгенде Δx^0 ушын нолге тең емес мәнис алған болар едик. Қала берсе барлық кеңислик бойынша саатларды бир мәнисли синхронластырыў мүмкин болмай шығады. Ал $g_{0\alpha}$ барлық қураўшылары нолге тең болған есаплаў системалары буған кирмейди[21].

Барлық саатларды синхронластырыўдың мүмкин емес екенлиги ықтыярлы есаплаў системасының қәсийети екенлигин, ал кеңислик-ўақыттың қәсийети емес екенлигин атап өтемиз. Қәлеген гравитация майданында есаплаў системасын $g_{0\alpha}$ үш шамасын нолге тең болатуғындай етип (ҳәтте шексиз көп усыллар менен) сайлап алыў ҳәм соған сәйкес барлық саатларды синхронластырыўды әмелге асырыў мумкин болады.

Арнаўлы салыстырмалық теориясында ҳақыйкый ўақыттың өтиўи бир бирине салыстырғанда қозғалатуғын саатларды ҳәр кыйлы. Ал улыўмалық салыстырмалық теориясында болса ҳақыйқый ўақыт бир есаплаў системасының ҳәр қыйлы ноқатларында ҳәр қыйлы болып өтеди. Бул кеңисликтиң базы бир ноқатында

---

[20] (14)-теңликти g_{00} ге көбейтип ҳәм еки ағзаны да бир тәрепке шығарып синхронластырыя шәртин $dx_0=g_{0i}dx^i=0$ түриндекөз алдыға келтириў мүмкин: бир бирине шексиз жақын бир ўақытта жүзеге келетуғын ўакыятлар арасындағы «ковариант дифференциал» dx_0 диң мәниси нолге тең болыўы керек.

[21] Буған кеңисликлик координаталарды анықлаў ушын хызмет ететуғын объектлер системасын сайлап алыўға тәсир етпейтуғын $g_{0\alpha}$ ўақыт координатасын әпиўайы түрлендириўдиң нәтийжесинде нолге айландырыў мүмкин болған жағдайларды айтып өтиў керек.

өтетуғын еки ўақыяның арасындағы меншикли ўақыттың интервалы ҳәм кеңисликтиң басқа бир ноқатындағы сол ўақыялар менен бир ўақытта болып өтетуғын ўақыялар арасындағы ўақыт интервалы, улыўма айтқанда, бир бирине тең емес.

Ковариант дифференциаллаў

Галилей координаталарында[22] A_i векторының дифференциаллары dA_i векторды пайда етеди, ал вектордың қураўшылары бойынша алынған $\partial A_i/\partial x^k$ туўындылары тензорды пайда етеди. Ал иймек сызықлы координаталарда бундай жағдай орын алмайды: dA_i вектор емес, ал $\partial A_i/\partial x^k$ туўынды емес. dA_i кеңисликтиң бири бирине шексиз жақын еки ҳәр қыйлы ноқатларында турған векторлардың айырмасы, ал кеңисликтиң ҳәр кыйлы ноқатларында векторлар ҳәр қыйлы болып түрленеди. Себеби (5.2)-, (5,3)-түрлендириў формулаларындағы коэффициентлер координаталардың функциялары болып табылады.

Айтылғанлардың дурыслығына тиккелей исениўге болады. Усы мақсетте иймек сызықлы координаталардағы dA_i дифференциалларының түрлениў формулаларын келтирип шығарамыз. Ковариант вектор

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k$$

формуласына сәйкес түрленеди. Сонлықтан

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k\, d\frac{\partial x'^k}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^l} dx^l.$$

Солай етип dA_i вектор сыпатында түрленбейди екен (усындай гәплер контравариант векторлардың дифференциалларына да тийисли). Тек бир жағдайда, егер екинши туўындылар $\frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^l} = 0$, яғный x'^k шамалары x^k ның сызықлы функциялары болса, онда түрлендириў формулалары

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k$$

түрине ийе болады (яғный бул дара жағдайда dA_i вектор сыпатында түрленеди).

Енди биз иймек сызықлы координаталарда тензор ролин ойнайтуғын Галилей координаталарындағы $\partial A_i/\partial x^k$ тензорын анықлаў менен шуғылланамыз. Басқа сөз бенен айтқанда биз $\partial A_i/\partial x^k$ ди Галилей координаталарынан иймек сызықлы координаталарға түрлендириўимиз керек.

Иймек сызықлы координаталарда вектор болып табылатуғын вектордың дифференциалын алыў ушын бир биринен алынатуғын еки вектордың да кеңисликтиң бир ноқатында жайласыўы шәрт. Басқа сөз бенен айтқанда бир бирине шексиз жақын жайласқан векторлардың биреўин қандай да бир жоллар менен екиншиси турған орынға көширип, буннан кейин енди кеңисликтиң бир ноқатында жайласқан еки вектордың айырмасын табыў керек. Ал векторды көшириў операциясы Галилей координаталарында көрсетилген айырма әдеттеги

---

[22] Бул жерде g_{ik} шамалары турақлы болатуғын барлық жағдайлар нәзерде тутылады.

дифференциал dA_i ге сәйкес келетуғындай етип анықланыўы керек. dA_i бир бирине шексиз жақын турған еки вектордың қураўшыларының айырмасы болғанлықтан, бул Галилей координаталарын қолланғанда векторды көшириў операциясының нәтийжесинде сол вектордың кураўшыларының өзгермеўиниң керек екенлигин билдиреди. Бундай көшириў векторды өзине өзин параллел қалдырып көшириў болып табылады. Векторды *параллел көширгенде* оның қураўшылары Галилей координаталарында өзгермей калады. Ал иймек сызықлы координаталарды қолланғанда вектордың қураўшылары, улыўма айтқанда, өзгереди. Сонлықтан иймек сызықлы координаталарда бир векторды екиншиси турған орынға көширгеннен кейинги қураўшыларының айырмасы көширместен бурынғы қураўшыларының айырмасына тең болмайды.

Солай етип шексиз жақын еки векторды салыстырыў ушын олардың биринши син екиншиси турған ноқатқа параллел түрде көшириў керек. Қандай да бир контравариант векторды қараймыз; егер оның мәниси координаталары x^i болған ноқатта A^i болса, онда қоңысылас $x^i + dx^i$ ноқатында оның мәниси $A^i + dA^i$ ге тең болады. Усының нәтийжесиндеги оның өзгерисин δA^i арқалы белгилеймиз. Бундай жағдайда енди бир ноқатта жайласқан еки вектор арасындағы айырма

$$DA^i = dA^i - \delta A^i \tag{5.1}$$

шамасына тең.

Шексиз киши параллел көширгендеги вектордың қураўшыларының δA^i өзгериси усы қураўшылардың өзлериниң мәнислеринен ғәрезли болады ҳәм бул ғәрезлиликтиң сызықлы болыўының зәрүрлиги шәрт. Бул жағдай векторлардың қосындысының олардың ҳәр бириндей болып түрлендирилетуғынлығынан тиккелей келип шығады. Солай етип δA^i

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{kl} A^k dx^l \tag{5.2}$$

түрине ийе болады. Бул аңлатпада Γ^i_{kl} арқалы түри координаталар системасын сайлап алыўға байланыслы болған координаталардың базы бир функциялары белгиленген. Галилей системасында $\Gamma^i_{kl} = 0$.

Γ^i_{kl} шамаларының тензорды пайда етпейтуғынлығы усы жерде көринип тур. Себеби бир координата системасында нолге тең тензор басқа қәлеген координата системасында да нолге тең болады. Қыйсайған кеңисликте координаталар қандай етип сайлап алынғанда да барлық Γ^i_{kl} лер барлық орынларда нолге тең болмайды.

Эквивалентлик принципи координаталар системасын сәйкес түрде сайлап алғанда кенисликтиң берлигне шексиз киши көлеминде гравитация майданын жоқ етиўге болады. Буннан гравитация майданының кернеўлилигиниң орнын ийелейтуғын Γ^i_{kl} шамаларын нолге айландырыўдың мүмкин екенлигин көремиз[23].

Γ^i_{kl} шамаларын *байланысқанлық коэффициенти* ямаса *Кристоффель символлары* деп атайды.

---

[23] Барлық талқылаўларда усындай координаталар системасын нәзерде тутыў керек, бул жерде биз қысқалық ушын Галилей системасы ҳаққында гәп етемиз. Усының менен бирге барлық дәлиллеўлер тек тегис 4 кеңисликке емес, ал иймек сызықлы 4 кеңисликке де тийисли болып шығады.

Биз төменде $\Gamma_{i,ki}$ шамаларын да пайдаланамыз[24]. Бул шамалар былайынша анықланады:

$$\Gamma_{i,ki} = g_{lm}\Gamma^{m}_{kl}. \qquad (5.3)$$

Кериси

$$\Gamma^{i}_{ki} = g^{im}\Gamma_{m,kl}. \qquad (5.4)$$

Ковариант вектордың параллел көшириўлердеги қураўшыларының өзгерислерин Кристоффель символлары менен байланыстырыў аңсат. Буның ушын параллел көшириўлерде скалярлардың өзгермейтуғынлығын аңғарыўымыз керек. Мысалы, параллел көшириўде еки вектордың скаляр көбеймеси өзгермейди.

Мейли A_i ҳәм B^i базы бир ковариант ҳәм контравариант векторлар болсын. Онда $\delta(A_iB^i)=0$ ден ийе боламыз:

$$B^i\delta A_i = -A^i\delta B^i = \Gamma^{i}_{kl} B^kA_idx^l$$

ямаса индекслердиң белгилеўлерин өзгертип

$$B^i\delta A_i = \Gamma^{k}_{il} A_kB^idx^l.$$

Буннан B^i диң ықтыярлы екенлигин нәзерде тутамыз ҳәм параллел көшириўде ковариант вектордың

$$\delta A_i = \Gamma^{k}_{il} A_kdx^i. \qquad (5.5)$$

шамасына өзгеретуғынлығы анықланады.

(5.2) менен $dA^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^l}dx^l$ ди (5.1) ге қойып мынаған ийе боламыз:

$$DA^i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^i} + \Gamma^{i}_{kl}A^k\right)dx^i. \qquad (5.6)$$

Тап сондай жоллар менен ковариант вектор ушын табамыз:

$$DA_i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^i} + \Gamma^{k}_{il}A_k\right)dx^l. \qquad (5.7)$$

(5.6)- ҳәм (5.7)-аңлатпалардағы каўсырмалардың ишинде турған аңлатпалар тензорлар болып табылады, себеби dx^i векторына көбейгеннен кейин олар және векторды береди. Әлбетте олар вектордан алынған туўынды түсинигин иймек сызықлы координаталарға биз излеп атырған улыўмаластырыўды амелге асыратуғын тензорлар болып табылады. Бул тензорлар A^l ҳәм A_i векторларының

---

[24] Γ^{i}_{kl} ямаса $\Gamma_{i,ki}$ белгилеўлеринин орнына гейде сәйкес $\left\{\begin{matrix} kl \\ i \end{matrix}\right\}$ ҳәм $\left[\begin{matrix} kl \\ i \end{matrix}\right]$ белгилеўлери де пайдаланылады.

сәйкес *ковариант туўындылары* деп аталады. Бизлер оларды $A^i_{;k}$ ҳәм $A_{i;k}$ арқалы белгилеймиз. Солай етип

$$DA^i = A^i_{;i}dx^i, \ \ DA_i = A_{i;i}dx^l, \tag{5.8}$$

ал ковариант туўындылардың өзлери

$$A^i_{;i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl}A^k, \tag{5.9}$$

$$A_{i;l} = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il}A_k. \tag{5.10}$$

Галилей координаталарында Γ^i_{kl} = 0 ҳәм ковариант туўындылар әдеттеги туўындыларға өтеди.

Тензордың ковариант туўындысын да аңсат анықлаўға болады. Дуның ушын шексиз киши параллел көшириўдеги тензордың өзгерисин анықлаў керек. Мысал ретинде еки контравариант A^iB^k векторларының көбеймеси болып табылатуғын қандай да бир контравариант тензорды қараймыз. Параллел көшириўде

$$\delta(A^iB^k) = A^i\delta B^k + B^k\delta A^i = -A^i\Gamma^k_{lm}B^l dx^m - B^k\Gamma^i_{lm}A^l dx^m$$

аңлатпасына ийе боламыз. Бул түрлендириўдиң сызықлы екенлигине байланыслы ол (бундай түрлендириў) қәлеген A^{ik} тензоры ушын орын алады:

$$\delta A^{ik} = -(A^{lm}\Gamma^k_{ml} + A^{mk}\Gamma^i_{ml})dx^l. \tag{5.11}$$

Буны

$$DA^{ik} = dA^{ik} - \delta A^{ik} \equiv A^{ik}_{;l}dx^l$$

теңлигине қойып A^{ik} тензорының ковbooринат туўындысын

$$A^{ik}_{;l} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ml}A^{mk} + \Gamma^k_{ml}A^{ik} \tag{5.12}$$

түринде аламыз.

Тап усындай жоллар менен аралас ҳәм ковариант тензорлардың ковариант туўындыларын табамыз:

$$A^i_{k;l} = \frac{\partial A^i_k}{\partial x^l} - \Gamma^m_{kl}A^i_m + \Gamma^i_{ml}A^m_k, \tag{5.13}$$

$$A_{ik;l} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma^m_{il}A_{mk} - \Gamma^m_{kl}A_{lm}. \tag{5.14}$$

Усындай жоллар менен қәлеген рангадағы ықтыярлы тензордың ковариант туўындысын табыў мүмкин. Усының менен бирге ковариант дифференциаллаўдың мынадай қағыйдасы алынады: $A^{\cdots}_{\cdots}$ тензорының x^l бойынша ковариант туўындысын алыў ушын әдеттеги $\partial A^{\cdots}_{\cdots}/\partial x^l$ туўындысында ҳәр бир $i(A^{\cdots}_{.i.})$ ковариант индексине $-\Gamma^k_{ii}A^{\cdots}_{.k.}$ ағзасын, ал ҳәр бир контравариант $iA^{.i.}_{\cdots}$ индексине $+\Gamma^i_{kl}A^{.k.}_{\cdots}$ қосыў керек.

Туўындыдан ковариант туўынды алыў қағыйдасының туўындыдан әдеттеги туўынды алыў менен бирдей екенлигине аңсат исениўге болады. Бундай жағдайда φ скалярынан алынған ковариант туўындыны әдеттегидей туўынды деп түсиниў керек, яғный скалярлар ушын $\delta\varphi = 0$ ҳәм сонлықтан $D\varphi = d\varphi$ болғанлықтан $\varphi_k = \partial\varphi/\partial x^k$. Мысалы A_iB_k көбеймесиниң ковариант туўындысы мынаған тең:

$$(A_iB_k)_{;l} = A_{i;l}B_k + A_iB_{k;l}.$$

Ковариант туўындылардан дифференциаллаўды көрсететуғын индексти көтерип биз контравариант туўындылар деп аталатуғын туўындыларды аламыз:

$$A_i^{;k} = g^{ki}A_{i;l},\ A^{i;k} = g^{kl}A^i_{;l}.$$

Енди Кристоффель символлары ушын бир координаталар системасынан екинши координаталар системасына түрлендириў формулаларын аламыз.

Бул формулаларды ковариант туўындылардың ишинен қәлегенин анықлайтуғын теңликтиң еки тәрепинең де түрлениў нызамын салыстырып ҳәм бул нызамның теңликтиң еки бөлими ушын да бирдей болыўын талап етип алыўға болады. Әпиўайы есаплаўлар мына формулаға алып келеди:

$$\Gamma^i_{ki} = \Gamma'^m_{np}\frac{\partial x^i}{\partial x'^m}\frac{\partial x'^n}{\partial x^k}\frac{\partial x'^p}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x'^m}. \tag{5.15}$$

Бул формуладан Γ^i_{ki} шамаларының тек координаталарды сызықлы түрлендириўге қатнасы бойынша ғана тензордың қәсийетиндей қәсийетке ийе болатуғынлығы көринип тур [(5.15) теги екинши ағза жоғалған жағдайда].

Бул ағзаның k, l индекслерине қарата симметриялы екенлигин аңғарамыз ҳәм сонлықтан ол $S^i_{kl} = \Gamma^i_{kl} + \Gamma^i_{lk}$ айырмасы пайда етилгенде түсип қалады. Демек ол тензорлық нызам бойынша түрленеди:

$$S^i_{kl} = S'^m_{np}\frac{\partial x^i}{\partial x'^m}\frac{\partial x'^n}{\partial x^k}\frac{\partial x'^p}{\partial x^l},$$

яғный тензор болып табылады. Оны кенисликтиң *буралыў тензоры* деп атайды.

Енди эквивалентлик принципине тийкарланған улыўмалық салыстырмалық теориясында буралыў тензорының нолге тең болыўының керек екенлигин көрсетемиз. Ҳақыйқатында да, жоқарыда айтылғандай, бул принципке сәйкес «Галилей» координаталар системасының орын алыўы шәрт болып, бул системада Γ^i_{kl} шамалары ҳәм соған сәйкес S^i_{kl} шамалары нолге тең болады. S^i_{kl} тензор болғанлықтан, бул тензор бир системада нолге тең болса, онда ол басқа да қәлеген системада да нолге тең болады. Бул Кристоффель символларының төменги индекслер бойынша симметриялық екенлигин аңлатады:

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk}. \tag{5.16}$$

Бундай жағдайда

$$\Gamma_{i,kl} = \Gamma_{i,lk} \tag{5.17}$$

екенлиги өз-өзинен көринип тур.

Улыўма жағдайда барлығы болып 40 дана Γ^{i}_{kl} шамасы бар болады, солардың ишинде i диң ҳәр бир төрт мәниси ушын k менен l лердиң 10 данадан ҳәр қыйлы жуп мәнислери бар (k менен l лердиң орынларын алмастырып қойғандағы жупларды бирдей деп қарағанда).

(5.15)-формула жоқарыда айтылған (5.16) шәрти орын алғанда алдан-ала берилген қәлеген ноқатта барлық Γ^{i}_{kl} лер нолге тең болатуғын координата системасын сайлап алыўға болады деп айтылган тастыйықлаўды дәлиллеўге мүмкиншилик береди (бундай системаны *локаллық инерциаллық* ямаса *локаллық геодезиялық* деп атайды)[25].

Ҳақыйқатында да мейли берилген ноқат координата басы сыпатында сайлап алынған болсын ҳәм бкл системада Γ^{i}_{kl} лер x^{i} координаталарында дәслеп $\left(\Gamma^{i}_{kl}\right)_0$ мәнислерине ийе болған болсын. Усы ноқат әтирапында

$$x'^{i} = x^{i} + \frac{1}{2}\left(\Gamma^{i}_{kl}\right)_0 x^{k}x^{l} \tag{5.18}$$

түрлендириўин әмелге асырамыз. Онда

$$\left(\frac{\partial^2 x'^{m}}{\partial x^{k}\partial x^{l}}\frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{m}}\right)_0 = \left(\Gamma^{i}_{kl}\right)_0 \tag{5.19}$$

ҳәм (5.15) ке сәйкес Γ'^{m}_{np} лердиң барлығы да нолге айланады.

(5.16)-шәрттин әҳмийетиниң үлкен екенлигин атап өтемиз: (5.19)-теңликтиң шеп тәрепиндеги аңлатпа k және l индекслерине карата симметриялы, сонлықтан теңликтиң оң тәрепи де усы индекслерге қарата симметриялы болыўы керек.

(5.18)-түрлендириў ушын

$$\left(\frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{k}}\right)_0 = \delta^{i}_{k}$$

екенлигин аңлаймыз ҳәм сонлықтан ол берлиген ноқаттағы ҳеш бир тензордың мәнислерин өзгертпейди (соның ишинде g_{ik} тензорының да). Солай етип Кристоффель символларының нолге айланыўы g_{ik} тензорының Галилей түрине алып келиниўи менен бир ўақытта әмелге асады екен.

Кристоффель символлары менен метрлик тензор арасындағы байланыс

---

[25] Егер координата системасы сәйкес түрде сайлап алынса Γ^{i}_{kl} диң тек берилген ноқатта емес, ал берилген дүньялық сызықтың бойы бойынша да нолге тең болатуғынлығын көрсетиў мүмкин (усы тастыйықлаўдың дәлилин 1964-жылы «Наука» баспасынан шыққан П.К.Рашевскийдиң «Риманова геометрия и тензорный анализ» китабының 91-параграфынан табыўға болады.

Метрлик тензор g_{ik} дан алынған ковариант туўындының нолге тең екенлигин дәлиллеймиз. Бунның ушын DA_i векторы ҳәм қәлеген вектор ушын

$$DA_i = g_{ik}DA^k$$

қатнасының орын алатуғынлығынлығын аңғарамыз. Екинши тәрептен $A_i = g_{ik}A^k$ ҳәм сонлықтан

$$DA_i = D(g_{ik}A^k) = g_{lk}DA^k + A^kDg_{ik}.$$

$DA_i = g_{ik}DA^k$ менен салыстырып A^i векторының ықтыярлылығына ийе боламыз:

$$Dg_{ik} = 0.$$

Сонлықтан ковариант туўынды да

$$g_{ik;l} = 0. \tag{6.1}$$

Солай етип ковариант дифференциаллаўда g_{ik} ларды турақлы шама сыпатында караў керек.

$g_{ik;\ l} = 0$ теңлигин Γ^i_{kl} Кристоффель символларын метрлик тензор g_{ik} арқалы аңлатыў ушын пайдаланыўға болады. Бунның ушын (5.14) улыўмалық анықламасы бойынша жазамыз:

$$g_{ik;\ l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{mk}\Gamma^m_{il} - g_{im}\Gamma^m_{kl} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{k,il} - \Gamma_{i,kl} = 0.$$

Солай етип g_{ik} дан алынған туўындылар Кристоффель символлары арқалы аңғартылады екен[26]. i, k, l индекслериниң орынларын алмастырып қойыў арқалы бул туўындыларды жазамыз:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \Gamma_{k,il} + \Gamma_{i,kl}, \qquad \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} = \Gamma_{i,kl} + \Gamma_{l,ik}, \qquad -\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = -\Gamma_{l,ki} - \Gamma_{k,li}.$$

Бул теңликлерден ярым сумма алып ($\Gamma_{i,\ kl} = \Gamma_{i,\ lk}$ екенлигин нәзерде тутып)

$$\Gamma_{i,\ kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right) \tag{6.2}$$

екенлигин табамыз. Буннан $\Gamma^i_{kl} = g^{im}\Gamma_{m,kl}$ символлары ушын

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right) \tag{6.3}$$

аңлатпасына ийе боламыз.

---

[26] Локаллық-геодезиялық координаталар системасын сайлап алыў берилген тоқатта метрлик тензордың кураўшыларының биринши туўындыларының барлығының нолге айланыўын билдиреди.

Бул формулалар биз излеп атырған метрлик тензор арқалы аңлатылған Кристоффер символларының аңлатпалары болып табылады.

Буннан кейинги таллаўлар ушын пайдалы болған Γ^i_{kl} Кристоффель символларының әпиўайыластырылған түрин келтирип шығарамыз. Буның ушын g_{ik} тензорының кураўшыларынан туратуғын g анықлаўшысының dg дифференциалын анықлаймыз. dg ны g_{ik} тензорының ҳәр бир қураўшысынан дифференциал алып ҳәм оны анықлаўшыдағы өзиниң коэффициентине көбейтиў арқалы (яғный сәйкес минорға көбейтиў арқалы) алыў мүмкин. Екинши тәрептен g_{ik} тензорына кери болған g^{ik} тензорының қураўшыларының g_{ik} шамаларының анықлаўшысының минорын усы анықлаўшыға бөлгенге тең екенлиги белгили. Сонлықтан g анықлаўшысының минорлары gg^{ik} ға тең. Солай етип

$$dg = gg^{ik}dg_{ik} = -gg^{ik}dg^{ik} \tag{6.4}$$

(себеби $g_{ik}g^{ik} = \delta^i_l = 4$, сонлықтан $g_{ik}g^{ik} = -g_{ik}dg^{ik}$).

(6.3) тен ийе боламыз:

$$\Gamma^l_{ki} = \frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^m}\right).$$

Қаўсырмадағы үшинши ҳәм биринши ағзалардағы m ҳәм i индекслериниң орнын алмастырып биз сол еки ағзаның өз-ара қысқаратуғынлығын көремиз. Соның ушын

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2}g^{im}\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k}$$

ямаса (6.4) ке сәйкес

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^k}. \tag{6.5}$$

$g^{kl}\Gamma^i_{kl}$ шамалары ушын аңлатпаны да аңғарған пайдалы. Усыған сәйкес ийе боламыз:

$$g^{kl}\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2}g^{kl}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right) = g^{kl}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right).$$

(6.4) тиң жәрдеминде буны мына түрге түрлендириўге болады:

$$g^{kl}\Gamma^i_{ki} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}g^{ik})}{\partial x^k}. \tag{6.6}$$

Ҳәр қыйлы есаплаўларда g^{ik} контравариант тензорынан алынған туўындылардың g_{ik} дан алынған туўындылар менен

$$g_{il}\frac{\partial g^{lk}}{\partial x^m} = -g^{ik}\frac{\partial g_{il}}{\partial x^m} \tag{6.7}$$

аңлатпасы арқалы байланыслы екенлигин нәзерде тутқан пайдалы (бул $g_{il}g^{lk} = \delta^k_l$ теңлигин дифференциаллағанда алынады). Ақырында g^{ik} алынган туўындылардың Γ^i_{kl} шамалары арқалы аңлатылыўының мүмкин емес екенлигин көрсетемиз. Атап айтқанда $g^{ik}{}_{;l} = 0$ теңлигинен

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = -\Gamma^i_{ml}g^{mk} - \Gamma^k_{mi}g^{im} \qquad (6.8)$$

екенлиги келип шығады.

Алынған формулалар жәрдеминде вектордың иймек сызықлы координаталарға дивергенциясының улыўмаластырылыўы болып табылатуғын $A^i_{;i}$ ушын жазылған аңлатпаны қолайлы түрге келтириў мүмкин. (6.5) ти пайдаланып

$$A^i_{;i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{li}A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + A^l\,\frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^l}$$

аңлатпасына ийе боламыз ямаса ақырында

$$A^i_{;i} = \frac{1}{\ln\sqrt{-g}}\,\frac{\partial(\ln\sqrt{-g}A^i)}{\partial x^l} \qquad (6.9)$$

формуласын аламыз.

Тап сол сыяқлы аңлатпаны антисимметриялы тензор A^{ik} ның дивергенциясы ушын да алыўға болады. (5.12) ден ийе боламыз:

$$A^{ik}_{;k} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{mk}A^{mk} + \Gamma^k_{mk}A^{im}.$$

Бирақ $A^{mk} = - A^{km}$ болғанлықтан

$$\Gamma^i_{mk}A^{mk} = -\Gamma^i_{km}A^{km} = 0.$$

Демек, Γ^k_{mk} ушын жазылған (6.5) аңлатпасын қойып

$$A^{ik}_{;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial(\sqrt{-g}A^{ik})}{\partial x^k} \qquad (6.10)$$

екенлигин табамыз.

Енди мейли A_{ik} симметриялы тензор болсын. Оның аралас кураўшылары ушын $A^k_{i;k}$ аңлатпаны анықлаймыз. Ийе боламыз

$$A^k_{i;k} = \frac{\partial A^k_i}{\partial x^k} + \Gamma^k_{lk}A^l_i - \Gamma^l_{ik}A^k_l = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial(A^k_i\sqrt{-g})}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ki}A^k_l.$$

Бул аңлатпадағы ақырғы ағза

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\right)A^{kl}.$$

шамасына тең. A^{kl} тензорының симметриясына сәйкес қаўсырмадағы еки ағза бир бири менен жыйысады ҳәм

$$A^k_{i;k}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}A^k_i)}{\partial x^k}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}A^{kl}. \qquad (6.11)$$

аңлатпасы калады.

Декарт координаталарында $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}-\frac{\partial A_k}{\partial x^i}$ антисимметриялы тензор болып табылады. Иймек сызықлы координаталарда ол $A_{i;k}-A_{k;i}$ тензоры түрине ийе. Бирақ $A_{i;k}$ ушын аңлатпалардың жәрдеминде ҳәм $\Gamma^i_{kl}=\Gamma^i_{lk}$ екенлигин итибарға алып ийе боламыз:

$$A_{i;k}-A_{k;i}=\frac{\partial A_i}{\partial x^k}-\frac{\partial A_k}{\partial x^i}. \qquad (6.12)$$

Ең ақырында иймек сызықлы координаталарға базы бир φ скалярының екинши туўындысы болған $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x^i}$ шамаларының суммасын түрлендиремиз. Иймек сызықлы координаталарда бул сумманың $\varphi^{;i}_{;i}$ ге өтетуғынлығы анық. Бирақ $\varphi_{;I} = \partial\varphi/\partial x^i$, себеби скалярдың ковариант дифференциаллаўы сыпатнда әдеттеги дифференциаллаўға алып келинеди. i индексин көтерип, ийе боламыз:

$$\varphi^{;i}=g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}$$

ҳәм (6.9)-формуланың жәрдеминде аламыз

$$\varphi^{;i}_{;i}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\right). \qquad (6.13)$$

Вектордан гипербет бойынша интегралды 4 көлем бойынша интегралға түрлендириў ушын түрлендириў ушын (17) Гаусс теоремесының (6.9) ға сәйкес

$$\oint A^i\sqrt{-g}dS_i=\int A^i_{;i}\sqrt{-g}d\Omega \qquad (6.14)$$

түринде жазылатуғынан аңғарған пайдалы.

Пайдаланылған әдебиятлар дизими

1. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теоретическая физика. Учебное пособие для вузов. В. 10 т. Том II. Теория поля. 8-е издание. Издательство "ФИЗМАТЛИТ". Москва. 2003. 536 с.

Глава XIV. §§ 111-114.

2. Lewis Ryder. Introduction to General Relativity. Cambridge University Press. 2009. 441 p.