ÓZBEKISTAN RESPUBLIKASI JOQARI HÁM ORTA ARNAWLI BILIM MINISTRLIGI

BERDAQ ATINDAǴI QARAQALPAQ MÁMLEKETLIK UNIVERSITETI

FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

FIZIKA KAFEDRASI

Fizika-matematika fakultetiniń fizika qánigeligigininń (Tálim baǵdarı: 5140200 – Fizika) 4- kurs studentleri ushın (7-semestr) "Gravitaciyanıń relyativistlik teoriyası" páni boyınsha

LEKCIYALAR TEKSTLERI

Bilim tarawı: 100000 – gumanitar bólim.
Tálim tarawı: 140000 – tábiyiy pánler.
Tálim baǵdarı: 5140200 – fizika.

Lekciyalar 16 saat. Studentlerdiń óz betinshe islewi ushın 36 saat belgilengen.

Nókis – 2016

Annotaciya

16 saatlıq lekciyalıq kursta gravitaciya haqqındağı kóz-qaraslardıń rawajlanıwı, gravitaciya nızamlarınıń dóretiliwi hám házirgi zaman reliyativisitlik gravitaciya teoriyası bolǵan A.Eynshteynniń gravitaciya teoriyasınıń fizikalıq tiykarları banlanǵan. Kursta Nyutonnıń gravitaciya teoriyası menen Eynshteynniń gravitaciya teoriyaları arasındağı ayırma ashıq túrde bayanlanǵan.

Eynshteynniń relyativistlik gravitaciya teoriyası tiykarında Álem hám kosmologiya haqqındağı házirgi zaman tálimatınıń fizikalıq biykarları berilgen.

Pánniń sabaqlarǵa mólsherlengen oqıw programması Qaraqalpaq mámleketlik universitetiniń ilimiy-metodikalıq keńesiniń 2016-jıl 23-iyun kúngi májilisinde qarap shıǵıldı hám maqullandı. Protokol nomeri 7.

Pánniń sabaqlarǵa mólsherlengen oqıw programması fizika-matematika fakultetiniń ilimiy keńesiniń 2016-jıl 22-iyun kúngi májilisinde talqılandı hám maqullandı. Protokol sanı 11.

Pánniń sabaqlarǵa mólsherlengen oqıw programması fizika kafedrasınıń 2016-jıl 15-iyun kúngi májilisinde talqılandı hám maqullandı. Protokol sanı 21.

MAZMUNI

Relyativistlik gravitaciya teoriyası

1-lekciya. Klassikalıq fizikadaǵı qozǵalıstıń salıstırmalıǵı. Galileydiń salıstırmalıq principi. Eynshteynniń salıstırmalıq principi. Tásirlesiwdiń tarqalıwı ushın shekli tezliktiń bar ekenligi principi. Jaqtılıqtıń tezligi fundamentallıq fizikalıq shama sıpatında

Kirisiw. Relyativistlik gravitaciya teoriyası tartılıstı (gravitaciyanı) tórt ólshemli keńislik-waqıttıń qıysıqlıǵı menen baylanıstıratuǵın házirgi zaman tartılıs teoriyası bolıp tabıladı.

Óziniń klassikalıq variantında tartılıs teoriyası XVII ásirdiń ekinshi yarımında Isaak Nyuton tárepinen dóretildi hám házirgi waqıtlarǵa shekem adamzatqa xızmet etip kiyatır. Bul teoriya házirgi zaman astronomiyasınıń, astrofizikasınıń, kosmonavtikasınıń kópshilik máselelerin sheshiw ushın tolıq jaramlı. Biraq soǵan qaramastan onıń ishki kemshiligi Nyutonnıń ózine de belgili edi. Bul teoriya uzaqtın tásir etetuǵın teoriya bolıp tabıladı hám onda bir deneniń ekinshi denege gravitaciyalıq tásiri keshigiwsiz bir zamatta beriledi. Kulon nızamınıń Maksvell elektrodinamikasına qanday qatnası bolsa, Nyutonnıń gravitaciya teoriyası da ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyası menen sonday qatnasta. Dj.K.Maksvelge elektrodinamikadan uzaqtan tásirlesiwdi alıp taslawǵa sáti tústi. Al gravitaciyada bolsa bunı Albert Eynshteyn orınladı.

1905-jılı A.Eynshteyn arnawlı salıstırmalıq teoriyasın dóretti. Usınıń menen birge klassikalıq elektrodinamikanıń rawajlanıwın ideyalıq jaqtan juwmaqladı. A.Eynshteynniń aldında X.A.Lorenc penen J.A.Puankareniń jumıslarında dara salıstırmalıq teoriyasınıń kóplegen elementleri bar edi. Biraq joqarı tezliklerdegi fizikanıń tutas kartinası tek Albert Eynshteynniń jumısında dóretildi.

Arnawlı salıstırmalıq teoriyasın dóretpey, klassikalıq elektrodinamikanıń strukturasın tereń túsinbey, keńislik-waqıttıń birligin sanaǵa sińdirmey turıp házirgi zaman gravitaciya teoriyasın dóretiw hám uǵıw múmkin emes. Ulıwmalıq salıstımalılıq teoriyası ushın matematikanıń tutqan ornı ullı. Onıń apparatı bolǵan tenzorlıq analiz yamasa absolyut differencial esaplaw G.Rishshi hám T.Levi-Shivita tárepinen rawajlandırıldı.

Ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyası fizikalıq teoriya bolıp tabıladı. Onıń tiykarında anıq fizikalıq princip (ekvivalentlik principi), eksperimentlerde tastıyıqlanǵan anıq faktler jatadı.

Eynshteynniń salıstırmalıqtıń ulıwmalıq principi (ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyası) boyınsha eń birinshi jumısı retinde 1914-jılı Berlin Ilimler Akademiyasınıń protokollarında jarıq kórgen "Ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyasınıń formal tiykarları" miynetin qabıl etiw kerek. Bir qansha dúzetiwler qosımshalar kirgizilgen bul jumıs 1916-jılı Annalen d.Physik jurnalında jarıq kórdi. Maqalanıń ottiskleri satıwǵa tarqatıldı. Usınıń saldarınan Eynshteynniń jumısı kópshilikke belgili boldı. 1915-1916 jılları Leydende salıstırmalıq teoriyası boyınsha lekciyalar oqıǵan Lorentz bul teoriyanı «Eynshteynniń tartılıs teoriyası», matematik Hubert 1915-1916 jılları jarıq kórgen maqalaların «Die Grundlagen der Physik» (Fizika tiykarları), al matematik Weyl 1918-jılı shıqqan hám bul teoriyaǵa baǵıshlaǵan kitabın „Raum, Zeit, Malerie" (Keńislik, waqıt, materiya) dep atadı. Usı atlardıń ózi Eynshteyn tárepinen dáretilgen teoriyanıń barlıq fizikanı qamtıytuǵınlıǵın kórsetedi, al bunday teoriyanıń úlken qızıǵıwshılıqtı payda etpewi múmkin emes. Sonlıqtan bul teoriya payda bolıwdan onıń menen Lorentz, Hubert, Weyl usaǵan ataqlı fizikler menen matematikler shuǵıllana basladı. Biraq teoriyanı belgili bir dárejede tolıq hám tiykarlı etip bayanlaw fizikler ushın úlken qıyınshılıq payda etetuǵın júdá quramalı matematikalıq apparattı talap etedi. Bul teoriyanı kópshilik ushın bayanlaw onıń qanshama jaqsı jazılǵanlıǵına qaramastan túsiniksiz, dál emes, duman tárizli obrazlardı ǵana bere aladı.

Eynshteynniń gravitaciya teoriyası usı dáwirge shekem dóretilgen teoriyalardıń ishindegi eń sulıw hám matematikalıq jaqtan júdá quramalı teoriya bolıp tabıladı. 1915-jılı tolıq dóretilip bolıwına qaramastan bul teoriya 1960-jıllarğa shekem kóplegen fizikler tárepinen itibarğa alınbadı. Biraq ilimde, ásirese astronomiya menen astrofizikada, elementar bóleksheler fizikasında ashılğan jańalıqlar Eynshteynniń teoriyasına bolğan fizikanıń hár qıylı tarawları boyınsha islep atırğan ilimpazlardıń qızığıwshılıqların arttırdı hám soğan sáykes bul boyınsha orınlanğan ilim-izertlew jumıslarınıń sanın kóbeytip jiberdi.

Eń áhmiyetli másele ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyasınıń tiykarğı mánisin, onıń beretuğın nátiyjelerin kópshilik fiziklerge túsindiriw mashqalası payda boldı. Bul bağdarda islengen eń áhmiyetli jumıs L.D.Landau menen E.M.Lifshictiń kóp tomlıq «Teoriyalıq fizika» kitabınıń II tomı bolğan «Maydanlar teoriyası» kitabı (eń dáslepki basılıwı 1937-jılı ámelge asırıldı) bolıp tabıldı. Bul kitap biziń ásirimizge shekem kóp sanlı qaytadan basılıwlarğa miyasar boldı (mısalı 1963-jılı altınshı, al 2001-jılı segizinshi ret baspadan shıqtı).

Ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyası, onıń teńlemelerin keltirip shığarıw menen teńlemeleriniń dál sheshimlerin esaplaw, teńlemelerdi ayqın máselelerdi sheshiwge qollanıw boyınsha kóp sanlı kitaplar da jarıq kórdi. Olardıń ayırımlarınıń dizimi pitkeriw qánigelik jumısınıń aqırında berilgen.

Internet tiń payda bolıwı salıstırmalıq teoriyasınıń keń túrde úgit-násiyatlanıwına alıp keldi. Kóp sanlı arnawlı saytlar payda boldı. Olardan tómendegilerdi atap ótemiz:

http://marxists.nigilist.ru/reference/archive/einstein/works/1910s/relative/index.htm
http://marxists.nigilist.ru/reference/archive/einstein/index.htm
http://www.theeinsteinfile.com/
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/%7Ehistory/References/Einstein.html
http://www.thegreatvoid.net/Special_Interests/Space_Time/General_reletivity.htm
http://www.alberteinstein.info/finding_aid/
http://www.albert-einstein.org/
http://www.albert-einstein.com/
http://asf.ur.ru/Web_pilot/news_p.htm
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/General_relativity.html

Internet te ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyasına arnalğan ilimiy, kópshilikke arnalğan materiallardıń sanınıń kóbeyiwi menen birge bul teoriyanı túsindiriwde qátelikke jol qoyatuğın avtorlardıń maqalaları da, hátte ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyasınıń durıslığına gúmán payda etetuğın materiallar da kóbeymekte. Sonıń menen birge quramalı teoriyanı quramalı matematikalıq apparattı qollanıp túsindiriw kóplegen avtorlar ushın keń terqalğan dástúrge aylanbaqta.

Joqarıda aytılğanlarğa baylanıslı Eynshteynniń gravitaciya teoriyasın eń ápiwayı jollar menen túsindiriwdi ámelge asırıw usı waqıtlarğa shekemgi áhmiyetli máselelerdiń bir bolıp kiyatır.

Bir qansha tariyxıy mağlıwmatlar. Eger oraylıq dene átirapında aylanıwshı bólekshege qosımsha sırtqı kúshler tásir etpese, onda bul bólekshe gravitaciyalıq Nyuton kúshiniń tásirinde barlıq waqıtta da bir ellips boyınsha qozğaladı. Eger sırttan qosımsha kúshler tásir jasalsa (mısalı basqa planetalardıń gravitaciyalıq tásiri), onda bólekshe turaqlı túrde ózgeretuğın parametrlerge iye ellips tárizli orbita boyınsha qozğaladı. Bul ellipstiń aylanıwı orbitanıń precessiyası dep ataladı. Bul precessiyanıń shamasın astronomlar úlken dállikte ólshey, al teoretikler bolsa sırtqı tásirlerdiń shaması menen bağıtların bilgen halda boljay aladı. Nyutonnıń gravitaciya teoriyası (pútkil dúnyalıq tartılıs nızamı) Merkuriy perigeliyiniń baqlanatuğın awısıwınıń 99,26 procentin túsindire aldı. Al hár 100 jılda orın alatuǵın 40 múyeshlik sekundlıq awısıwdı Nyuton nızamı tiykarında hesh kim túsindire almadı.

1859-jılı Franciyalı astronom, Parij observatoriyasınıń direktorı Urben Jan Jozef Levere baqlawlar tiykarında anıqlanǵan merkuriy planetasınıń precessiyasınıń teoriyalıq boljawlar menen azmaz sáykes kelmeytuǵınlıǵın taptı. Orbitanıń perigeliyi Nyuton nızamı tárepinen anıqlanǵan shamadan tezirek qozǵalatuǵın bolıp shıqtı. Bul effektiń shaması júdá kishi – hár júz jılda 38”. Biraq bul shama ólshewlerdiń jiberetuǵın qáteliginen ádewir úlken edi (ólshewler 1” muǵdarında qátelik jiberetuǵın edi). Bul ashılıwdıń áhmiyeti ullı edi hám sonlıqtan XIX ásirdegi kóp sanlı fizikler menen astronomlar, aspan mexanikası boyınsha qánigeler bul máseleni sheshiwge tırıstı. Klassikalıq fizika sheklerinde kóp sanlı sheshimler usınıldı. Olardıń ishindegi eń belgilileri mınalar: Quyash átirapındaǵı planetalar aralıq kózge kórinbeytuǵın shań-tozańnıń bolıwı, Quyashtıń kvadrupollik momentiniń bar ekenligi (óz kósheri dógereginde aylanıwınıń saldarınan Kuyashtıń forması sfera emes, al jalpayǵan sferaǵa aylanadı), Merkuriydiń ele tabılmaǵan tábiyiy joldası, ele tabılmaǵan Quyashqa eń jaqın planeta (bul gipotezalıq planetaǵa Vulkan ataması berildi). Bul boljawlardıń hesh qaysısı da tastıyıqlanbaǵanlıqtan fizikler keskin túrdegi pútkilley jańa gipotezalardı usına basladı. Mısalı bir qatar fizikler tartılıs nızamın ózgertiw kerek (bunıń ushın Nyuton nızamındaǵı R diń kvadratınıń ornına basqa kórsetkishti qoyıw da usınıldı). Bir qatar fizikler gravitaciyalıq potencialǵa planetanıń tezliginen ǵárezli bolǵan aǵzanı qosıwdı usındı.

Biraq bunday tırısıwlardıń basım kópshiligi qarama-karsılıqlarǵa iye bolıp shıqtı. Óziniń aspan mexanikası boyınsha jumıslarında belgili matematik Laplas eger gravitaciyalıq tásir deneler arasında bir zamatta jetkerilip beriletuǵın bolsa (bul jaǵdayda máselege tezlikke baylanıslı potencialdı kirgiziwge tuwrı keledi), onda qozǵalıwshı planetalar sistemasında impuls saqlanbaydı — impulstiń bir bólimi gravitaciyalıq maydanǵa beriledi (bunday awhal elektrodinamikada zaryadlar elektromagnit tásirleskende orın aladı). Nyuton tálimatınıń kóz-qarasları boyınsha eger gravitaciyalıq tásirlesiw shekli tezlik penen beriletuǵın bolsa hám denelerdiń tezliklerinen ǵárezsiz bolsa, onda barlıq planetalardıń Quyash burınıraq iyelegen orınǵa qaray tartılıwı kerek. Usınday tiykarda Laplas Kepler máselesindegi orbitalardıń ekscentrisiteti menen úlken yarım kósherleriniń ásirler dawamında ózgeriske ushıraytuǵınlıǵın kórsetti. Bul shamalardıń ózgeriwleriniń eń joqarı sheklerinen (bul shekler Quyash sisteması menen Aydıń qozgalısınıń ornıqlılıǵınan kelip shıǵadı) Laplas gravitaciyalıq Nyutonlıq tásirlesiw tezliginiń "jaqtılıqtıń 50 million tezliginen kishi bolmaytuǵınlıǵın" kórsetti. Bul waqıya shama menen 1797-jılı bolıp ótken edi.

Laplas metodı Nyuton gravitaciyasın tuwrıdan-tuwrı ulıwmalastırǵan jaǵdaylarda durıs nátiyjelerdi beredi. Biraq quramalıraq modeller ushın onıń qollanıwǵa bolmaydı. Mısalı elektrodinamikada qozǵalıwshı zaryadlar tartısıwı yamasa iyterisiwi basqa zaryadlardıń kózge kórinip turǵan orınlarınan baylanıslı emes, al eger olar tuwrı sızıqlı hám teń ólshewli qozǵalatuǵın bolǵan jaǵdayda tap usı waqıt momentinde kórinetuǵın orınlarınan ǵárezli. Bul Lienar-Vixert potencialınıń qásiyeti bolıp tabıladı. Eger máselege ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyası kóz-qaraslarınan qaraytuǵın bolsaq $(v/c)^3$ tártibindegi aǵza dálligene shekem sonday nátiyjelerdi alamız.

Joqarıda keltirilgen mashqalalardan qutılıwı maqsetinde XIX ásirdiń sońǵı 30 jılı ishinde ilimpazlar Veberdiń, Gausstıń, Rimannıń hám Maksvelldiń elektrodinamikalıq potenciallarına tiykarlanǵan gravitaciyalıq tásirlesiwler nızamın paydalanıwǵa tırıstı. 1890-jılı Levige Veber menen Riman nızamlarınıń kombinaciyasın paydalanıwdıń nátiyjesinde perigeliydiń kerekli bolǵan awısıwın hám ornıqlı orbitanı alıw sáti tústi. Ekinshi sátli tırısıw P.Geber tárepinen 1898-jılı islendi. Biraq usınday jaǵdaylarǵa qaramastan baslanǵısh elektrodinamikalıq potenciallar durıs emes bolıp shıqtı (mısalı Veber nızamı Maksvelldiń elektromagnetizm kirmedi). Bul gipotezalar ıqtıyarlı gipotezalar sıpatında tolıq biykarlandı. Maksvell teoriyasın paydalanatuǵın basqa teoriyalar (mısalı G.Lorenctiń teoriyası) precessiya ushın dım kishi shamanı berdi.

1904—1905 jılları X.Lorenctiń, A.Puankareniń hám A.Eynshteynniń jumıslarında arnawlı salıstırmalıq teoriyasınıń fundamenti qurıldı hám qálegen tásirlesiwdiń jaqtılıqtıń tezliginen úlken tezlikler menen tarqalıwı biykarlandı. Sonlıqtan Nyutonnıń gravitaciya nızamın salıstırmalıq principi menen sáykes keliwshi, kishi tezliklerde hám ázzi gravitaciyalıq maydanlarda pútkil dúnyalıq tartılıs nızamına aylanatuğın basqa teoriya menen almastırıw máselesi payda boldı. Bunday jumıslar menen A.Puankare 1905-1906 jılları, G.Minkovskiy 1908-jılı hám A.Zommerfeld 1910-jılı shuğıllandı. Biraq olar qarap shıqqan modeller perigeliydiń awısıwı ushın dım kishi shamanı berdi.

1907-jılı A.Eynshteyn gravitaciyalıq maydandı táriyiplew ushın sol waqıtlardağı salıstırmalıq teoriyasın (házirgi waqıtta bul teoriyanı arnawlı salıstırmalıq teoriyası dep ataydı) ulıwmalastırıw kerek degen juwmaqqa keldi. 1907-jıldan baslap ol izbe-iz jańa teoriyanı dóretiwge qaray júrdi hám 1915-jıldıń aqırına shekem óziniń gravitaciya teoriyasın (ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyasın) tolıq dóretti. Bul teoriyanı dóretiwde Eynshteyn jol kórsetkish retinde óziniń salıstırmalıq principin paydalandı. Bul princip boyınsha bir tekli gravitaciya maydanı barlıq materiyağa birdey tásir etedi hám sonlıqtan onı erkin túsiwshi baqlawshı taba almaydı. Usı jağdayğa sáykes barlıq gravitaciyalıq effektlerdi tezleniwshi esaplaw sistemalarında payda etiw múmkin. Tap sol sıyaqlı gravitaciya maydanında tezleniwshi esaplaw sistemalarında júzege keletuğın effektlerdi payda ete alamız. Sonlıqtan gravitaciya esaplaw sistemasınıń tezleniwine baylanıslı bolğan inerciya kúshi túrinde tásir etedi. Bunday inerciya kúshleri qatarına oraydan qashıwshı kúsh yamasa Koriolis kúshi de kiredi. Usı jağdaylarğa baylanıslı gravitaciyalıq kúshtiń shaması inert massağa proporcional. Nátiyjede keńislik-waqıttıń hár qıylı noqatlarında inercial esaplaw sistemaları bir birine salıstırğanda tezleniwge iye boladı. Bunday jağdaylardıń barlığı da biziń keńisligimiz klassikalıq fizikadağı evklidlik keńislik emes, al riman geometriyasınıń mayısqan keńisligi degen boljawdı qabıl etsek durıs boladı. Usınıń menen birge keńislik penen waqıt arasındağı baylanıs mayısqan bolıp shığadı. Bunday mayısqanlıq ádettegi sharayatlarda gravitaciya kúshi sıpatında kórinedi. Cegiz jıl dawam etken jumıstıń aqırınıda keńislik-waqıttıń onıń ishinde jaylasqan materiya tárepinen qalay mayısatuğınlığın taptı. Bul mayısıwdı Eynshteynniń teńlemeleri berdi. Gravitaciyanıń inerciya kúshlerinen ayırması sonnan ibarat, ol keńislik-waqıttıń mayısqanlığı boyınsha anıqlanadı. Al bul mayısqanlıq invariantlı túrde ólshenedi. Eynsheynniń teńlemeleriniń sheshimlerin birinshilerden bolıp Eynshteynniń ózi juwıq túrde hám Shvarcshild tárepinen dál túrde alındı. Bul sheshimler Merkuriydiń anomallıq precessiyasın túsindirdi hám jaqtılıq nurınıń gravitaciya maydanında awısıwı ushın dál mánis berdi. Teoriyanıń bul boljawı 1919-jılı angliyalı astronomlar tárepinen tastıyıqlandı.

Koordinatalardı fizikalıq túrlendiriw. Hár qıylı esaplaw sistemaları baylanısqan hár qıylı materiallıq deneler bir birine salıstırğanda qozğalısta bolıwı múmkin. Hár bir esaplaw sistemasında óz koordinata kósherleri júrgizilgen, al sol sistemalardıń hár qıylı noqatlarındağı waqıt sol noqat penen baylanısqan saatlardıń járdeminde ólshenetuğın bolsın. Bir birine salıstırğanda qozğalısta bolatuğın esaplaw sistemalarındağı koordinatalar menen waqıt qalayınsha baylanısqan degen soraw kelip tuwadı. **Qoyılğan sorawğa juwaptıń tek geometriyalıq kóz-qarastıń járdeminde beriliwi múmkin emes. Bul fizikalıq másele**. Bul másele hár qıylı sistemalar arasındağı salıstırmalı tezlik nolge teń bolğanda hám sol esaplaw sistemaları arasındağı fizikalıq ayırma joğalğanda (yağnıy bir neshe sistemalar bir sistemağa aylanğanda) ğana geometriyalıq máselege aylanadı.

Inercial esaplaw sistemaları hám salıstırmalıq principi. Qattı deneniń eń ápiwayı bolğan qozğalısı onıń ilgerilemeli teń ólshewli tuwrı sızıqlı qozğalısı bolıp tabıladı. Usı jağdayğa sáykes esaplaw sistemasınıń eń ápiwayı salıstırmalı qozğalısı ilgerilemeli, teń ólshewli hám tuwrı sızıqlı qozğalısı bolıp tabıladı. SHártli túrde sol sistemalardıń birewin qozğalmaytuğın, al ekinshisin qozğalıwshı sistema dep qabıl etemiz. Hár bir sistemada dekart koordinatalar sistemasın júrgizemiz. K qozğalmaytuğın esaplaw sistemasındağı koordinatalardı (x, y, z) dep, al qozǵalıwshı K' sistemasındaǵı koordinatalardı (x', y', z') háripleri járdeminde belgileymiz. Qozǵalıwshı sistemadaǵı shamalardı qozǵalmaytuǵın sistemadaǵı shamalar belgilengen háriplerdiń járdeminde shtrix belgisin qosıp belgileymiz dep kelisip alamız. Endi bir birine salıstırǵanda qozǵalıwshı hár bir esaplaw sistemasında fizikalıq qubılıslar qalay júredi degen áhmiyetli sorawǵa juwap beriwimiz kerek.

Bul sorawǵa juwap beriwimiz ushın sol esaplaw sistemalarındaǵı fizikalıq qubılıslardıń ótiwin úyreniiwimiz kerek. Kóp waqıtlardan beri Jerdiń betine salıstırǵanda teń ólshewli tuwrı sızıqlı qozǵalatuǵın koordinatalarǵa salıstırǵandaǵı mexanikalıq qubılıslardıń ótiw izbe-izligi boyınsha sol qozǵalıs haqqında hesh nárseni aytıwǵa bolmaytuǵınlıǵı málim boldı. Jaǵaǵa salıstırǵanda tınısh qozǵalatuǵın korabldiń kabinaları ishinde mexanikalıq processler jaǵadaǵıday bolıp ótedi. Al, eger Jer betinde anıǵıraq tájiriybeler ótkerilse Jer betiniń juldızlarǵa salıstırǵandaǵı qozgalısınıń bar ekenligi júzege keledi (mısalı Fuko mayatnigi menen ótkerilgen tájiriybe). Biraq bul jaǵdayda Jer betiniń juldızlarǵa salıstırǵandaǵı tezligi emes, al tezleniwi anıqlanadı. Al **kóp sandaǵı tájiriybeler qozǵalmaytuǵın juldızlarǵa salıstırǵanda, yaǵnıy bir birine salıstırǵanda teń ólshewli tuwrı sızıq boyınsha qozǵalatuǵın barlıq esaplaw sistemalarında barlıq mexanikalıq qubılıslardıń birdey bolıp ótetuǵınlıǵın ayqın túrde kórsetti. Usınıń menen birge tartılıs maydanın (gravitaciya maydanın) esapqa almaytuǵınday dárejede kishi (ázzi) dep esaplanadı. Bunday esaplaw sistemalarında Nyutonnıń inerciya nızamı orınlanatuǵın bolǵanlıqtan olardı inerciyalıq esaplaw sistemaları dep ataladı**.

Galiley tárepinen birinshi ret usınılǵan barlıq inerciyalıq esaplaw sistemalarında mexanikalıq qubılıslar birdey bolıp ótedi (barlıq mexanikalıq nızamlar birdey túrge iye boladı) degen tastıyıqlaw **Galileydiń salıstırmalıq principi** dep ataladı.

Erterek waqıtları kópshilik avtorlar usı máseleni túsindirgende "Galileydiń salıstırmalıq principi" túsiniginiń ornına "Nyuton mexanikasındaǵı salıstırmalıq principi" degen túsinikten paydalandı (mısalı O.D.Xvolson).

Keyinirek basqa da kópshilik, sonıń ishinde elektromagnitlik qubılıslar úyrenilgennen keyin bul principtiń qálegen qubılıs ushın orın alatuǵınlıǵı moyınlana basladı. Sonlıqtan barlıq inercial esaplaw sistemalarında barlıq fizikalıq qubılıslar birdey bolıp ótedi (barlıq fizikalıq nızamlar birdey túrge iye boladı) dep tastıyıqlaytuǵın salıstırmalıq princip arnawlı salıstırmalıq teoriyasınıń salıstırmalıq principi yamasa ápiwayı túrde salıstırmalıq principi dep atala basladı. Házirgi waqıtları bul principtiń mexanikalıq hám elektromagnit qubılısları ushın dál orınlanatuǵınlıǵı kóp eksperimentler járdeminde dálillendi. Soǵan qaramastan **salıstırmalıq principi postulat bolıp tabıladı**. Sebebi ele ashılmaǵan fizikalıq nızamlar, qubılıslar kóp. Sonıń menen birge fizika ilimi qanshama rawajlanǵan sayın ele ashılmaǵan jańa mashqalalardıń payda bola beriwi sózsiz. Sonlıqtan salıstırmalıq principi barqulla postulat túrinde qala beredi.

Salıstırmalıq principi geometriyası Evklidlik bolǵan, birden-bir waqıtqa iye sheksiz kóp sanlı esaplawlar sistemaları bar degen boljawǵa tiykarlanǵan. Keńislik-waqıt boyınsha qatnaslar hár bir esaplaw sistemasında birdey, bul belgisi boyınsha koordinatalar sistemalarınıń bir birinen parqı joq. Usınday boljawdıń durıslıǵı kóp sanlı eksperimentlerde tastıyıqlanǵan. Tájiriybe bunday sistemalarda Nyutonnıń birinshi nızamınıń orınlanatuǵınlıǵın kórsetedi. **Sonlıqtan bunday sistemalar inerciallıq sistemalar dep ataladı. Bunday sistemalar bir birine salıstırǵanda teń ólshewli tuwrı sızıq boyınsha qozǵaladı**.

Biz házir anıqlıq ushın arnawlı salıstırmalıq teoriyasınıń salıstırmalıq principi haqqında onıń avtorı A.Eynshteynniń 1905-jılı jarıq kórgen "Qozǵalıwshı deneler elektrodinamikasına" atlı maqalasınan úzindi keltiremiz:

"Usıǵan usaǵan mısallar hám Jerdiń "jaqtılıq ortalıǵına" salıstırǵandaǵı tezligin anıqlawǵa qaratılǵan sátsiz tırısıwlar tek mexanikada emes, al elektrodinamikada da qubılıslardıń hesh bir qásiyeti absolyut tınıshlıq túsinigine sáykes kelmeydi dep boljawǵa alıp keledi. Qala berse (birinshi dárejeli shamalar ushın dálillengenligindey) mexanikanıń teńlemeleri durıs bolatuǵın barlıq koordinatalar sistemaları ushın elektrodinamikalıq hám optikalıq nızamlar da durıs boladı. Bul boljawdı (onıń mazmunın biz bunnan bılay "salıstırmalıq principi" dep ataymız) biz tiykarǵa aylandırmaqshımız hám bunnan basqa usıǵan qosımsha birinshi qaraǵanda qarama-qarsılıqqa iye bolıp kórinetuǵın jáne bir boljaw, atap aytqanda jaqtılıq boslıqta onı nurlandıratuǵın deneniń qozǵalıs halınan ǵárezsiz barlıq waqıtta da belgili bir V tezligi menen tarqaladı dep boljaymız".

Galiley túrlendiriwleri. Qozǵalıwshı koordinatalar sisteması qozǵalmaytuǵın koordinatalar sistemasına salıstırǵanda hár bir waqıt momentinde belgili bir awhalda boladı

Eskertiwler:

Birinshiden awhalda boladı dep aytılǵanda qozǵalıwshı koordinatalar sistemasınıń keńisliktegi belgili bir orındı iyeleytuǵınlıǵı inabatqa alınadı.

Ekinshiden "koordinatalar sisteması" hám "esaplaw sisteması" túsinikleri bir mániste qollanılıp atır.

Eger koordinatalar sistemalarınıń basları $t = 0$ waqıt momentinde bir noqatta jaylasatuǵın bolsa, t waqıttan keyin qozǵalıwshı sistemanıń bası $x = vt$ noqatında jaylasadı. Sonlıqtan da, eger qozǵalıs tek x kósheriniń baǵıtında bolǵanda

$$x' = x - vt, y' = y, z' = z, t' = t. \qquad (1)$$

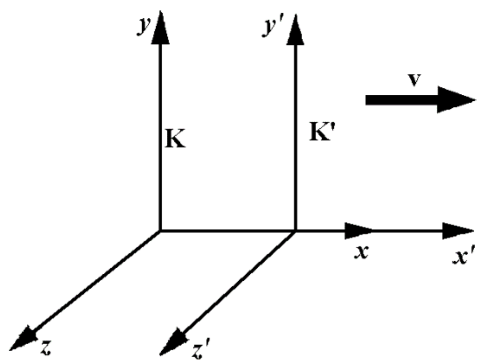
Bul formulalar Galiley túrlendiriwleri dep ataladı.

Eger shtrixları bar koordinatalar sistemasınan shtrixları joq sistemaǵa ótetuǵın bolsaq tezliktiń belgisin ózgeritwimiz kerek. Sonda

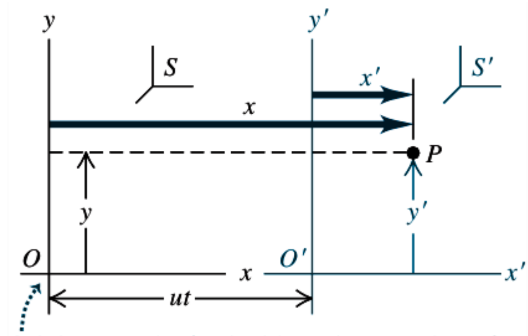
$$x = x' + vt, y = y', z = z', t = t'. \qquad (2)$$

formulaların alamız.

(2)-ańlatpa (1)-ańlatpadan teńlemelerdi sheshiw jolı menen emes, al (1)-ańlatpaǵa salıstırmalıq principin qollanıw arqalı alınǵanlıǵına itibar beriw kerek.



1-a súwret. SHtrixlanǵan hám shtrixlanbaǵan koordinatalar sistemalarınıń bir birine salıstırǵandaǵı qozǵalısı. x hám x' kósherlerin óz-ara parallel etip alıw eń ápiwayı jaǵday bolıp tabıladı.



1-a súwret eki ólshemli jaǵday ushın kórsetilgen. Bul súwrette esaplaw sistemaları S hám S' arqalı, al tezlik u arqalı belgilengen. t=0 waqıt momentinde O hám O' noqatları bir noqatta jaylasqan.

Koordinatalar sistemasın burıw yamasa esaplaw basın ózgertiw arqalı koordinatalar sistemasınıń júdá ápiwayı túrdegi óz-ara jaygásıwların payda etiwge boladı.

Túrlendiriw invariantları. Koordinatalardı túrlendirgende kópshilik fizikalıq shamalar ózleriniń san mánislerin ózgertiwi kerek. Máselen noqattıń keńisliktegi awhalı (x, y, z) úsh sanınıń járdeminde anıqlanadı. Álbette ekinshi sistemaǵa ótkende bul sanlardıń mánisleri ózgeredi.

Eger fizikalıq shama koordinatalardı túrlendirgende óz mánisin ózgertpese, onday shamalar saylap alınǵan koordinatalar sistemalarına ǵárezsiz bolǵan obъektiv áhmiyetke iye boladı. Bunday shamalar túrlendiriw invariantları dep ataladı.

Invariant shamalar tómendegiler jollar menen tabıladı tabıladı:

Uzınlıq l eki esaplaw sistemasında da birdey, yaǵnıy

$$l = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{3}$$

teńligi orınlanadı. Bunday jaǵdayda l shamasın Galiley túrlendiriwine qarata invariant shama dep ataydı. **Bunday jaǵdaydı keńisliktiń absolyutligi dep ataymız.**

Bir waqıtlılıq túsiniginiń absolyutligi. Galileydiń salıstırmalıq principi boyınsha barlıq inercial esaplaw sistemasında waqıt birdey tezlikte ótedi (yaǵnıy saatlar birdey tezlikte júredi). Demek bir sistemada belgili bir waqıt momentinde júz beretuǵın waqıyalar ekinshi sistemada da tap sol waqıt momentlerinde júz beredi. **Bunday jaǵdaydı waqıttıń absolyutligi dep ataydı.** Sonlıqtan saylap alınǵan sistemadan ǵárezsiz eki waqıyanıń bir waqıtta júz bergenligin tastıyıqlaw absolyut xarakterge iye boladı.

Waqıt intervalınıń invariantlılıǵı. $t = t'$ túrlendiw formulasınıń járdeminde waqıt intervalın túrlendiriw múmkin. Meyli qozǵalıwshı sistemada t_1' hám t_2' waqıt momentlerinde eki waqıya júz bersin. Usı eki waqıya arasındaǵı interval

$$\Delta t = t_2 - t_1. \tag{4}$$

Qozǵalmaytuǵın esaplaw sistemasında bul waqıyalar $t_1 = t_1'$ hám $t_2 = t_2'$. waqıt momentlerinde bolıp ótti. Sonlıqtan

$$\Delta t = t_2 - t_1 = t_2' - t_1' \tag{5}$$

teńliklerine iye bolamız. Demek waqıt intervalı Galiley túrlendiriwleriniń invariantı bolıp tabıladı.

Nyuton teńlemeleriniń Galiley túrlendiriwlerine qarata invariantlılıǵı. Tezliklerdi qosıw hám tezleniwdiń invariantlılıǵı. SHtrixları bar esaplaw sisteması qozǵalmaytuǵın shtrixlanǵan esaplaw sistemasına salıstırǵanda V tezligi menen qozǵalatuǵın bolsın hám biz qarap atırǵan materiallıq noqat qozǵalatuǵın, al koordinatalar waqıtqa ǵárezliligi

$$x' = x'(t'), y' = y'(t'), z' = z'(t') \tag{6}$$

formulalarınıń járdeminde berilgen bolsın. Bunday jaǵdayda tezliktiń qurawshıları

$$v_x' = \frac{dx'}{dt'}, v_y' = \frac{dy'}{dt'}, v_z' = \frac{dz'}{dt'} \tag{7}$$

túrinde jazıladı. Qozǵalmaytuǵın esaplaw sistemasına kelsek

$$x(t) = x'(t') + vt', y(t) = y'(t'), z(t) = z'(t'), t = t' \tag{8}$$

al tezliktiń qurawshıları tómendegidey teńliklerdiń járdeminde beriledi:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + V\frac{dt'}{dt} = \frac{dx'}{dt'} + V\frac{dt'}{dt'} = v_x' + V, \tag{9}$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} = \frac{dy'}{dt'},$$
$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} = \frac{dz'}{dt'},$$

formulalarınıń járdeminde anıqlanadı.

Bul formulalar klassikalıq relyativistlik emes mexanikanıń tezliklerdi qosıw formulaları bolıp tabıladı.

Sońǵı formulalar [(9)-formulalar] járdeminde biz tezleniw ushın ańlatpalar alıwımız múmkin. Olardı differenciallaw arqalı hám $dt = dt'$ teńligi orınlanadı dep esaplasaq

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt'^2}, \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y'}{dt'^2}, \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z'}{dt'^2} \tag{10}$$

teńlikleriniń orın alatuǵınlıǵına iye bolamız. **Bul formulalar tezleniwdiń Galiley túrlendiriwlerine qarata invariant ekenligi kórsetedi**.

Demek Nyuton nızamları Galiley túrlendiriwlerine qarata invariant eken.

Túrlendiriw invariantları koordinatalar sistemaların saylap alıwǵa baylanıslı emes, al úyrenilip atırǵan obъektlerdegi eń áhmiyetli haqıyqıy qásiyetlerin táriyipleydi.

Jaqtılıq tezliginiń shekli ekenligi. Biz endi Jaqtılıq haqqındaǵı kóz-qaraslardıń rawajlanıwı, jaqtılıqtıń tezligin Rëmer tárepinen ólshew, dúnyalıq efir túsinigi, Maykelson-Morli hám Fizo tájiriybeleri, Galiley túrlendiriwleriniń sheklengenligi haqqında gáp etemiz.

Galiley túrlendiriwleriniń durıs yamasa durıs emesligi máselesi eksperimentte izertlenip kóriliwi múmkin. Galiley túrlendiriwleri boyınsha alınǵan tezliklerdi qosıw formulasınıń juwıq ekenligi kórsetildi. Qáteliktiń tezlik joqarı bolǵan jaǵdaylarda kóp bolatuǵınlıǵı málim boldı. Bul jaǵdaylardıń barlıǵı da jaqtılıqtıń tezligin ólshew barısında anıqlandı.

Jaqtılıqtıń tezligi haqqındaǵı kóz-qaraslardıń rawajlanıwın tómendegidey faktlerdiń járdeminde sáwlelendiriw múmkin:

Áyemgi dáwirlerdegi oyshıllardıń pikirleri boyınsha:

Platon (b.e.sh. 427-347) kóriw nurları teoriyasın qolladı. Bul teoriya boyınsha kózden nurlar shıǵıp, predmetlerdi barıp "barlastırıp kórip" kózge qaytıp keledi hám usınıń nátiyjesinde biz kóremiz.

Demokrit (b.e.sh. 460-370) atomistlik teoriya tárepinde bolıp, onıń tálimatı boyınsha kózge bólekshelerden turatuǵın jaqtılıq nurları kelip túsedi hám sonıń saldarınan kóriw sezimleri payda boladı.

Aristotel (b.e.sh. 384-322) Demokritke sáykes pikirde boldı.

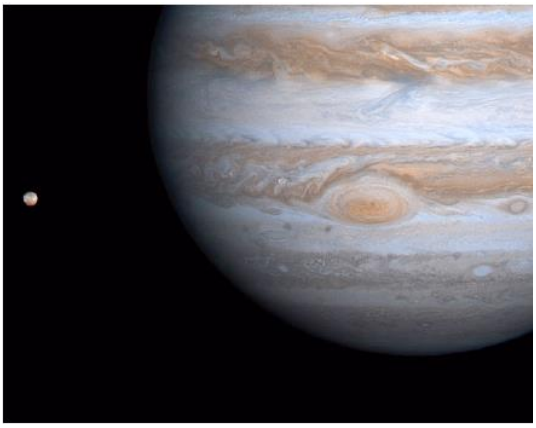
Bul eki túrli kóz qaraslar Evklid (b.e.sh. 300-jıllar) tárepinen biri birine ekvivalent etildi. Ol jaqtılıqtıń tuwrı sızıqlı tarqalıw hám shaǵılısıw nızamların ashtı.

Jańa fizikanıń tiykarın salıwshı Galiley (1564-1642) jaqtılıqtıń tezligi shekli dep esapladı. Tezlikti ólshew boyınsha ol qollanǵan ápiwayı usıllar durıs nátiyje bere almadı. R.Dekart (1596-1650) bolsa pútkilley basqasha kóz-qarasta boldı. Onıń pikirinshe jaqtılıq sheksiz úlken tezlik penen taralatuǵın basım.

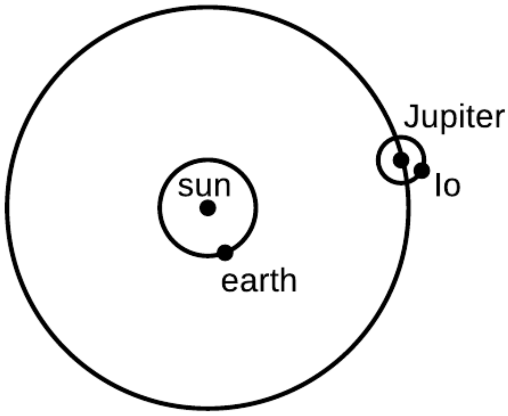
Grimaldi (1618-1660) hám Guk (1625-1695) jaqtılıqqa tolqınlıq kóz-qarasta qaradı. Olardıń pikirinshe jaqtılıq bir tekli ortalıqtaǵı tolqınlıq qozǵalıs.

Jaqtılıqtıń tolqınlıq teoriyasınıń tiykarın salıwshı Xristian Gyuygens (1629-1695) bolıp tabıladı.

I.Nyuton (1643-1727) "áytewir oylardan gipoteza payda etpew" maqsetinde jaqtılıqtıń tábiyatı haqqında shın kewli menen pikir aytpadı. Biraq ol jaqtılıqtıń korpuskulalıq teoriyasın ashıq túrde qabıl etti.



2-súwret. YUpiter hám shep tárepte onıń joldaslarınıń biri Kassini.



3-súwret. Quyash, Jer, YUpiter hám onıń joldası Ionıń bir birine salıstırǵandaǵı jaylasıwları.

Jaqtılıqtıń tezligin Remer tárepinen ólshew. Jaqtılıqtıń tezligi birinshi ret 1676-jılı Olaf Remer (Roemer) tárepinen ólshendi. Sol waqıtlarǵa shekem tájiriybeler YUpiter planetasınıń joldaslarınıń aylanıw dáwiriniń Jer YUpiterge jaqınlasqanda kishireyetuǵının, al Jer YUpiterden alıslaǵanda úlkeyetuǵınlıǵın anıq kórsetti. 4-súwrette YUpiterdiń bir joldasınıń tutılıwdın keyingi momenti kórsetilgen. YUpiterdiń Quyash dógeregin aylanıp shıǵıw dáwiri Jerdiń Quyash dógeregin aylanıp shıǵıw dáwirinen ádewir úlken bolǵanlıǵına baylanıslı YUpiterdi qozǵalmaydı dep esaplaymız. Meyli bazı bir t_1 momentinde YUpiterdiń joldası sayadan shıqsın hám Jerdegi baǵlawshı tárepinen $T_1 = t_1 + \frac{s_1}{c}$ waqıt momentinde belgilensin. Bul jerde s_1 arqalı baqlaw waqtındaǵı Jer menen joldastıń sayadan shqqan jerine shekemgi aralıq belgilengen. YUpiterdiń joldası ekinshi ret sayadan shıqqan waqıttı Jerdegi baqlawshı $T_2 = t_2 + \frac{s_2}{c}$ waqıt momentinde baqladım dep belgilep qoyadı. Sonlıqtan Jerdegi baqlawshı YUpiterdiń joldası ushın aylanıw dáwirine

$$T_{baql} = T_2 - T_1 = T_{haqıyqıy} + \frac{s_2 - s_1}{c}$$

shamasın aladı. Bul jerde $T_{haqıyqıy} = t_2 - t_1$. Demek hár qanday $s_2 - s_1$ shamalarınıń bar bolıwınıń nátiyjesinde joldastıń YUpiterdi aylanıw dáwiri ushın hár qıylı mánisler alınadı. Biraq kóp sanlı ólshewlerdiń nátiyjesinde (Jer YUpiterge jaqınlap kiyatırǵanda alınǵan mánisler "-" belgisi menen alınadı hám barlıq s ler bir birin joq etedi) usı hár qıylılıqtı joq etiw múmkin.

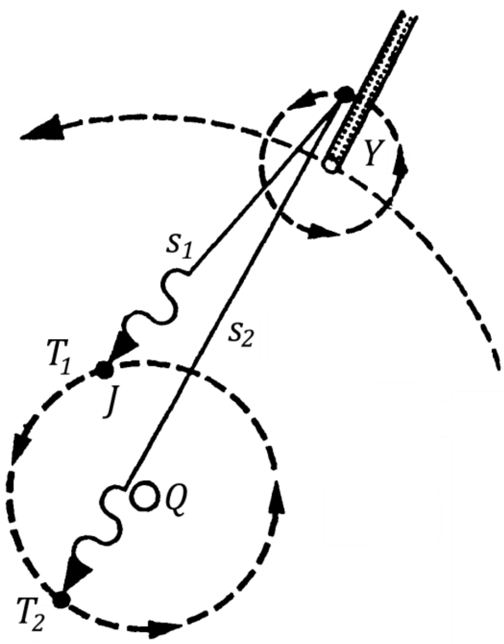
$T_{haqıyqıy}$ shamasınıń mánisin bile otırıp tómendegi formula járdeminde jaqtılıqtıń tezligin anıqlaw múmkin:

$$c = \frac{(s_2 - s_1)}{(T_{baql} - T_{haqıyqıy})}. \tag{11}$$

s_2 hám s_1 shamalarınıń mánisi astronomiyalıq baqlawlardan belgili.

Nátiyjede Remer $c = 214\ 300$ km/s nátiyjesin aldı.

1727-jılı Bradley jaqtılıqtıń aberraciyası qubılısın paydalanıw jolı menen alınǵan nátiyjeniń dálligin joqarılattı.



4-súwret.
Jaqtılıq tezligin Remer boyınsha anıqlawdıń sxeması.

Nyutonnıń jeke abırayı jaqtılıqtıń korpuskulalardıń ağımı degen pikirdi kúsheytti. Gyuygenstiń jaqtılıqtıń tolqın ekenligi haqqındağı kóz-qarası tárepdarlarınıń bar bolıwına qaramastan júz jıllar dawamında jaqtılıqtıń tolqın ekenligi dıqqattan sırtta qaldı. 1801-jılı YUng interferenciya principin keltirip shığardı. Al 1818-jılı Frenel korpuskulalıq teoriyağa kúshli soqqı berdi. Ol jaqtılıqtıń tolqınlıq qásiyeti haqqındağı kóz-qarastan difrakciya máselesin sheshti. Korpuskulalıq teoriya kóz-qarasınan bul máselelerdi sheshiw múmkin emes bolıp shıqtı. Sonlıqtan 1819-jıldan keyin jaqtılıq belgili bir ortalıqta tarqalatuğın tolqın sıpatında qarala basladı. Korpuskulalıq teoriya fizikadan waqıtsha tolıq qısıp shığarıldı.

Bárshege málim, tolqınnıń payda bolıwı hám tarqalıwı ushın belgili bir tutas serpimli ortalıq kerek. Mısalı ses tolqınlarınıń tarqalıwı ushın hawa yamasa tutas qattı dene, suwdıń betinde payda bolğan tolqınlardıń tarqalıwı ushın suwdıń ózi kerek. Sonlıqtan jaqtılıqtıń keńislikte tarqalıwı ushın sáykes ortalıq talap etiledi. Sol dáwirlerde dúnyanı tolıq qamtıp turatığın sonday ortalıq bar dep boljandı hám onı "**Dúnyalıq efir**" dep atadı. Usınıń nátiyjesinde derlik júz jıl dawamında sol efirdi tabıw, usı efirge salıtırğanda basqa denelerdiń tezligin anıqlaw (dúnyanı toltırıp tınıshlıqta turğan efirge salıstırğandağı tezlikti absolyut tezlik dep atadı) fizika iliminde baslı máselelerdiń biri dep esaplandı. Al usınday efir teoriyasın dóretiwge, efir hám onıń fizikalıq qásiyetleri haqqında gipotezalar usınıwda XIX ásirdiń kóp sandağı belgili ilimpazları qatnastı.

Mısallar keltiremiz.

1. Gerc gipotezası: efir ózinde qozğalıwshı deneler tárepinen tolığı menen alıp júriledi, sońlıqtan qozğalıwshı dene ishindegi efirdiń tezligi usı deneniń tezligine teń.
2. Lorenc (H.A.Lorentz) gipotezası: efir qozğalmaydı, qozğalıwshı deneniń ishki bólimindegi efir bul qozğalısqa qatnaspaydı.
3. Frenel hám Fizo gipotezası: efirdiń bir bólimi qozğalıwshı materiya tárepinen alıp júriledi.
4. Eynshteyn gipotezası (O.D.Xvolson boyınsha Eynshteyn hám Plank gipotezası) boyınsha hesh qanday efir joq.

Eynshteyn gipotezası keyinirek payda bolğanlıqtan (XIX ásirdiń bası) dáslepki waqıtları turğan efirge salıstırğandağı jaqtılıqtıń tezligin anıqlaw mashqalası pisip jetti. Tınısh turğan "Dúnyalıq efir" ge salıstırğandağı qozğalıs absolyut qozğalıs bolıp tabıladı. Sonlıqtan ótken ásirdiń (XIX ásir) 70-80 jıllarına kele "Absolyut qozğalıstı", "Absolyut tezliklerdi" anıqlaw fizika ilimindegi eń áhmiyetli mashqalalarğa aylandı.

Payda bolǵan pikirler tómendegidey:

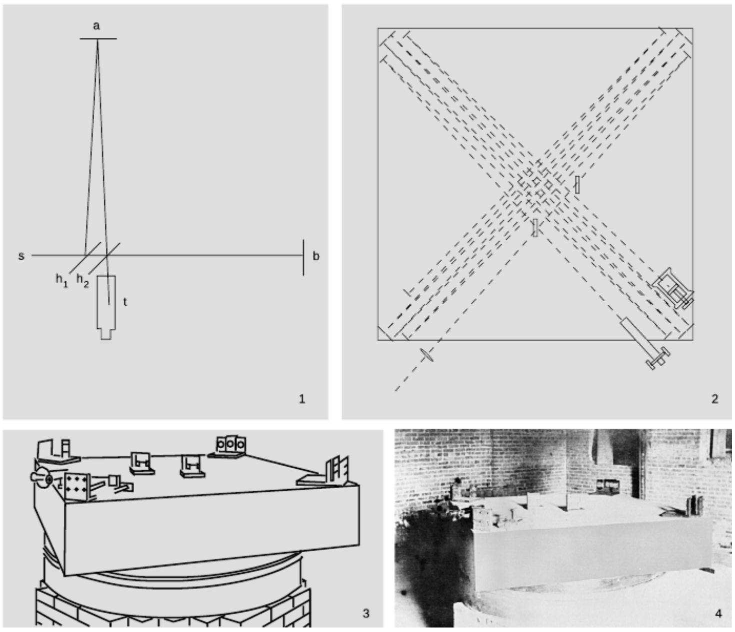
1. Jer, basqa planetalar qozǵalmay turǵan dúnyalıq efirge salıstırǵanda qozǵaladı. Bul qozǵalıslarǵa efir tásir jasamaydı (Lorenctiń pikirin qollawshılar).

2. Qozǵalıwshı deneniń átirapındaǵı efir usı dene menen birge alıp júriledi. (Frenel tálimatın qollawshılar).

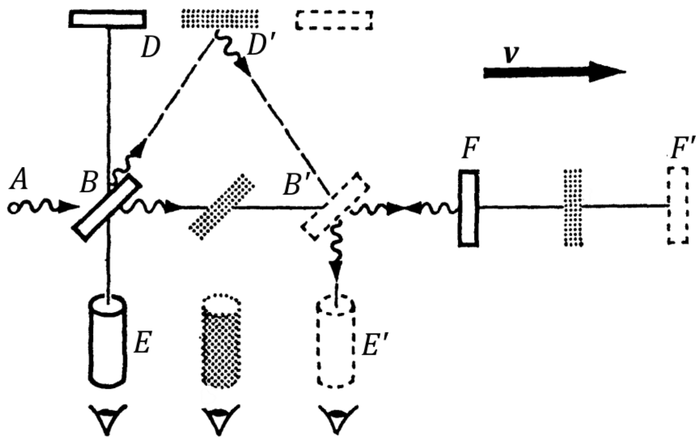
Bul máselelerdi sheshiw ushın 1881-jılı Maykelson (Michelson), 1887-jılı Maykelson Morli (Morley) menen birlikte, 1904-jılı Morli hám Miller (Miller) interferenciya qubılısın baqlawǵa tiykarlanǵan Jerdiń absolyut tezligin anıqlaw boyınsha tariyxıy tájiriybeler júrgizdi. Maykelson, Morli hám Millerler Lorenc gipotezası (efirdiń qozǵalmaslıǵı) tiykarında Jerdiń absolyut tezligin anıqlawdı másele etip qoydı. Bul tájiriybeni ámelge asırıwdıń ideyası interferometr járdeminde biri qozǵalıs baǵıtındaǵı, ekinshisi qozǵalıs baǵıtına perpendikulyar baǵıttaǵı eki joldı salıstırıw bolıp tabıladı. Interferometrdiń islew principi, sonıń ishinde Maykelson-Morli interferometri ulıwma fizika kursınıń "Optika" bóliminde tolıq talqılanadı (5-hám 6-súwretler).

Biraq bul tariyxıy tájiriybeler kútilgen nátiyjelerdi bermedi: Orınlanǵan eksperimentten Jerdiń absolyut tezligi haqqında hesh qanday nátiyjeler alınbadı. Jıldıń barlıq máwsiminde de (barlıq baǵıtlarda da) Jerdiń "efirge" salıstırǵandaǵı tezligi birdey bolıp shıqtı.

Tájiriybeler basqa da izertlewshiler tárepinen jaqın waqıtlarǵa shekem qaytalanıp ótkerilip keldi. Lazerlardiń payda bolıwı menen tájiriybelerdiń dálligi joqarılatıldı. Házirgi waqıtları "efir samalı" nıń tezliginiń (eger ol bar bolsa) $10\frac{m}{s}$ shamasınan kem ekenligi dálillendi.



5-súwret. Maykelson-Morli tájiriybesiniń sxeması hám tájiriybe ótkerilgen dúzilistiń súwreti.



6-súwret. Efirge baylanıslı bolǵan koordinatalar sistemasındaǵı Maykelskon-Morli tájiriybesiniń sxeması. Súwrette interferometrdiń efirge salıstırǵandaǵı awhallarınıń izbe-izligi kórsetilgen.

Maykelson-Morli hám "**efir samalı**" nıń tezligin anıqlaw maqsetinde ótkerilgen keyingi tájiriybelerden tómendegidey nátiyjelerdi shıǵarıw múmkin:

1. Ylken massaǵa iye deneler óz átirapındaǵı efirdi tolıǵı menen birge qosıp alıp júredi (demek Gerc gipotezası durıs degen sóz). Sonlıqtan usınday deneler átirapında "efir samalı" nıń baqlanbawı tábiyiy nárse.

2. Efirde qozǵalıwshı denelerdiń ólshemleri turaqlı bolıp qalmaydı. Bul jaǵdayda Gerc gipotezasın durıs dep esaplay almaymız.

Al efirdiń bir bólimi (bir bólimi, al tolıǵı menen emes) Jer menen birge alıp júrile me? degen sorawǵa juwap beriw ushın 1860-jılı Fizo tárepinen tájiriybeler júrgizildi.

Fizo tájiriybesiniń ideyası qozǵalıwshı materiallıq denedegi (mısalı suwdaǵı) jaqtılıqtıń tezligin ólshewden ibarat (7-súwret). Meyli usı ortalıqtaǵı jaqtılıqtıń tezligi $v' = \frac{c}{n}$ (n arqalı ortalıqtıń sınıw kórsetkishi belgilengen) bolsın. Eger jaqtılıq tarqalatuǵın ortalıqtıń ózi v tezligi menen qozǵalatuǵın bolsa qozǵalmaytuǵın baqlawshıǵa salıstırǵandaǵı jaqtılıqtıń tezligi $v' \pm V$ shamasına teń bolıwı tiyis. Bul ańlatpada + belgisi ortalıq penen jaqtılıq bir baǵıtta qozǵalatuǵın jaǵdayǵa tiyisli. Óziniń tájiriybesinde Fizo ortalıqtıń qozǵalıw baǵıtındaǵı hám bul baǵıtqa qarama-qarsı bolǵan baǵıttaǵı jaqtılıqtıń tezliklerin salıstırdı.

Ortalıqtıń qozǵalıw baǵıtındaǵı $\left(v^{(+)}\right)$ hám bul baǵıtqa qarama-qarsı baǵıttaǵı (v') jaqtılıqtıń tezlikleri bılay esaplanadı:

$$v^{(+)} = v' + kV, v^{(-)} = kV.$$

Bul ańlatpalardaǵı k arqalı eksperimentte anıqlanıwı kerek bolǵan koefficient. Eger $k = 1$ teńligi orınlansa tezliklerdi qosıwdıń klassikalıq formulası orınlı boladı. Eger $k \neq 1$ bolıp shıqsa bul klassikalıq formula durıs nátiyje bermeydi.

l arqalı suyıqlıqtaǵı jaqtılıq júrip ótetuǵın uzınlıqtı, al t_0 arqalı suyıqlıq arqalı ótken waqıttı esaplamaǵanda jaqtılıqtıń eksperimentallıq dúzilis arqalı ótetuǵın waqtın belgileymiz. Bunday jaǵdayda eki nurdıń (birewi suyıqlıqtıń qozǵalıw baǵıtında, ekinshisi oǵan qarama-qarsı) eksperimentallıq dúzilis arqalı ótiw waqtı tómendegidey ańlatpalar járdeminde esaplanadı:

$$t_1 = t_0 + \frac{1}{v' + kV}, t_2 = t_0 + \frac{1}{v' - kV}.$$

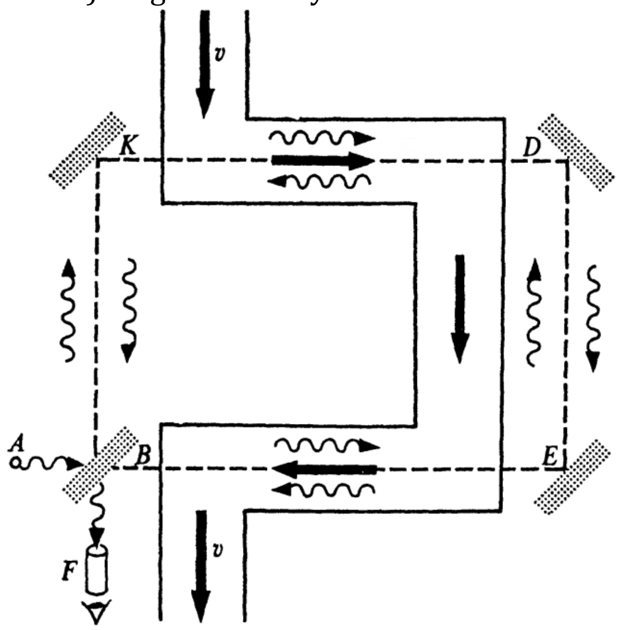
Bul ańlatpalardan eki nurdıń júrisleri arasındağı ayırma waqıt boyınsha tómendegi formulalar boyınsha esaplanatuğınlığı kelip shığadı:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2lkV}{v'^2 - k^2V^2}.$$

Interferenciyalıq jolaqlar boyınsha júrisler ayırmasın ólshep, l, v, v' shamalarınıń mánislerin qoyıp eń aqırğı formuladan k nı anıqlaw múmkin. Fizo tájiriybesinde

$$k = q/n^2$$

teńliginiń orın alatuğınlığın kórsetken. Suw ushın sınıw kórsetkishi $n = 1{,}3$ shamasına teń. Demek $k = 0{,}4$ ekenligi kelip shığadı. Sonlıqtan $v^{(+)} = v' + kV$ hám $v^{(-)} = v' - kV$ formulalarınan $v = v' \pm 0{,}4v$ ańlatpası kelip shığadı (klassikalıq fizika boyınsha $v = v' \pm v$ bolıp shığıwı kerek edi). Nátiyjede Fizo tájiriybesinde tezliklerdi qosıw ushın tezliklerdi qosıwdıń klassikalıq formulasınan paydalanıwğa bolmaytuğınlığı dálillenedi. Sonıń menen birge bul tájiriybeden qozğalıwshı dene tárepinen efir jarım-jartı alıp júriledi degen juwmaq shığarıwğa boladı hám deneler tárepinen átirapındağı efir tolıq alıp júriledi degen gipoteza (Gerc gipotezası) tolığı menen biykarlanadı.



7-súwret. Fizo tájiriybesiniń sxeması.

Fizo tájiriybesiniń juwmaqları baspadan shıqqannan keyin eki túrli pikir qaldı:

1. Efir qozğalmaydı, yağnıy ol materiyanıń qozğalısına pútkilley qatnaspaydı.

2. Efir qozğalıwshı materiya tárepinen alıp júriledi, biraq onıń tezligi qozğalıwshı materiyanıń tezligine teń emes.

Álbette, ekinshi gipotezanı rawajlandırıw ushın efir menen qozğalıwshı materiyanı baylanıstıratuğın qanday da bir jağdaydı qáliplestiriw kerek boladı.

Fizo jasağan dáwirde bunday nátiyje tańlanıw payda etpedi. Sebebi joqarıda gáp etilgenindey, Fizo tájiriybesi ótkerilmesten ádewir burın Frenel qozğalıwshı materiya tárepinen efir tolıq alıp júrilmeytuğınlığı haqqında boljaw aytqan edi. Álbette Frenel qozğalıwshı materiya efirdi qanshama alıp júredi degen sorawğa juwap bergen joq. Usınıń nátiyjesinde joqarıda aytıp ótilgen Frenel hám Fizo gipotezası payda boldı.

Albert Eynshteyn óziniń 1920-jılı jarıq kórgen "Efir hám salıstırmalıq teoriyası" maqalasında bılay dep jazadı:

"Jaqtılıqtıq qásiyetleri menen materiallıq denelerde tarqalatuğın serpimli tolqınlar qásiyetleri arasındağı uqsaslıqtıń bar ekenligi anıq kóringenlikten XIX ásirdiń birinshi yarımında efir gipotezası qaytadan kúshli túrde qollap-quwatlana basladı. Jaqtılıqtı inert massaǵa iye hám Álemdi tolıǵı menen toltırıp turatuǵın serpimli ortalıqtaǵı terbelmeli process dep qarawdıń durıslıǵı gúman payda etpedi. Oǵan qosımsha jaqtılıqtıń polyarizaciyası usı ortalıqtıń qattı denelerdiń qásiyetlerine uqsaslıǵın keltirip shıǵardı. Sebebi suyıqlıqta emes, al qattı denelerde ǵana kóldeneń tolqınlar tarqala aladı. Solay etip bóleksheleri jaqtılıq tolqınlarına sáykes kishi deformaciyalıq qozǵalıs penen qozǵala alatuǵın "kvaziserpimli" jaqtılıq efiri haqqındaǵı teoriyaǵa kelip jetti.

Qozǵalmaytuǵın efir teoriyası dep te atalǵan bul teoriya keyinirek Fizo tájiriybesinde tirek taptı. Bul tájiriybeden efirdiń qozǵalısqa qatnaspaydı dep juwmaq shıǵarıwǵa boladı. Fizo tájiriybesi arnawlı salıstırmalıq teoriyası ushın da fundamentallıq áhmiyetke iye. Jaqtılıqtıń aberraciyası qubılısı da tap sonday bolıp kvaziqattı efir teoriyasınıń paydası ushın xızmet etti".

A.Eynshteyn 1910-jılı jarıq kórgen "Salıstırmalıq principi hám onıń saldarları" miynetinde Fizo tájiriybesiniń jıldıń hár qıylı máwsimlerinde qaytalanǵanlıǵın, biraq barlıq waqıtları da birdey nátiyjelerge alıp kelgenligin atap ótedi. Sonıń menen birge Fizo tájiriybesinen qozǵalıwshı materiya tárepinen Gerc gipotezası jarım-jartı alıp júriletuǵını kelip shıǵatuǵınlıǵı, al basqa barlıq tájiriybelerdiń bul gipotezanı biykarlaytuǵınlıǵı aytılǵan.

Tek salıstırmalıq teoriyası payda bolǵannan keyin ǵana **Fizo tájiriybesiniń tezliklerdi qosıwdıń klassikalıq formulasınıń hám Galiley túrlendiriwleriniń durıs emes ekenliginiń dálilleytuǵın tájiriybe ekenligi anıqlandı**.

Solay etip jaqtılıqtıń tezligi haqqındaǵı kóz-qaraslar 200-300 jıllar dawamında úlken ózgerislerge ushıradı hám ótken ásirdiń aqırında onıń turaqlılıǵı haqqında pikirler payda bola basladı.

Jaqtılıqtıń vakuumdegi tezliginiń turaqlılıǵı (jaqtılıq tezliginiń derektiń yamasa jaqtılıqtı qabıl etiwshiniń tezligine baylanıssızlıǵı) kóp sanlı eksperimentallıq jumıslardıń tábiyiy juwmaǵı bolıp tabıladı. Maykelson-Morli hám Fizo tájiriybeleri tariyxıy jaqtan birinshi tájiriybeler boldı. Keyin ala bul tájiriybeler basqa da tájiriybeler menen tolıqtırıldı. Biraq soǵan qaramastan jaqtılıq tezligin turaqlı dep tastıyıqlaw tuwrıdan-tuwrı eksperimentallıq tekseriwler múmkinshilikleri sheklerinen shıǵıp ketetuǵın postulat bolıp tabılatuǵınlıǵın umıtpawımız kerek.

Bazı bir juwmaqlar:

1. Galileydiń salıstırmalıq principi denelerdiń tezlikleriniń mánisi jaqtılıqtıń tezliginen ádewir kishi bolǵan jaǵdaylarda durıs nátiyjelerdi beredi.

2. Maykelson-Morli hám Fizo tájiriybeleri gipotezalıq "dúnyalıq efir" túsinigin tolıq biykarladı.

3. Eynshteynniń salıstırmalıq principi eki postulattan turadı:

a) fizikanıń barlıq nızamları barlıq inerciallıq esaplaw sistemalarına qarata invariant;

b) jaqtılıqtıń tezligi barlıq inerciallıq esaplaw sistemalarında birdey.

4. Eynshteynniń salıstırmalıq principi onıń arnawlı salıstırmalıq teoriyasınıń tiykarında turadı.

5. Arnawlı salıstırmalıq teoriyası "absolyut keńislik" hám "absolyut waqıt" túsiniklerin biykarladı hám keńisliktiń de, waqıttıń da salıstırmalı ekenligin tastıyıqladı.

6. Eger júrip baratırǵan poezdda hár bir sekundta bir retten mıltıq atılıp tursa (poezddaǵı mıltıq atıwdıń jiyiligi 1 atıw/s), poezd jaqınlap kiyatırǵan platformada turǵan baqlawshıǵa mıltıq dawıslarınıń jiyiligi kóbirek bolıp qabıl etiledi (ω>1 atıw/s). Al poezd alıslap baratırǵan jaǵdayda platformada turǵan baqlawshıǵa mıltıq dawısları siyreksiydi (ω<1 atıw/s).

7. Maykelson-Morli tájiriybesinde birdey uzınlıqtaǵı "iyinlerdi" alıw múmkinshiligi bolǵan joq. Sebebi "iyinlerdi" birdey etip alıw uzınlıqtı metrdiń millionnan bir úlesindey dállikte ólshewdi talap etedi. Bunday dállik Maykelson-Morli zamanında bolǵan joq.

8. Jaqtılıqtıń tezligi onıń deregi menen jaqtılıqtı qabıllawshınıń tezliginen ǵárezli emes.

9. Barlıq eksperimentallıq maǵlıwmatlar tiykarında biz mınaday juwmaqqa kelemiz: Eger qanday da bir inerciallıq esaplaw sistemasında noqatlıq derekten shıqqan jaqtılıq tolqınınıń frontı sferalıq bolsa, onda sol tolqın frontı qálegen inercial esaplaw sistemasında turǵan baqlawshı ushın da sferalıq boladı.

Sorawlar:

1. Keńislik hám waqıttıń qásiyetleri haqqında Orta ásirlerdegi SHıǵıs alımları qanday pikirde boldı?

2. Salıstırmalıq principin fizika iliminiń eń tiykarǵı principleri qatarına jatqaradı. Nelikten?

3. Qanday sebeplerge baylanıslı Nyuton mexanikasınıń (dinamikanıń) teńlemeleri Galiley túrlendiriwlerine qarata invariant?

4. Maykelson-Morli hám Fizo tájiriybeleriniń nátiyjeleriniń salıstırmalıq teoriyasınıń dóretiliwine qanday ornı bar?

5. Qanday baqlawshılardıń kóz-qarası boyınsha fizikalıq denelerdiń ólshemleri qozǵalıs baǵıtında qısqaradı?

6. Menshikli waqıt degenimiz ne?

7. Eynshteynniń salıstırmalıq principiniń tiyukarında kanday postulatlar jatadı?

Paydalanılǵan ádebiyatlar dizimi

1. Hugh D. Young, Roger A. Freedman,cjntributing autor A.Lewis Ford. University Physics with modern Physics. 13th Edition. Addison-Wesley. 1598 p.

(p. 1223-1260).

2. L.D.Landau, E.M.Lifshic. Teoretiчeskaya fizika. Uчebnoe posobie dlya vuzov. V. 10 t. Tom II. Teoriya polya. 8-e izdanie. Izdatelstvo "FIZMATLIT". Moskva. 2003. 536 s.

Glava 1. §§ 1-3.

3. A.N.Matveev. Mexanika i teoriya otnositelnosti. Uчebnik dlya studentov vısshix uчebnıx zavedeniy. 3-e izdanie. Izdatelstva "ONIKS 21 vek", "Mir i obrazovanie". Moskva. 2003. 432 s.

Glava 1.

4. D.V.Sivuxin. Obщiy kurs fiziki. Uчebnoe posobie. Dlya vuzov. V 5 t. Tom I. Mexanika. 4-e izdanie. Izdatelstvo MFTI "FIZMATLIT". Moskva. 2005. 560 s.

Glava 1. § 1.

5. Benjamin Crowell. Spesial Relativity. www.lightandmatter.com, rev. February 11, 2016.

6. Lewis Ryder. Introduction to General Relativity. Cambridge University Press. 2009.

2-lekciya. Lorenc túrlendiriwleri hám onnan kelip shıǵatuǵın nátiyjeler. Keńisliklik hám waqıtlıq kesindilerdiń salıstırmalıǵı. Eynshteynniń tezliklerdi qosıw nızamı. Aberraciya. Bir waqıtlılıqtıń salıstırmalıǵı

Tiykarǵı principler. Galiley túrlendiriwleri úlken tezliklerde durıs nátiyjelerdi bermeydi. Bul túrlendiriwlerden jaqtılıq tezliginiń turaqlılıǵı kelip shıqpaydı, inercial koordinatalar sistemasındaǵı koordinatalar menen waqıt arasındaǵı baylanıslardı durıs sáwlelendirmeydi. Sonlıqtan eksperimentattıq faktlerdi durıs sáwlelendiretuǵın, jaqtılıqtıń tezlilginiń turaqlılıǵına alıp keletuǵın túrlendiriwlerdi tabıw kerek. Bul túrlendiriwler Lorenc túrlendiriwleri dep ataladı. Bul túrlendiriwlerdi **salıstırmalıq principi** hám **jaqtılıqtıń tezliginiń turaqlılıq principi** tiykarında keltirilip shıǵıw múmkin.

Koordinatalardı túrlendiriwdiń sızıqlılıǵı. Keńisliktegi burıwlar hám koordinatalar basın jılıstırıw jolları menen júrgiziletuǵın geometriyalıq túrlendiriwler járdeminde kozǵalıwshı koordinatalar sistemasınıń baǵıtların 1-súwrette kórsetilgendey jaǵdayǵa alıp keliw múmkin. Tezlikler klassikalıq (9)-formula boyınsha qosılmaytuǵın bolǵanlıqtan bir koordinatalar sistemasındaǵı waqıt tek ekinshi koordinata sistemasındaǵı waqıt penen anıqlanbastan, koordinatalardan da ǵárezli boladı. Sonlıqtan ulıwmalıq jaǵdaylarda túrlendiriwler tómendegidey túrge iye boladı:

$$x' = \Phi_1(x,y,z,t), y' = \Phi_2(x,y,z,t),\ z' = \Phi_3(x,y,z,t), \qquad (1)$$
$$t' = \Phi_4(x,y,z,t).$$

Bul ańlatpalardıń oń tárepinde túrin anıqlaw zárúr bolǵan geypara Φ_i funkciyaları tur.

Bul funkciyalardıń ulıwma túri keńislik penen waqıttıń qásiyetleri menen anıqlanadı. Biz saylap alǵan esaplaw sistemasındaǵı noqatlar bir birinen ayırılmaydı dep esaplaymız. Demek koordinata basın keńisliktiń qálegen noqatına kóshiriwge boladı. Usınday jaǵdayda qálegen geometriyalıq obъektler arasındaǵı barıq geometriyalıq qatnaslar ózgerissiz qalıwı kerek. Bul qásiyet **keńisliktiń bir tekliligi** dep ataladı (keńisliktiń qásietiniń bir noqattan ekinshi noqatqa ótkende ózgermey qalıwı). Sonıń menen birge hár bir noqatta koordinata kósherlerin ıqtıyarlı túrde baǵıtlaw múmkin. Bul jaǵdayda da qálegen geometriyalıq obъektler arasındaǵı barıq geometriyalıq qatnaslar ózgerissiz qaladı. **Bul keńisliktiń qásiyetiniń barlıq baǵıtlar boyınsha birdey ekenligi bildiredi. Bunday qásiyetti keńisliktiń izotroplılıǵı dep ataymız**.

Inercial esaplaw sistemalarındaǵı bir tekliligi menen izotroplılıǵı keńisliktiń eń baslı qásiyetleriniń biri bolıp tabıladı.

Waqıt ta bir teklilik qásiyetke iye. Fizikalıq jaqtan ol tómendegidey mániske iye:

Meyli belgili bir fizikalıq situaciya bazı bir waqıt momentinde payda bolsın. Waqıttıń bunnan keyingi momentlerinde situaciya rawajlana baslaydı. Meyli usınday situaciya basqa bir waqıt momentinde payda bolsın. Bul jaǵdayda da tap birinshi jaǵdaydaǵıday bolıp situaciya rawajlanatuǵın bolsa waqıt bir tekli dep esaplanadı. Solay etip **waqıttıń bir tekliligi dep fizikalıq situaciyanıń qaysı waqıt momentinde payda bolǵanlıǵına ǵárezsiz birdey bolıp rawajlanıwına hám ózgeriwine aytamız**.

Keńislik penen waqıttıń bir tekliliginen (1)-ańlatpalardıń sızıqlı bolıwınıń kerek ekenligi kelip shıǵadı. Dálillew ushın x' tıń sheksiz kishi ósimi dx' tı qaraymız. Bul ózgeriske shtrixı joq sistemada sheksiz kishi dx, dy, dz hám dt ósimleri sáykes keledi. Matematikada keńnen belgili bolǵan tolıq differencial formulası járdeminde x, y, z, t shamalarınıń ózgeriwlerine baylanıslı bolǵan dx' tı esaplaymız:

$$dx' = \frac{\partial\Phi_1}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}dz + \frac{\partial\Phi_1}{\partial t}dt \qquad (2)$$

ańlatpasın alamız. Keńislik penen waqıttıń bir tekliliginen bul matematikalıq qatnaslar keńisliktiń barlıq noqatlarında hám barlıq waqıt momentlerinde birdey bolıwı kerek. Sonlıqtan

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}, \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}, \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}, \frac{\partial\Phi_1}{\partial t}$$

shamaları waqıttan da, koordinatalardan da ǵárezsiz, yaǵnıy turaqlı sanlar bolıwı shárt. Sonlıqtan Φ_1 funkciyası

$$\Phi_1(x,y,z,t) = A_1x + A_2y + A_3z + A_4t + A_5 \quad (3)$$

túrinde jazılıwı kerek. Bul formuladaǵı $A_1, A_2, A_3, \ldots$ shamaları turaqlılar. Solay etip $\Phi_1(x,y,z,t)$ funkciyası óziniń argumentleriniń sızıqlı funkciyası bolıp tabıladı. Tap usınday jollar menen keńislik penen waqıttıń bir tekliliginen Φ_2, Φ_3 hám Φ_4 shamalarınıń da (1)-túrlendiriwlerde x, y, z, t ózgeriwshilerdiń sızıqlı funkciyaları bolatuǵınlıǵın dálillewge boladı.

***y* hám *z* ler ushın túrlendiriwler**. Hár bir koordinatalar sistemasında noqatlar $x = y = z = 0$, $x' = y' = z' = 0$ teńlikleri menen berilgen bolsın. $t = 0$ waqıt momentinde koordinatalar basları bir noqatta turadı dep esaplayıq. Bunday jaǵdayda (3) túrindegi sızıqlı túrlendiriwlerde $A_5 = 0$ bolıwı kerek hám y jáne z kósherleri ushın túrlendiriwler tómendegishe jazıladı:

$$\begin{aligned} y' &= a_1x + a_2y + a_3z + a_4t, \\ z' &= b_1x + b_2y + b_3z + b_4t. \end{aligned} \quad (4)$$

1-súwrette kórsetilgendey y hám y', z hám z' kósherleri óz-ara parallel bolsın. x' kósheri barlıq waqıtta x kósheri menen betlesetuǵın bolǵanlıqtan $y = 0$ teńliginen $y' = 0$ teńligi, $z = 0$ teńliginen $z' = 0$ teńligi kelip shıǵadı. YAǵnıy qálegen x, y, z hám t ushın mına teńlikler orınlanadı:

$$\begin{aligned} 0 &= a_1x + a_3z + a_4t, \\ 0 &= b_1x + b_2y + b_4t. \end{aligned} \quad (5)$$

Bul teńlikler tek

$$a_1 = a_3 = a_4 = 0 \ h\acute{a}m \ b_1 = b_2 = b_4 = 0 \quad (6)$$

teńlikleri orınlanǵanda ǵana qanaatlandırıladı. Sonlıqtan y hám z ler ushın túrlendiriwler mına túrge enedi:

$$y' = ay, z' = az. \quad (7)$$

Bul ańlatpalarda qozǵalısqa qatnası boyınsha y hám z kósherleri teńdey huqıqqa iye bolǵanlıqtan túrlendiriwdegi koefficientlerdiń de birdey bolatuǵınlıǵı, yaǵnıy $a_3 = b_3 = a$ teńlikleriniń orınlanatuǵınlıǵını esapqa alınǵan. (7)-ańlatpalardaǵı a koefficienti bazı bir masshtabtıń uzınlıǵınıń shtrixlanbaǵan sistemadaǵıǵa qaraǵanda shtrixlanǵan sistemada neshe ese úlken ekenliginen derek beredi. (7)-ańlatpalardı mına túrde kóshirip jazamız

$$y = \frac{1}{a} y', z = \frac{1}{a} z'. \tag{8}$$

$\frac{1}{a}$ shaması bazı bir masshtabtıń shtrixlanǵan sistemadaǵıǵa qaraǵanda shtrixlanbaǵan sistemada neshe ese úlken ekenliginen kórsetedi. Salıstırmalıq principi boyınsha eki esaplaw sisteması da teńdey huqıqlı. Sonlıqtan birinshisinen ekinshisine ótkende de, keri ótkende de masshtab uzınlıǵı birdey bolıp ózgeriwi kerek. Sonlıqtan (7) hám (8) formulalarında $\frac{1}{a} = a$ teńliginiń saqlanıwı shárt ($a = -1$ bolǵan matematikalıq sheshim bul jerde qollanılmaydı, sebebi y, z hám y', z kósherleriniń oń baǵıtları bir biri menen sáykes keledi. Demek y, z koordinataları ushın túrlendiriwler mınaday túrge iye:

$$y' = y, z' = z. \tag{9}$$

***x* penen *t* ler ushın túrlendiriwler**. y hám z ózgeriwshileri óz aldına túrlenetuǵın bolǵanlıqtan x hám t lar sızıqlı túrlendiriwlerde tek bir biri menen baylanısqan bolıwı kerek. Onday jaǵdayda qozǵalmaytuǵın sistemaǵa qaraǵanda qozǵalıwshı sistemanıq koordinata bası $x = vt$ koordinatasına, al qozǵalıwshı sistemada $x' = 0$ koordinatasına iye bolıwı kerek. Túrlendiriwdiń sızıqlı ekenligine baylanıslı

$$x' = \alpha(x - vt) \tag{10}$$

ańlatpasın jaza alamız. Bul ańlatpada α arqalı anıqlanıwı kerek bolǵan proporcionallıq koefficient belgilengen.

Qozǵalıwshı esaplaw sistemısında turıp hám bul sistemanı qozǵalmaydı dep esaplap joqarıdaǵıday talqılawdı dawam ettiriwimiz múmkin. Bunday jaǵdayda shtrixlanbaǵan koordinata sistemasınıń koordinata bası $x' = vt$ ańlatpası járdeminde anıqlanadı. Sebebi shtrixlanǵan sistemada shtrixlanbaǵan sistema x kósheriniń teris mánisleri baǵıtında qozǵaladı. SHtrixlanbaǵan sistemada shtrixlanbaǵan sistemanıń koordinata bası $x = 0$ teńligi járdeminde táriyiplenedi. Demek shtrixlanǵan sistemadan bul sistemanı qozǵalmaydı dep esaplap (10) nıń ornına

$$x = \alpha'(x' + vt) \tag{11}$$

túrlendiriwine kelemiz. Bul ańlatpada da α' arqalı proporcionallıq koefficienti belgilengen. Salıstırmalıq principi boyınsha $\alpha = \alpha'$ ekenligin dálilleymiz.

Meyli uzınlıǵı l bolǵan sterjen shtrixlanǵan koordinata sistemasında tınıshlıqta turǵan bolsın. Demek sterjenniń bası menen aqırınıń koordinataları l shamasına ayırmaǵa iye boladı degen sóz:

$$x_2' - x_1' = l. \tag{12}$$

SHtrixlanbaǵan sistemada bul sterjen v tezligi menen qozǵaladı. Sterjenniń uzınlıǵı dep qozǵalmaytuǵın sistemadaǵı eki noqat arasındaǵı qashıqlıq esaplanadı. Usı eki noqatqa bir waqıt momentinde qozǵalıwshı sterjenniń bası menen aqırı sáykes keledi. t_0 waqıt momentindegi sterjenniń bası menen aqırın (ushın) belgilep alamız. (10) nıń tiykarında sol x_1' hám x_2' noqatları ushın mına ańlatpalardı alamız:

$$x_1' = \alpha(x_1 - vt_0), x_2' = \alpha(x_2 - vt_0). \tag{13}$$

Demek qozǵalıwshı sterjenniń uzınlıǵı qozǵalmaytuǵın shtrixlanbaǵan sistemada mınaǵan teń:

$$x_2 - x_1 = \frac{x_2' - x_1'}{\alpha} = \frac{l}{\alpha}. \tag{14}$$

Endi meyli sol sterjen shtrixlanbaǵan sistemada tınıshlıqta turǵan bolsın hám bul sistemada l uzınlıǵına iye bolsın. Demek sterjenniń bası menen ushı arasındaǵı koordinatalar l shamasına parıq qıladı degen sóz, yaǵnıy

$$x_2 - x_1 = l. \tag{15}$$

Qozǵalmaytuǵın shtrixlanbaǵan sistemada sterjen $-v$ tezligi menen qozǵaladı. SHtrixlanǵan sistemada turıp (yaǵnıy usı sistemaǵa salıstırǵandaǵı) sterjenniń uzınlıǵın ólshew ushın usı sistemadaǵı qanday da bir t_1' waqıt momentinde sterjenniń bası menen ushın belgilep alıw kerek. (11)-formula tiykarında mınaǵan iye bolamız:

$$x_1 = \alpha'(x_1' - vt_0'), x_2 = \alpha'(x_2' - vt_0'). \tag{16}$$

Demek qozǵalmaydı dep qabıl etilgen shtrixlanǵan koordinatalar sistemasındaǵı sterjenniń uzınlıǵı mınaǵan teń:

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\alpha'} = \frac{l}{\alpha'}. \tag{17}$$

Salıstırmalıq principi boyınsha eki sistema da teń huqıqlı hám bul sistemalardıń ekewinde de birdey tezlik penen qozǵalatuǵın bir sterjenniń uzınlıǵı birdey boladı. Sonlıqtan (14) hám (17) formulalarda $\frac{l}{\alpha'} = \frac{l}{\alpha}$, yaǵnıy $\alpha' = \alpha$ teńliginiń orın alıwı kerek. Biz usı jaǵdaydı dálillewimiz kerek edi.

Endi jaqtılıqtıń tezliginiń turaqlılıǵı postulatına kelemiz. Meyli koordinata basları bir noqatta turǵan jaǵdayda hám saatlar $t = t' = 0$ waqıtın kórsetken momentte sol koordinata baslarınan jaqtılıq signalı jiberilgen bolsın. Eki koordinatalar sistemasında da (shtrixlanǵan hám shtrixlanbaǵan) jaqtılıqtıń taralıwı

$$x' = ct', x = ct \tag{18}$$

teńlikleriniń járdeminde beriledi. Bul jerde eki sistemada da jaqtılıqtıń birdey tezlikke iye bolatuǵınlıǵı esapqa alınǵan. Bul ańlatpadaǵı mánislerdi (8)- hám (9)- ańlatpalarǵa qoysaq hám α = α' ekenligin esapqa alsaq

$$ct' = \alpha t(c - v), ct = \alpha t'(c + v) \tag{19}$$

ańlatpaların alamız. Bul ańlatpalardıń shet tárepin shep tárepi menen, oń tárepin oń tárepi menen kóbeytip $t't$ kóbeymesine qısqartsaq

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{20}$$

formulasın alamız. (11)-ańlatpadan (10)-ańlatpanı paydalanıw arqalı mınaǵan iye bolamız

$$vt' = \frac{x}{a} - x' = \frac{x}{a} - \alpha(x - vt) = \alpha vt + x\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right). \tag{21}$$

Bunnan (20)-ańlatpanı esapqa alıp

$$t' = \alpha\left\{t + \frac{x}{v}\left(\frac{1}{\alpha^2} - 1\right)\right\} = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{22}$$

teńliginiń orınlanatuǵınlıǵına isenemiz.

Endi Lorenc túrlendiriwlerin ańsat keltirip shıǵaramız. (9)-, (10)- hám (22)-túrlendiriwleri bir birine salıstırǵanda V tezligi menen qozǵalatuǵın sistemalardıń koordinataların baylanıstıradı. Olar Lorenc túrlendiriwleri dep ataladı. Túrlendiriw formulaların jáne bir ret kóshirip jazamız:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, y' = y, z' = z, t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{23}$$

Calıstırmalıq principi boyınsha keri ótiw de tap usınday túrge iye boladı, tek ǵana tezliktiń belgisi ózgeredi:

$$x = \frac{x' + vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, y = y', z = z', t = \frac{t' - \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{24}$$

Galiley túrlendiriwleri Lorenc túrlendiriwleriniń dara jaǵdayı bolıp tabıladı. Haqıyqatında da $\frac{v}{c} \ll 1$ bolǵanda (kishi tezliklerde) Lorenc túrlendiriwleri tolıǵı menen Galiley túrlendiriwlerine ótedi. Kishi tezliklerde Galiley túrlendiriwleri menen Lorenc túrlendiriwleri arasındaǵı ayırma sezilerliktey bolmaydı. Sonlıqtan Galiley túrlendiriwleriniń dál emes ekenligi kóp waqıtlarǵa shekem fiziklerdiń itibarınan sırtta qalıp ketti.

Lorenc túrlendiriwlerinen kelip shıǵatuǵın nátiyjeler hám interval. Bir waqıtlılıqtıń salıstırmalılıǵı. Koordinata sistemasınıń **hár qanday x_1 hám x_2 noqatlarında waqıyalar usı sistemanıń saatı boyınsha bir waqıt momentinde júz berse bir waqıtta bolatuǵın waqıyalar dep ataladı.** Hár bir noqatta júz beretuǵın waqıya sol noqatta turǵan saat járdeminde belgilenedi. Eki waqıya qozǵalmaytuǵın koordinatalar sistemasında bir t_0 waqıt momentinde baslandı dep esaplaymız.

Qozǵalıwshı koordinatalar sistemasında bul waqıyalar x_1' hám x_2' noqatlarında t_1' hám t_2' waqıt momentlerinde baslanadı dep qabıl eteyik. t_1' hám t_2' waqıtları qozǵalıwshı sistemadaǵı x_1' hám x_2' noqatlarında turǵan saatlardıń kórsetiwi boladı. SHtrixlanǵan hám shtrixlanbaǵan koordinatalar arasındaǵı baylanıs (23) Lorenc túrlendiriwleri járdeminde beriledi:

$$x_1' = \frac{x_1 - vt_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, x_2' = \frac{x_2 - vt_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{25}$$

$$t_1' = \frac{t_0 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, t_2' = \frac{t_0 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Waqıyalar x kósheriniń boyında jaylasqan noqatlarda júz bergenlikten y hám z koordinataları eki koordinata sistemalarında da birdey boladı. (25)- ańlatpalar qozǵalıwshı sistemada bul waqıyalardıń bir waqıt momentinde bolmaytuǵınlıǵın kórsetip tur ($t_1' \neq t_2'$). Haqıyqatında da olar

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{\frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{26}$$

waqıt intervalına ayrılǵan. Demek bir koordinatalar sistemasında bir waqıtta júz beretuǵın waqıyalar ekinshi sistemada bir waqıtta júz bermeydi eken.

Bir waqıtlılıq túsinigi koordinatalar sistemasınan ǵárezsiz absolyut mániske iye bolmaydı. Qanday da bir waqıyalardıń bir waqıtta bolǵanlıǵın aytıw ushın usı waqıyalardıń qaysı koordinatalar sistemasında bolıp ótkenligin aytıw shárt.

Bir waqıtlılıqtıń salıstırmalılıǵı hám sebeplilik. (26)-formuladan eger $x_1 > x_2$ bolsa, onda x tıń oń baǵıtına karay qozǵalatuǵın koordinatalar sistemasında $t_2' > t_1'$ teńsizliginiń orın alatuǵınlıǵı kórinip tur. Al qarama-karsı baǵıtta qozǵalatuǵın koordinatalar sistemasında bolsa ($v < 0$) $t_2' < t_1'$ teńsizligi ornı aladı. Solay etip eki waqıyanıń júzege keliw izbe-izligi hár qıylı koordinatalar sistemasında hár qıylı boladı eken. Usıǵan baylanıslı mınaday tábiyiy soraw tuwıladı: bir koordinatalar sistemasında sebeptiń nátiyjeden burın júzege keliwi, al ekinshi bir koordinatalar sistemasında nátiyjeniń sebepten keyin júzege keliwi múmkin be? Álbette bunday jaǵday waqıyalar sebep-nátiyjelik boyınsha baylanısqan (waqıyanıń bolıp ótiwi ushın belgili bir sebeptiń orın alıwı kerek) bolıwı kerek dep esaplaytuǵın teoriyalarda bolmaydı: wakıyaǵa kóz-qaraslar ózgergende de sebep penen nátiyje arasındaǵı orın almasıwdıń bolıwı múmkin emes.

Sebep-nátiyjelik arasındaǵı baylanıstıń obъektiv xarakterge iye bolıwı hám bul baylanıs karap atırılǵan koordinatalar sistemasınan ǵárezsiz bolıwı ushın hár qıylı noqatlarda júz beretuǵın waqıyalar arasındaǵı fizikalıq baylanıstı támiyinleytuǵın materiallıq tásirlesiwlerdiń hámmesi de jaqtılıqtıń tezliginen úlken tezlik penen tarqala almaydı. Basqa sóz benen aytqanda bir noqattan ekinshi noqatqa fizikalıq tásir jaqtılıqtıń tezliginen úlken tezliklerde jetkerilip berile almaydı. Usınıń saldarınan waqıyalardıń sebeplilik penen baylanıslı ekenligi obъektiv xarakterge iye boladı: sebep penen nátiyje orın almasatuǵın koordinatalar sisteması bolmaydı.

Qozǵalıwshı deneniń uzınlıǵı.

Qozǵalıstaǵı sterjenniń uzınlıǵı dep usı sterjenniń eki ushına sáykes keliwshi qozǵalmaytuǵın sistemadaǵı usı sistemanıń saatı boyınsha bir waqıt momentinde alınǵan eki noqat arasındaǵı qashıqlıqtı aytamız. Solay etip qozǵalıwshı sterjenniń ushları qozǵalmaytuǵın sistemada usı sistemanıń saatlarınıń járdeminde waqıttıń bir momentinde belgilenip alınadı eken. Al qozǵalıwshı sistemanıń saatları boyınsha belgilenip alıw momentleri basqasha boladı. Qozǵalmaytuǵın sistemada bir waqıt momentinde belgilenip alınǵan eki noqat arasındaǵı qashıqlıq basqa mániske iye boladı. Demek, sterjenniń uzınlıǵı Lorenc túrlendiriwiniń invariantı bolıp tabılmaydı hám hár qıylı esaplaw sistemalarında hár qıylı mániske iye boladı.

Meyli uzınlıǵı l ge teń bolǵan sterjen shtrixlanǵan koordinatalar sistemasında tınıshlıqta turǵan bolsın hám onıń boyı x' baǵıtına parallel bolsın. Biz bul jerde deneniń uzınlıǵı haqqında aytkanda usı deneniń tınıshlıqta turǵan koordinatalar sistemasındaǵı uzınlıǵın aytatuǵınımızdı sezemiz. Sterjenniń ushlarınıń koordinataların x_1' hám x_2' dep belgileymiz, qala berse $x_2' - x_1' = l$. Bul jerde l shtrixsız jazılǵan. Sebebi l sterjenniń usı sterjen qozǵalmay turǵan koordinatalar sistemasındaǵı, basqa sóz benen aytqanda tınısh turǵan sterjenniń uzınlıǵı bolıp tabıladı.

t_0 waqıt momentinde v tezligi menen qozǵalatuǵın sterjenniń ushlarındaǵı noqatlardı shtrixlanbaǵan koordinatalar sistemasında belgilep alamız. Lorenc túrlendiriwleri formulaları tiykarında

$$x_1' = \frac{x_1 - vt_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, x_2' = \frac{x_2 - vt_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{32}$$

ańlatpaların jaza alamız. Bunnan

$$l = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{33}$$

formulasın alamız. Bul formulada $l' = x_2 - x_1$ arqalı qozǵalıwshı sterjenniń uzınlıǵı belgilengen. Demek (33)-ańlatpanı

$$l' = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{34}$$

túrinde kóshirip jazıp qozǵalıwshı sterjenniń uzınlıǵınıń qozǵalıs baǵıtındaǵı uzınlıǵınıń qozǵalmay turǵan sterjenniń uzınlıǵınan kishi bolatuǵınlıǵın sezemiz. Álbette, eger biz usı talqılawlardı tınıshlıqta tur dep qabıl etilgen shtrixlanǵan koordinatalar sisteması kóz-qarasında turıp islesek te qozǵalıwshı sterjenniń uzınlıǵınıń (34)-formula menen anıqlanatuǵınlıǵına kelemiz. Bunday jaǵdaydıń orın alıwı salıstırmalıq principi tárepinen talap etiledi.

Eger sterjendi qozǵalıs baǵıtına perpendikulyar etip y' yaki z' kósherleri baǵıtında ornalastırsaq, onda (25)-formuladan sterjenniń uzınlıǵınıń ózgerissiz qalatuǵınlıǵın kóriwge boladı. Solay etip deneniń ólshemleri salıstırmalı tezliktiń baǵıtına perpendikulyar baǵıtlardı ózgerissiz qaladı.

Mısal retinde Jer sharınıń qozǵalıs baǵıtındaǵı diametrin alıp qaraymız. Onıń uzınlıǵı 12 mıń kilometrdey, orbita boyınsha tezligi 30 km/s. Bunday tezlikte Jer sharınıń diametri 6 sm ge qasqaradı.

Qozǵalıwshı deneniń ólshemleriniń qozǵalıs baǵıtında ózgeretuǵınlıǵı haqqındaǵı batıl usınıs birinshi ret bir birinen ǵárezsiz Fitjerald (Fitzgerald) hám Lorentc (Lorentz) tárepinen berildi. Olar qálegen deneniń qozǵalıs baǵıtındaǵı sızıqlı ólshemleri tek usı qozǵalısqa baylanıslı ózgeredi dep boljadı. Bul boljaw durıs bolıp shıqtı hám Maykelson tájiriybesiniń kútilgen nátiyjelerdi bermewiniń sebebin tolıq túsindirdi.

Qozǵalıstaǵı saatlardıń júriw tempi. Meyli qozǵalıwshı koordinatalar sistemasınıń x_0' noqatında t_1' hám t_2' waqıt momentlerinde eki waqıya júz bergen bolsın. Usı eki waqıyalar arasındaǵı waqıt intervalları qozǵalıwshı sistemada $\Delta t' = t_2' - t_1'$, al tınıshlıqta turǵan sistemada $\Delta t = t_2 - t_1$ bolsın. Lorenc túrlendiriwleri tiykarında

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{v}{c^2}x_0'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, t_2 = \frac{t_2' + \frac{v}{c^2}x_0'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{35}$$

teńliklerine iye bolamız. Bunnan mına formula kelip shıǵadı:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{36}$$

Solay etip qozǵalıwshı saatlar menen ólshengen waqıyalar arasındaǵı waqıt intervalı

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{37}$$

tınıshlıqta turǵan saatlar menen ólshengen waqıtqa qaraǵanda kem bolıp shıǵadı. Demek **tınıshlıqta turǵan saatlardıń júriwine qaraǵanda qozǵalıstaǵı saatlardıń júriwiniń tempi kem boladı**.

Menshikli waqıt. Qozǵalıwshı noqat penen baylanıslı saat penen (noqat penen birge qozǵalatuǵın) ólshengen waqıt bul noqattıń menshikli waqıtı dep ataladı. (37)-formulada sheksiz kishi waqıt intervalına ótiw hám onı bılayınsha jazıw múmkin:

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{38}$$

Bul ańlatpada $d\tau$ arqalı kozǵalıwshı noqattıń menshikli waqıtınıń differencialı, dt arqalı qarap atırılǵan noqat berilgen waqıt momentinde V tezligine iye bolatuǵın inerciallıq koordinatalar sistemasındaǵı waqıttıń differencialı belgilengen. $d\tau$ dıń qozǵalıwshı noqat penen baylanısqan hár qıylı saattlardıń kórsetiwleriniń ózgerisi, al dt bolsa qońısılas keńisliklik noqatta jaylasqan qozǵalmaytuǵın koordinatalar sistemasınıń hár qıylı saatlarınıń kórsetiwleri ekenligin sezemiz.

Biz joqarıda intervaldıń kvadratınıń, intervaldıń differencialınıń invariant ekenligin kórdik [(29)-formula]. Usıǵan baylanıslı $dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2$ shamasınıń da qońısılas eki noqat arasındaǵı keńisliklik qashıqlıqtıń differencialınıń da invariant ekenligin sezemiz. Sonlıqtan házir ǵana eske alınǵan invarianttıń differencialı ushın jazılǵan (29)-formulanıń

$$\frac{ds}{i} = c\,dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2} = c\,dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{39}$$

ańlatpasında keltirilgendey etip túrlendiriliwiniń múmkin ekenligin kóremiz. Bul formulada intervalı esaplanıp atırǵan waqıyalar sıpatında qozǵalıwshı noqattıń birinen soń biri izbe-iz keletuǵın eki awhalı alınǵan hám onıń tezliginiń kvadratınıń

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

ekenligi esapqa alınǵan. Eger

$$ds^2 = dr^2 - c^2t^2 = (-1)(c^2t^2 - dr^2)$$

ekenligin inabatqa alatuǵın bolsaq, onda jormal san $i=\sqrt{-1}$ dińqalay payda bolǵanlıǵın ańǵarıw múmkin.

(38)-hám (39)-ańlatpalardı salıstırıw menshikli waqıttıń differencialı $d\tau$ dıń intervaldıń differencialı arqalı bılayınsha ańlatılatuǵınlıǵın kórsetedi:

$$d\tau=\frac{ds}{ic}. \tag{40}$$

(29)-formuladan kórinip turǵanınday, intervaldıń differencialı invariant bolıp tabıladı. Jaqtılıqtıń tezligi turaqlı shama bolǵanlıqtan (16) dan **menshikli waqıt Lorenc túrlendiriwlerine qarata invariant** dep juwmaq shıǵarıwǵa boladı.

Bul pútkilley tábiyiy nárse. Sebebi menshikli waqıt qozǵalıwshı noqat penen baylanısqan koordinatalar sistemasında anıqlanadı hám qaysı koordinatalar sistemasında menshikli waqıttıń anıqlanǵanlıǵı áhmiyetke iye bolmaydı.

Tezliklerdi qosıw. Biz klassikalıq mexanikadaǵı tezliklerdi qosıwdı úyrendik. Endi retyativistlik mexanikada tezliklerdi qalay qosatuǵını menen tanısamız.

Meyli qozǵalıwshı koordinatalar sistemasında materiallıq noqattıń qozǵalısı

$$x'=x'(t'), y'=y'(t'), z'=z'(t'), \tag{41}$$

al tınıshlıqta turǵan sistemada bolsa

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t) \tag{42}$$

parametrlik funkciyalarınıń járdeminde berilgen bolsın. Qozǵalıwshı hám qozǵalmaytuǵın sistemalardaǵı materiallıq noqattıń tezliginiń tómende keltirilgen qurawshıları arasında baylanıstı tabıwımız kerek:

$$v'_x=\frac{dx'}{dt'}, v'_y=\frac{dy'}{dt'}, v'_z=\frac{dz'}{dt'}. \tag{43}$$

$$v_x=\frac{dx}{dt}, v_y=\frac{dy}{dt}, v_z=\frac{dz}{dt}. \tag{44}$$

Bizge belgili bolǵan formulalardan

$$dx=\frac{dx'+V\,dt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, dy=dy', dz=dz', \tag{45}$$
$$dt=\frac{dt'+\frac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\frac{dt'\left(1+\frac{V\,v'_x}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

formulalarına iye bolamız. Differenciallardıń bul mánislerin (45)-ańlatpadan (44)-qatnasqa qoysaq hám (43)-qatnastı esapqa alsaq, onda tómendegilerdi tabamız:

$$v_x=\frac{v'_x+V}{1+V\frac{v'_x}{c^2}},$$

$$v_y = \frac{v'_y\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+V\frac{v'_x}{c^2}}, \tag{46}$$

$$v_z = \frac{v'_z\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+V\frac{v'_x}{c^2}}.$$

Bul formulalar salıstırmalıq teoriyasınıń tezliklerdi qosıw formulaları bolıp tabıladı. SHtrixlanǵan sistema koordinatalarınan shtrixlanbaǵan sistema koordinatalarına da ótiw múmkin. Bunday jaǵdayda V tezligin $-V$ menen, shtrixlanǵan shamalar shtrixlanbaǵan shamalar, shtrixlanǵanları shtrixlanbaǵanları menen almastırıladı. Bul formulalardan, mısalı, jaqtılıq tezliginiń turaqlılıǵı kelip shıǵadı. Usı jaǵdaydı dálilleymiz. Meyli (46)-ańlatpalarda $v'_y = v'_z = 0,\ v'_x = c$ bolsın. Onda

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1+V\frac{v'_x}{c^2}} = \frac{c+V}{1+\frac{cV}{c^2}} = c, v_y = 0, v_z = 0 \tag{47}$$

ańlatpalarına iye bolamız. Demek jaqtılıqtıń tezliginen úlken tezlik alınbaydı eken.

Aberraciya. Meyli shtrixlanǵan koordinatalar sistemasında y' kósheri baǵıtında jaqtılıq nurı tarqalatuǵın bolsın. Bunday jaǵdayda

$$v'_x = 0, v'_y = c, v'_z = 0.$$

Qozǵalmaytuǵın esaplaw sisteması ushın tómendegini alamız:

$$v_x = V, v_y = c\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}, v_z = 0.$$

Demek qozǵalmaytuǵın koordinatalar sistemasında jaqtılıq nurınıń baǵıtı menen y kósheri baǵıtı óz-ara parallel bolmay, olar bir birine salıstırǵanda qanday da bir β múyeshine burılǵan bolıp shıǵadı. Bul múyeshtiń mánisi

$$tg\,\beta = \frac{v_x}{v_y} = V/c\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \tag{48}$$

shamasına teń boladı. Eger $\frac{V}{c} \ll 1$ teńsizligi orın alatuǵın bolsa, onda (48)-ańlatpa klassikalıq fizika beretuǵın $tg\beta = \frac{v_\perp}{c}$ formula menen birdey túrge enedi. Biraq (48)-ańlatpanıń mánisi pútkilley basqasha. Klassikalıq fizikada mınaday jaǵdaylardı bir birinen ayırıw kerek:

qozǵalıwshı derek – qozǵalmaytuǵın baqlawshı,

qozǵalmaytuǵın derek – qozǵalıwshı baqlawshı.

Al salıstırmalıq teoriyasında bolsa tek derek penen baqlawshınıń bir birine salıstırǵandaǵı qozǵalısı ǵana áhmiyetke iye boladı.

Tezleniwdi túrlendiriw. Meyli shtrixlanǵan sistemada materiallıq noqat, qurawshıları a'_x, a'_y, a'_z bolǵan tezleniw menen qozǵalısın. biraq materiallıq nokattıń tezligi usı waqıt momentinde nolge teń bolsın. Sonlıqtan shtrixlanǵan koordinatalar sistemasında noqattıń qozǵalısı tómendegidey formulalar járdeminde táriyiplenedi:

$$\frac{dv'_x}{dt'} = a'_x, \frac{dv'_y}{dt'} = a'_y, \frac{dv'_z}{dt'} = a'_z, v'_x = v'_y = v'_z = 0. \tag{49}$$

SHtrixlanbaǵan koordinitalar sistemasındaǵı noqattıń qozǵalısın izertleymiz. Tezlikti (46)-ańlatpadan tabamız:

$$v_x = V, v_y = 0, v_z = 0. \tag{50}$$

SHtrixlanbaǵan koordinatalar sistemasındaǵı tezleniwler:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{dv_y}{dt}, a_z = \frac{dv_z}{dt} \tag{51}$$

formulalarınıń járdeminde anıqlanadı.

dt, dv_x, dv_y, dv_z shamaları (45)-(46) formulalardıń járdeminde anıqlanadı. Differenciallardı esaplap bolǵannan keyin ǵana tezlikler $v'_x = v'_y = v'_z = 0$ dep esaplaw múmkin. Mısalı dv_x ushın

$$dv_x = \frac{dv'_x}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}} - \frac{(v'_x - V)\frac{V}{c^2}v'_x}{\left(1 + V\frac{v'_x}{c^2}\right)^2} = \tag{52}$$
$$= \frac{dv'_x}{\left(1 + V\frac{v'_x}{c^2}\right)^2}\left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2} - \frac{Vv'_x}{c^2} - \frac{V^2}{c^2}\right) = \frac{1 - V^2/c^2}{\left(1 + V\frac{v'_x}{c^2}\right)^2}dv'_x$$

ańlatpasına iye bolamız. Bunnan (45)-qatnastı esapqa alıw jolı menen

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{dv'_x}{dt'} = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} a'_x \tag{53}$$

túrlendiriw formulasına iye bolamız. Bul formulada (49)-ańlatpaǵa sáykes $v'_x = 0$ dep esaplanǵan.

Usınday jollar menen dv_y hám dv_z differencialları esaplanadı. Solay etip tezleniwdi túrlendiriwdiń tómendegidey formulaların alamız:

$$a_x = \sqrt[3]{1 - \frac{V^2}{c^2}}\, a'_x, \tag{54}$$
(30)
$$a_y = \sqrt[3]{1 - \frac{V^2}{c^2}}\, a'_y,$$
$$a_z = \sqrt[3]{1 - \frac{V^2}{c^2}}\, a'_z.$$

SHtrixlanbaǵan sistemada noqat V tezligi menen qozǵaladı. Sonlıqtan sońǵı formulalar tómendegi mánisti ańǵartadı:

Qozǵalıwshı materiallıq noqat penen usı noqat tınıshlıqta turatuǵın inercial koordinatalar sistemasın baylanıstırıw múmkin. Usınday koordinatalar sisteması alıp júriwshi koordinatalar sisteması dep ataladı. Eger usı koordinatalar sistemasında noqat tezleniw menen qozǵalsa, onda bul noqat basqa da qálegen koordinatalar sistemasında tezleniw menen qozǵaladı. Biraq tezleniwdiń mánisi basqa sistemada basqa mániske, biraq barlıq waqıtta da kishi mániske iye boladı. Qozǵalıs baǵıtında tezleniw qurawshısı $\sqrt[3]{1-\frac{V^2}{c^2}}$ kóbeytiwshisine proporcional kishireyedi (V arqalı tezleniw qarap atırılǵan sistemadaǵı tezlik belgilengen). Tezlikke perpendikulyar baǵıttaǵı tezleniwdiń kóldeneń qurawshısı $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$ kóbeytiwshisine proporcional bolǵan kemirek ózgeriske ushıraydı. Bul xaqqında basqa lekciyalarda da gáp etiledi.

Bir qatar juwmaqlar:

1. Keńisliktiń bir tekliligi menen izotroplıǵı onıń inercial koordinatalar sistemasındaǵı eń baslı qásiyeti bolıp tabıladı.

2. Waqıttıń bir tekliligi berilgen fizikalıq waqıyanıń waqıttıń qaysı momentinen baslanǵanınan ǵárezsiz birdey bolıp rawajlanıwı hám ózgerisi bolıp tabıladı. Mısalı qanday da bir biyiklikten tas waqıttıń kaysı momentinen taslanǵanlıǵınan ǵárezsiz Jerdiń betine birdey waqıt ishinde birdey tezlik penen qulap túsedi.

3. Salıstırmalıq teoriyası sebeplilik principin dálillemeydi. Bul teoriya sebeplilik principi barlıq koordinatalar sistemasında orın aladı dep esaplaydı. Usı jaǵday tiykarında fizikalıq tásirlerdiń tarqalıw tezligine shek qoyıladı.

4. Lorenc túrlendiriwleri tek inercial esaplaw sistemalarında durıs nátiyje beredi. Sonlıqtan Jer sharın batıstan shıǵısqa hám shıǵıstan batısqa qarap qozǵalǵan jaǵdaylardaǵı saatlardıń júriw tempin salıstırǵanda Jerdiń beti menen baylanısqan qoordinatalar sistemasın paydalanıwǵa bolmaydı.

5. Qozǵalıwshı sistemalarda waqıt qozǵalmaytuǵın sistemalarǵa salıstırǵanda ástelik penen ótedi.

6. Menshikli waqıt Lorenc túrlendiriwlerine qarata invariant shama bolıp tabıladı.

7. Absolyut qattı denelerdiń bolıwı múmkin emes.

Sorawlar:

1. Qozǵalıwshı denelerdiń uzınlıǵın anıqlaw klassikalıq mexanikada hám salıstırmalıq teoriyasında ayırmaǵa iye me?

2. Qozǵalıwshı denelerdiń uzınlıǵınıń qısqaratuǵınlıǵın tastıyıqlawdıń fizikalıq mánisi nelerden ibarat?

3. Jer sharın batıstan shıǵısqa hám shıǵıstan batısqa qarap qozǵalǵan jaǵdaylardaǵı saatlardıń júriw tempin salıstırǵanda Jerdiń beti menen baylanısqan qoordinatalar sistemasın paydalanıwǵa bolmaytuǵınlıǵın qalay dálillewge boladı?

4. Egizekler paradoksınıń mánisi neden ibarat hám bul paradoks qalay sheshiledi?

Paydalanılǵan ádebiyatlar dizimi

1. Hugh D. Young, Roger A. Freedman,cjntributing autor A.Lewis Ford. University Physics with modern Physics. 13th Edition. Addison-Wesley. 1598 p.
(p. 1223-1260).

2. L.D.Landau, E.M.Lifshic. Teoretiчeskaya fizika. Uчebnoe posobie dlya vuzov. V. 10 t. Tom II. Teoriya polya. 8-e izdanie. Izdatelstvo "FIZMATLIT". Moskva. 2003. 536 s.
Glava 1. §§ 4-7.

3. A.N.Matveev. Mexanika i teoriya otnositelnosti. Uчebnik dlya studentov vısshix uчebnıx zavedeniy. 3-e izdanie. Izdatelstva "ONIKS 21 vek", "Mir i obrazovanie". Moskva. 2003. 432 s.
Glava 2.

3-lekciya. Interval. Waqıtqa, keńislikke hám jaqtılıqqa megzes intervallar. Menshikli waqıt. Minkovskiy keńisligi (Minkovskiydiń keńislik-waqıtı). Lorenc túrlendiriwlerin hám tezliklerdi qosıw nızamın geometriyalıq kóz-qarastan interpretaciyalaw

Interval hám onıń invariantlılıǵı. Meyli waqıyalar t_1 waqıt momentinde x_1, y_1, z_1 noqatında, al t_2 waqıt momentinde x_2, y_2, z_2 noqatında júz bergen bolsın. Usı **waqıyalar arasındaǵı interval** dep

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 \tag{1}$$

shamasına aytamız (bul shamanı x_1, y_1, z_1, t_1 hám x_2, y_2, z_2, t_2 noqatları arasındaǵı interval dep te ataladı). Barlıq koordinatalar sistemasında bul shama birdey mániske iye boladı hám sonlıqtan onı Lorenc túrlendiriwiniń invariantı dep ataymız. Usı jaǵdaydı dálilleymiz hám formulanı shtrixlanǵan sistema ushın jazamız.

$$x_2 - x_1 = \frac{(x_2' - x_1') + v(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$
$$y_2 - y_1 = y_2' - y_1',$$
$$z_2 - z_1 = z_2' - z_1',$$
$$t_2 - t_1 = \frac{(t_2' - t_1') + \frac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Bul ańlatpalardan intervaldıń

$$\begin{aligned} s^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = \\ &= (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 - c^2(t_2' - t_1')^2 = s'^2 \end{aligned} \tag{2}$$

invariant ekenligi, yaǵnıy $s^2 = s'^2$ teńliginiń orın alatuǵınlıǵı dálillenedi. Bunday jazıwdı ádette $s^2 = s'^2 = inv$ dep jazadı.

(2)-ańlatpadan qızıqlı nátiyje shıǵaramız. Sırttan qaraǵanda bul formula tórt ólshemli keńisliktegi koordinataları x_1, y_1, z_1, t_1 hám x_2, y_2, z_2, t_2 bolǵan eki waqıya (eki noqat) arasındaǵı qashıqlıqqa usaydı. Eger $c^2(t_2 - t_1)^2$ yamasa $c^2(t_2' - t_1')^2$ shamaları aldındaǵı belgi "+" belgisi bolǵanda (2)-ańlatpa haqıyqatında da tórt ólshemli Evklid geometriyasındaǵı waqıya (eki noqat) arasındaǵı qashıqlıq bolǵan bolar edi. Usı jaǵdayǵa baylanıslı tórtinshi koordinata aldındaǵı belgi minus bolǵan tórt ólshemli keńislik bar dep esaplaymız hám bul keńislikti kópshilik fizikler **psevdoevklid keńisligi** dep ataytuǵınlıǵın atap ótemiz.

Eger qarap atırılǵan waqıyalar bir birine sheksiz jaqın jaylassa, onda (2)- teńlik intervaldıń differencialınıń kvadratınıń invariantlılıǵın dálilleydi:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 = inv. \tag{3}$$

Keńislikke megzes hám waqıtqa megzes intervallar. Waqıyalar arasındaǵı keńisliklik qashıqlıqtı l arqalı, al olar arasındaǵı waqıt aralıǵın t arqalı belgileymiz. Usı eki waqıya arasındaǵı intervaldıń kvadratı $s^2 = l^2 - c^2t^2$ invariant bolıp tabıladı.

Meyli bazı bir koordinatalar sistemasında waqıyalar sebep penen baylanıspaǵan bolsın. Bunday jaǵdayda sol waqıyalar ushın $l > ct$ hám sáykes $s^2 > 0$ teńsizlikleri orın aladı. Intervaldıń invariantlılıǵınan basqa barlıq koordinatalar sistemalarında da bul waqıyalardıń sebeplilik baylanısı menen baylanıspaǵanlıǵı kelip shıǵadı. Álbette qarama-qarsı mániske iye tastıyıqlaw da haqıyqatlıqqa sáykes keledi: eger bazı bir koordinatalar sistemasında waqıyalar bir biri menen sebeplilik penen baylanısqan bolsa ($l < ct, s^2 < 0$), onda ol waqıyalar principinde basqa barlıq koordinatalar sistemalarında da belgili bir sebepler menen baylanısqan boladı.

Kvadratı nolden úlken, yaǵnıy

$$s^2 > 0 \tag{4}$$

bolǵan interval **keńislikke megzes interval** dep ataladı.

Kvadratı nolden kishi, yaǵnıy

$$s^2 < 0 \tag{5}$$

bolǵan interval **waqıtqa megzes interval** dep ataladı.

Eger interval keńislikke megzes bolsa, onda eki waqıya bir waqıt momentinde keńesliktiń eki noqatında júz beretuǵın koordinatalar sistemasın saylap alıwǵa boladı ($s^2 = l^2 > 0, t = 0$). Sonıń menen birge usı shárt orınlanǵanda eki waqıya bir noqatta júz beretuǵın koordinatalar sistemasın saylap alıw múmkin emes (Bunday jaǵdayda $l = 0$, yaǵnıy $s^2 = -c^2t^2$ teńligi orın alǵan bolar edi, bul $s^2 > 0$ shártine qayshı keledi).

Eger interval waqıtqa megzes bolsa, onda eki waqıya keńisliktiń bir noqatında, biraq hár qıylı waqıt momentlerinde júz beretuǵın koordinatalar sistemasın saylap alıw múmkin ($l = 0, s^2 = -c^2t^2 < 0$). Biraq bul jaǵdayda usı eki waqıya bir waqıtta júzege keletuǵın koordinatalar sistemasın saylap alıw múmkin emes (bunday jaǵdayda $t = 0$, yaǵnıy $s^2 = l^2 > 0$ shárti orınlanıp, ol $s^2 < 0$ shártine qayshı kelgen bolar edi. Solay etip principinde sebeplilik baylanısta tura alatuǵın eki waqıya ushın usı eki waqıya keńisliktiń bir noqatında waqıt boyınsha birinen soń biri júzege keletuǵın koordinatalar sistemasın saylap alıw múmkin.

Eki waqıya jaqtılıq signalı menen baylanısatuǵın dara jaǵdaydıń da orın alıwı múmkin. Bunday jaǵdayda mınanı alamız:

$$s^2 = 0.$$

Bunday interval jaqtılıqqa megzes interval dep ataladı.

Waqıyalar arasındaǵı intervaldıń waqıtqa megzesligi yamasa keńislikke megzesligi saylap alınǵan koordinatalar sistemasına baylanıslı emes. Bul waqıyalardıń ózleriniń invariantlıq qásiyeti bolıp tabıladı.

Intervallar boyınsha endi tómendegidey keste keltiremiz:

Eki waqıya ushın koordinatalar hám waqıt arasındaǵı baylanıs	Intervaldıń tipi	Waqıyalar arasındaǵı baylanıstıń xarakteri
$c\|\Delta t\| < \|\Delta x\|$; $\Delta s^2 < 0$	Keńislikke megzes.	Sebep penen baylanıs joq (sebeplilik joq).

$c\|\Delta t\| > \|\Delta x\|;\ \Delta s^2 > 0$	Waqıtqa megzes.	Sebep penen baylanıstıń orın alıwı múmkin.
$c\|\Delta t\| = \|\Delta x\|;\ \Delta s^2 = 0$	Jaqtılıqqa megzes.	Waqıyalardıń jaqtılıq signalı menen baylanısqan bolıwı múmkin.

1908-jılı nemec matematigi hám fizigi German Minkovskiy (1864-1909) fizika hám matematika ilimlerine **tórt ólshemli dúnya** (*shetırexmernıy mir*) túsinigin kirgizdi. Minkovskiydiń tórt ólshemli dúnyasında úsh ólshem keńislik, al tórtinshi ólshem waqıt bolıp tabıladı. Bul jaǵdayda hár bir bir zamatlıq waqıya x, y, z, t tórt sanı menen táriyiplenedi.

Interval

$$s_{21}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - c^2(t_1 - t_2)^2$$

dı jazǵanda tolıq simmetriyalıqtı saqlaw ushın Minkovskiy tómendegidey belgilewlerdi usındı:

$$x_1 = x,\quad x_2 = y,\quad x_3 = z,\quad x_4 = ict.$$

Bul ańlatpada $i = \sqrt{-1}$. Sonıń menen birge bir birine jaqın eki waqıyanı qaraǵanda koordinatalardıń ayırmasın differencialdıń belgisi menen belgilew usınıldı. Mısalı x_2-x_1=dx, is(t_2-t_1)= isdt. Waqıyalar arasındaǵı interval ds penen belgilenedi. Olay bolsa

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = \sum_{i=1}^{4} dx_i^2.$$

Solay etip ds shamasın (yamasa s_{21} di) tórt ólshemli dúnyadaǵı *qashıqlıq* sıpatında, al bir koordinatalar sistemasınan ekinshi koordinatalar sistemasına ótiwdi tórt ólshemli dúnyadaǵı koordinatalar kósherlerin «burıw» sıpatında qarawǵa boladı.

Tórt koordinata x_1, x_2, x_3, x_4 lerdiń jıynaǵın Minkovskiy **dúnyalıq noqat** dep atadı. Berilgen esaplaw sistemasındaǵı belgili bir deneniń turǵan ornın táriyipleytuǵın usınday koordinatalardıń úzliksiz katarın **dúnyalıq sızıq** dep ataymız (qanday da bir dene menen baylanıskan waqıyalardıń izbe-izligi).

Mısal retinde Jerdiń dúnyalıq sızıǵın sızamız. Jer orbitası tegis bolǵanlıqtan onıń dúnyalıq sızıǵı vintlik sızıq, al usı vintlik sızıqtıń orbita tegisligine túsirilgen proekciyası ellips boladı.

Eger

$$l^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

hám

$$\tau^2 = (t_1 - t_2)^2$$

belgilewlerin paydalansaq mına jaǵdaylardıń orın alatuǵınlıǵın kóremiz:

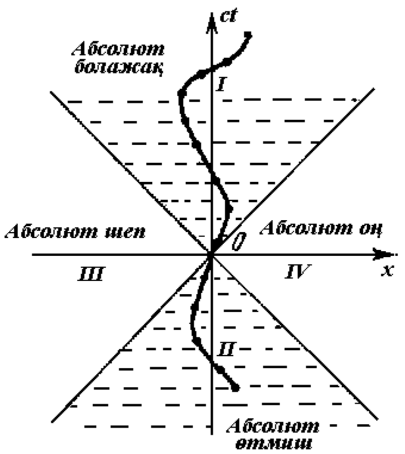
1) $l < s\tau$,
2) $l > s\tau$ hám
3) $l = s\tau$.

$l < s\tau$ jaǵdayındaǵı interval waqıtqa megzes intervalǵa sáykes keledi: bul jaǵdayda t_1 hám t_2 waqıt momentlerinde x_1 hám x_2 noqatlarında bolǵan waqıyalar arasındaǵı kashıqlıq τ = t_2 - t_1 waqıtı aralıǵında jaqtılıq signalı basıp ótetuǵın joldan kishi. Eki waqıya arasındaǵı qashıqlıq nolge aylanatuǵın esaplaw sisteması da boladı. Biraq koordinatalar sistemaların saylap alıw jolı menen bul waqıyalardı bir waqıtta júz beretuǵın wakıyalarǵa aylandırıw múmkin emes. 1-waqıya 2-waqıyanıń sebebi bolıwı múmkin. Sonıń menen birge wakıyalardıń bunday izbe-izligi barlıq inerciallıq sistemalarda birdey boladı.

Eger $l > s\tau$ bolsa eki wakıya arasındaǵı qashıqlıq jaqtılıq nurı τ waqıtı ishinde ótetuǵın joldan úlken. Sonlıqtan 1-waqıya 2-waqıyanıń sebebi bola almaydı. Bunday intervaldı *keńislikke megzes interval* dep ataw kabıl etilgen. Bunday jaǵdayda eki wakıya da bir waqıtta júzege keletuǵın esaplaw sistmasın saylap alıwga boladı. Biraq eki waqıya bir noqatta júzege keletuǵın esaplaw sistemaların saylap alıw múmkin emes. Bul jerde waqıyanıń ornın da ózgertiw múmkin emes: bir sistemdaǵı «***shep tárep***» basqa sistemalarda da «***shep tárepte***» jaylasadı. Solay etip «**absolyut shep**» penen «***absolyut oń***» dı bir birinen ajıratıw múmkin.

Eger $l = s\tau$ bolsa eki waqıya arasındaǵı qashıqlıq τ wakıtı ishinde jaqlılıq júrip ótetuǵın jolǵa teń. Bul *jaqtılıqqa megzes interval* bolıp tabıladı.

Súwrette x kósheri baǵıtında shaması boyınsha da, baǵıtı boyınsha da ózgermeli tezlik penen qozǵalıwshı bazı bir deneniń dúnyalıq sızıǵı keltirilgen. x=0 hám t=0 noqatında júzege kelgen O wakıyasına itibar beremiz. Usı noqatqa salıstırǵanda I ushastkanı payda etiyashi O wakıyasınan waqıtqa megzes intervallar menen kashıqlaǵan waqıyalar bolıp tabıladı. Bul waqıyalar O waqıyasınan keyin júzege keledi (bul juwmak koordinata sistemasın saylap alıwdan ǵárezli emes). Al II ushastkasında bolsa O waqıyasına salıstırǵanda «***absolyut ótken***» waqıyalar jaylasadı.



Deneniń dúnyalıq sızıǵınıń Minkovskiy tegisligindegi súwreti. Dene x kósheri baǵıtında shaması boyınsha da, baǵıtı boyınsha da ózgermeli tezlik penen qozǵaladı.

x kósheriniń ústinde jaylasqan $x = \pm st$ tuwrıları jaqtılıqqa megzes intervallarǵa – x kósheri baǵıtındaǵı jaqtılıq signallarınıń tarqalıwına sáykes keledi. Bul signallar $t = 0$ waqıt momentinde $x = 0$ noqatınan múmkin bolǵan eki baǵıtta jiberilgen.

III hám IV ushastkalardaǵı qálegen noqat O waqıyasınan keńislikke megzes interval menen qashıqlasqan (yaǵnıy bul noqat O waqıyasınan absolyut qashıqlasqan).

Paydalanılǵan ádebiyatlar dizimi

1. L.D.Landau, E.M.Lifshic. Teoretiчeskaya fizika. Uчebnoe posobie dlya vuzov. V. 10 t. Tom II. Teoriya polya. 8-e izdanie. Izdatelstvo "FIZMATLIT". Moskva. 2003. 536 s.

Glava 1. §§ 1-3.

2. A.N.Matveev. Mexanika i teoriya otnositelnosti. Uчebnik dlya studentov vısshix uчebnıx zavedeniy. 3-e izdanie. Izdatelstva "ONIKS 21 vek", "Mir i obrazovanie". Moskva. 2003. 432 s.

Glava 3.

3. Benjamin Crowell. Spesial Relativity. www.lightandmatter.com, rev. February 11, 2016.

4-lekciya. Tórt ólshemli vektorlar, tezlik hám tezleniw.

Erkin bólekshenińenergiyası. Kinetikalıq energiya. Denenińtınıshlıqtağı energiyası. Denenińimpulsi hám energiyası

Tórt ólshemli vektorlar. Tórt ólshemli keńisliktegi waqıyanıń koordinatalarınıń (ct, x, y, z) jıynağın tórt ólshemli radius-vektordıń (bunnan bılay qısqalıq ushın 4 radius-vektor dep aytamız) qurawshıları sıpatında qarawğa boladı. Onıń kurawshıların x^i arqalı ańlatamız. Bul jerde I indeksi 0, 1, 2, 3 mánislerine iye boladı, qala berse

$$x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z.$$

4 radius vektordıń «uzınlığı» nıń kvadratı

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

ańlatpası járdeminde beriledi. Onıń mánisi tórt ólshemli koordinatalar sistemasın qanshama burğanda da ózgermeydi. Dara jağdayda Lorenc túrlendiriwleri de usınday burıwlardıń biri bolıp tabıladı.

Ulıma alğanda A^i **tórt ólshemli vektor** dep (**4 vektor dep**) A^0, A^1, A^2, A^3 tórt shamasınıń jıynağına aytılıp, olar tórt ólshemli koordinatalar sistemasın túrlendirgende 4 radius-vektordıń qurawshıları x^i day bolıp túrlenedi. Lorenc túrlendiriwlerinde

$$A^0 = \frac{A'^0 + (V/c)A'^1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad A^1 = \frac{A'^1 + (V/c)A'^0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad A^2 = A'^2, A^3 = A'^3. \qquad (1)$$

Qálegen 4 vektordıń kvadratınıń shaması 4 radius-vektordıń kvadratı sıyaqlı anıqlanadı:

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2.$$

Usınday ańlatpalardı jazıwdı qolaylı etiw ushın 4 vektorlardıń qurawshılarınıń eki «sort» ın kirgizedi hám olarğa joqarıdağı hám tómengi indeksler jazadı. Usınıń menen birge

$$A_0 = A^0, A_1 = A^1, A_2 = A^2, A_3 = A^3. \qquad (2)$$

A^i shamaların 4 vektordıń ***kontravariant***, al A_i shamaların 4 vektordıń ***kovariant*** qurawshıları dep ataladı. Bunday jağdayda 4 vektordıń kvadratı mına túrde jazıladı

$$\sum_{i=1}^{3} A^i A_i = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3.$$

Ádette summalarda ∑ summalaw belgisin taslap ketip $A^i A_i$ túrinde jazıw qabıl etilgen[1]. Bunday jağdayda ańlapadağı eki ret qaytalanatuğın indeks boyınsha summalaw názerde tutılıp, summa belgisi jazılmaydı. Al birdey indekstegi hár bir juptıń birewi joqarıda, al ekinshisi tomende turıwı kerek. Usınday gúń dep atalıwshı indeksler boyınsha summalaw júdá qolaylı hám formulalardı jazıwdı ádewir ápiwayılastıradı.

Bul jumısta biz 0, 1, 2, 3 mánislerine iye tórt ólshemli indekslerdi i, k, l, ... latın háripleri menen belgileymiz.

4 vektordıń kvadratı sayaqlı eki hár túrli 4 vektorlardıń skalyar kóbeymesi dúziledi:

---

[1] Summalaw belgisi ∑ ni taslap ketip jazıw birinshi ret A.Eynshteyn tárepinen usınılğan hám 1916-jılı jarıq kórgen «Ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyasınıń tiykarları» atlı miynette paydalanıladı.

$$A^iB_i = A^0B_0 + A^1B_1 + A^2B_2 + A^3B_3.$$

Usınıń menen birge bul ańlatpanı A^iB_i dep te, A_iB^i dep te jazıwǵa boladı hám bunday ózgerislerde nátiyje ózgermeydi. Ulıwma alǵanda gúń indekslerde barlıq waqıtta da joqarǵı indeks penen tómengi indekslerdiń orınların ózgertip qoyıwǵa boladı[2].

A^iB_i kóbeymesi 4 skalyar bolıp tabıladı. Bul kóbeyme tórt ólshemli koordinatalar sistemaların burıwlarǵa qarata invariant. Bul jaǵdaydı tikkeley tekserip kóriw ańsat[3], biraq onıń orın alatuǵınlıǵı barlıq 4 vektorlardıń birdey nızam boyınsha túrlendiriletuǵınlıǵına baylanıslı anıq túsinikli (A^iA_i kvadratı sıyaqlı).

4 vektordıń A^0 qurawshısın waqıtlıq, al A^1, A^2, A^3 qurawshıların keńisliklik dep ataydı (4 radius-vektorǵa sáykes). 4 vektordıń kvadratı oń mániske, teris mániske, sonıń menen birge nolge de teń bolıwı múmkin. Bunday jaǵdaylarda olardı sáykes ***waqıtqa megzes, keńislikke megzes*** **hám** ***nollik*** 4 vektorlar dep ataydı (intervallar ushın arnalǵan terminologiyaǵa sáykes)[4].

Keńisliklik burıwlarǵa (yaǵnıy waqıt kósherine tiymeytuǵın) qatnası boyınsha 4 vektordıń úsh keńisliklik koordinataları úsh ólshemli $\mathbf{A}$ vektorın payda etedi. Al 4 vektordıń waqıtlıq qurawshısı (sol túrlendiriwlerge qatnası boyınsha) úsh ólshemli skalyar bolıp tabıladı. 4 vektordıń qurawshıların atap ótip biz olardı jiyi bılayınsha jazamız

$$A^i = (A^0, \mathbf{A}).$$

Usınıń menen birge sol 4 vektordıń kovariant qurawshıları $A_i = (A_0, -\mathbf{A})$, al 4 vektordıń kvadratı: $A^iA_i = (A^0)^2 - \mathbf{A}^2$. Solay etip 4 radius-vektor ushın:

$$r_i = (ct, r), x_i = (ct, r), x^ix_i = c^2t^2 - r^2.$$

Álbette, úsh ólshemli vektorlardı (qurawshıları x, y, z bolǵan) kontra- hám kovariant qurawshılarǵa ajıratıp otırıwdıń zárúrligi joq. Sonlıqtan barlıq jaǵdaylarda (gúman payda etpeytuǵın orınlarda) biz olardıń kurawshıların A_α (α = x, y, z) túrinde indekslerin tómenge hám grek háripleri menen jazamız. Sonıń menen birge eki ret qaytalanatuǵın grek indeksleri boyınsha x, y, z tiń úsh mánisi boyınsha summalaw názerde tutıladı (mısalı $\mathbf{AB} = A_\alpha B_\alpha$).

2-rangalı tórt ólshemli tenzor (4 tenzor) dep eki 4 vektordıń qurawshılarınıń kóbeymesi túrinde túrlenetuǵın 16 dana A^{ik} shamalarınıń jıynaǵına aytamız. Tap usınday jollar menen joqarı rangalı 4 tenzorlar anıqlanadı.

2-rangalı 4 tenzordıń qurawshıları úsh túrde jazılıwı múmkin: kontrvariant A^{ik} túrinde, kovariant A_{ik} túrinde hám aralas $A^i{}_k$ túrinde (sońǵı jaǵdayda $A^i{}_k$ menen $A_k{}^i$ nı ajıratıw kerek, yaǵnıy joqarıda yamasa tómende birinshi indeks tur ma yamasa ekinshisi me). Qurawshılardıń hár kıylı túrleri arasındaǵı baylanıslar ulıwmalıq qaǵıyda boyınsha anıqlanadı: waqıtlıq indeksti (0) kóteriw yamasa túsiriw hesh nárseni ózgertpeydi, al keńisliklik indekslerdi (x, y, z) kóteriw yamasa tómenge túsiriw qurawshınıń belgisin ózgertedi. Solay etip:

---

[2] Házirgi waqıtlardaǵı ádebiyatlardı tórt ólshemli vektorlardıń indekslerin pútkilley jazbaydı, al olardıń kvadratları menen skalyar kóbeymeleri A^2, AB túrinde jazadı. Bul jumısta biz bunday belgilewlerdi paydalanbaymız.

[3] Usınıń menen birge kovariant qurawshılar menen ańlatılǵan 4 vektordıń túrlendiriliw nızamınıń kontravariant qurawshılarda ańlatılǵan tap sol nızamnıń ayrılatuǵınlıǵın (belgilerinde) barlıq waqıtta da este saqlaw kerek. Usıgan baylanıslı (1) diń ornına iye bolamız:

$$A_0 = \frac{A_0' - (V/c)A_1'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad A_1 = \frac{A_1' - (V/c)A_1'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad A^2 = A'^2, A^3 = A'^3.$$

[4] Nollik 4 vektorlardı *izotrop vektorlar* dep te ataydı.

$$A_{00} = A^{00}, A_{01} = -A^{01}, A_{11} = A^{11}, \ldots,$$

$$A^0{}_0 = A^{00}, A_0{}^1 = A^{01}, A^0{}_1 = -A^{01}, A^1{}_1 = -A^{11}, \ldots$$

Tek keńisliklik túrlendiriwlerge qatnası boyınsha A^{11}, A^{12}, ... toǵız qurawshısı úsh ólshemli tenzordı quraydı. A^{01}, A^{02}, A^{03} úsh qurawshısı hám A^{10}, A^{20}, A^{30} úsh qurawshısı úsh ólshemli vektorlardı payda etedi, al A^{00} qurawshısı úsh ólshemli skalyar bolıp tabıladı.

Eger $A^{ik} = A^{ki}$ bolsa tenzor simmetriyalı hám $A^{ik} = -A^{ki}$ bolsa tenzor antisimmetriyalı dep ataladı. Antisimmetriyalıq tenzorda barlıq diagonallıq qurawshılar (yaǵnıy A^{00}, A^{11}, ... qurawshıları) nolge teń. Sonlıqtan, mısalı $A^{00} = -A^{00}$. A^{ik} simmetriyalıq tenzorında aralas qurawshılar $A^i{}_k$ hám $A_k{}^i$ lerdıń bir birine sáykes keletuǵınlıǵı anıq. Usıǵnday jaǵdaylarda bizler indekslerdi biriniń ústine ekinshisin jazamız (yaǵnıy A^i_k túrinde).

Barlıq tenzorlıq teńlikte ańlatpalar eki tárepten de birdey hám birdey bolıp jaylasqan (joqarıda hám tómende) erkin, yaǵnıy gúń emes inlekslerge iye bolıwı kerek. Tenzorlıq teńliklerdegi erkin indekslerdiń orınların ózgertiw múmkin (joqarıǵa yamasa tómenge), biraq bunday ózgertiwler teńlemeniń barlıq aǵzaları ushın bir waqıtta júrgiziledi. Hár qıylı tenzorlardıń kontra- hám kovariant qurawshıların teńlestiriw «nızamlı emes», bunday teńlik qanday da bir esaplaw sistemasında orınlanatuǵın bolsa da, basqa esaplaw sistemalarında orınlanbaydı.

A^{ik} tenzorınıń qurawshılarınan

$$A^i{}_i = A^0{}_0 + A^1{}_1 + A^2{}_2 + A^3{}_3$$

Summasın dúziw arqalı skalyar payda etiwge boladı (bunday jaǵdayda, álbette $A^i{}_i = A_i{}^i$). Bunday qosındını ***tenzordıń izi*** dep ataydı. Al onı payda etiwshi operaciya haqqında aytqanda tenzordı *qısıw* (*svertıvanie*) yamasa *ápiwayılastırıw* haqqında aytıladı.

Joqarıda karap ótilgen eki 4 vektordıń skalyar kóbeymesin dúziw de qısıw operaciyası bolıp tabıladı: bul A^iB_k tenzorınan A^iB_i skalyarınıń dórewi bolıwı bolıp tabıladı. Ulıwma alǵanda jup indeks boyınsha qálegen qısıw tenzordıń rangasın 2 ge túsiredi. Mısalı $A^i{}_{kli}$ 2-rangalı tenzor, A^iB_k bolsa 4 vektor, $A^{ik}{}_{ik}$ skalyar bolıp tabıladı h.t.b.

Birlik 4 tenzor dep δ^i_k tenzorı aytılıp, ol ushın qálegen A^i 4 vektorı ushın mına teńlik orınlanadı:

$$\delta^i_k A^i = A^k. \tag{3}$$

Bul tenzordıń qurawshılarınıń

$$\delta^i_k A^i = \begin{cases} 1, \text{eger i } = \text{ k bolsa,} \\ 0, \text{eger i } \neq \text{ k bolsa.} \end{cases} \tag{4}$$

shamalarına teń bolatuǵınlıǵı ayqın. Onıń izi $\delta^i_i = 4$.

δ^i_i tenzorındaǵı bir indeksti kótersek, yamasa ekinshisin tómenge túsirsek, biz kontra- yamasa kovariant tenzor alamız hám bul tenzordı g^{ik} yamasa g_{ik} dep belgileymiz hám onı ***metrlik tenzor*** dep ataymız. Bul g^{ik} hám g_{ik} tenzorları birdey qurawshılarǵa iye boladı, olardı mına keste túrinde kórsetiw múmkin:

$$(g^{ik}) = (g_{ik}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

(0, 1, 2¸3 mánisleriniń tártibinde i indeksi qatardı, al k indeksi bağananı nomerleydi).

$$g_{ik}A^k = A_i,\ g^{ik}A_k = A^i \qquad (6)$$

ekenligi ayqın. Usıǵan baylanıslı eki 4 vektordıń skalyar kóbeymesin

$$A^iA_i = g_{ik}A^iA^k = g^{ik}A_iA_k \qquad (7)$$

túrinde jazıw múmkin. δ_i^i, g_{ik}, g^{ik} tenzorlarınıń oǵada áhmiyetli ekenligi sonnan ibarat, olardıń kurawshıları barlıq koordinatalar sistemasında birdey mániske iye. Tap usınday qásiyetlerge tórtinshi rangalı antisimmetriyalı birlik 4 tenzor e^{iklm} de iye. Antisimmetriyalı birlik 4 tenzor dep qurawshıları qálegen eki indeskiniń orınların almastırıp qoyǵanda belgisin ózgertetuǵın, nolden ózgeshe qurawshıları ±1 ge teń tenzorǵa aytamız. Antisimmetriyalıqtan bul tenzordıń eń keminde eki indeksi bir birine teń bolsa nolge teń bolatuǵınlıǵı kelip shıǵadı. Tek tórt indeksi de bir birine teń emes qurawshıları nolge teń emes. Aytayıq

$$e^{0123} = +1 \qquad (8)$$

bolsın (usınıń menen birge $e_{0123} = -1$). Demek e^{iklm} niń nolge teń emes kurawshılarınıń barlıǵı da +1 ge yamasa -1 ge teń. Tenzordıń +1 yamasa -1 ge teń bolıwı i, k, l, m sanların 0, 1, 2, 3 izbe-izligine keltiriw múmkin bolǵan qayta qoyıwlardıń (perestanovkalar yamasa transpoziciyalardıń) jup yamasa taqlıǵına baylanıslı. Usınday qurawshılardıń sanı 4! = 24. Sonlıqtan

$$e^{iklm}e_{iklm} = -24. \qquad (9)$$

Koordinata sistemasınıń burılıwlarına qatnası boyınsha e^{iklm} shamaları tenzordıń qurawshılarınday qásiyetlerge iye boladı. Biraq bir yamasa úsh koordinatanıń belgileri ózgergende barlıq koordinatalar sistemasın ushın birdey bolıp anıqlanǵan e^{iklm} qurawshıları ózgermeydi, al tenzordıń qurawshıları bolsa belgisin ózgertken bolar edi. Sonlıqtan e^{iklm} di haqıyqatında tenzor emes, al *psevdotenzor* dep aytadı. Qálegen rangadaǵı *psevdotenzorlar*, dara jaǵdaylarda psevdoskalyarlar burıwlarǵa alıp keliniwi múmkin emes bolǵan koordinatalardıń barlıq túrlendiriwlerinde tenzorlardıń qásiyetindey qásiyet kórsetedi (yaǵnıy burıwlarǵa alıp kelmeytuǵın koordinatalardıń belgileriniń ózgeriwi bolǵan shashırawlardan basqalarında).

$e^{iklm}e^{prst}$ kóbeymeleri 8-rangalı 4 tenzordı payda etedi. Qala berse bul tenzor haqıykıy tenzor bolıp tabıladı. Bir yamasa bir neshe indeksler jupları boyınsha ápiwayılastırıw arqalı 6-, 4- hám 2-rangalı tenzorlardı alıw múmkin. Bul tenzorlardıń barlıǵı da barlıq koordinatalar sistemasında birdey túrge iye boladı. Sonlıqtan olardıń qurawshıları birlik tenzor δ_i^i (qurawshıları barlıq sistemalarda birdey bolǵan birden bir haqıyqıy tenzor) dıń qurawshılarınıń kóbeymesiniń kombinaciyası túrinde ańlatılıwı kerek. Bunday kombinaciyalardı dúziw ańsat hám olar indekslerdi qaytadan qoyıp shıǵıwǵa baylanıslı bolǵan simmetriya qásiyetinen kelip shıǵadı[5].

Eger A^{ik} antisimmetriyalı tenzor bolsa, onda A^{ik} tenzorı hám psevdotenzor $A^{*ik} = 1/2e^{iklm}$ bir birine duallıq tenzorlar dep ataladı. Tap usıǵan sáykes $e^{iklm}A_m$ tenzorı A^i tenzorına duallıq bolǵan 3-rangalı antisimmetriyalıq psevdotenzor bolıp tabıladı. Álbette duallıq tenzorlardıń $A^{ik}A^*_{ik}$ kóbeymesi psevdoskalyar bolıp tabıladı.

Joqarıda aytılǵanlarǵa baylanıslı úsh ólshemli vektorlar menen tenzorlardıń sáykes qásiyetlerin eske salıp ketemiz. 3-rangalı antisimmetriyalı birlik psevdotenzor dep qálegen eki indeksiniń orınların almastırıp qoyǵanda belgisin ózgertetuǵın $e_{\alpha\beta\gamma}$ shamalarınıń jıynaǵına aytamız. Indekseleriniń úshewi úsh túrli bolǵanda $e_{\alpha\beta\gamma}$ nıń qurawshıları nolge teń bolmaydı. Usınıń menen birge $e_{xyz} = 1$ dep qabıl etemiz, al α, β, γ izbe-izligin jup yamasa taq qayta qoyıp shıǵıwlardıń nátiyjesinde x, y, z izbe-izligine keliwdiń múmkinshiligne baylanıslı 1 ge yamasa -1 ge teń boladı[6].

$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\mu\nu}$ kóbeymeleri 6-rangalı úsh ólshemli tenzordı beredi hám sonlıqtan birlik úsh ólshemli $\delta_{\alpha\beta}$ tenzorınıń qurawshılarınıń kombinaciyası túrinde ańlatıladı[7].

Koordinata sistemasın shaǵılıstırǵanda, yaǵnıy barlıq koordinatalardıń belgilerin ózgertkende, ádettegi úsh ólshemli tenzordıń qurawshıları da belgisin ózgertedi. Eki polyar vektordıń kóbeymesi túrinde berile alatuǵın vektordıń qurawshıları shaǵılıstırıwda belgisin ózgertpeydi. Bunday vektorlardı ***aksiallıq vektorlar*** dep ataymız. Polyar hám aksial vektorlardıń skalyar kóbeymesi haqıyqıy emes, al psevdoskalyar bolıp tabıladı: koordinatalardı shaǵılıstırǵanda ol belgisin ózgertedi. Aksial vektor antisimmetriyalı tenzorǵa dual bolǵan psevdovektor bolıp tabıladı. Mısalı, eger $\mathbf{C} = [\mathbf{AB}]$ bolsa, onda

$$C_\alpha = \frac{1}{2}e_{\alpha\beta\gamma}C_{\beta\gamma},$$

bul jerde $C_{\beta\gamma} = A_\beta B_\gamma - A_\gamma B_\beta$.

Endi 4 tenzorlarǵa qaytıp kelemiz. A^{ik} antisimmetriyalıq 4 tenzorınıń keńisliklik qurawshıları (i, k = 1, 2, 3) tek keńisliklik túrlendiriwlerge qatnası boyınsha úsh ólshemli antisimmetriyalıq tenzor bolıp tabıladı, al joqarıda aytılǵanlarǵa baylanıslı onıń qurawshıları úsh ólshemli aksial vektordıń qurawshıları arqalı ańlatıladı. A^{01}, A^{02}, A^{03} qurawshıları bolsa

---

[5] Biz bul jerde maǵlıwmat ushın sáykes formulalardı keltiremiz:

$$e^{iklm}e_{prst} = -\begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_r & \delta^i_s & \delta^i_t \\ \delta^k_p & \delta^k_r & \delta^k_s & \delta^k_t \\ \delta^l_p & \delta^l_r & \delta^l_s & \delta^l_t \\ \delta^m_p & \delta^m_r & \delta^m_s & \delta^m_t \end{vmatrix}, \qquad e^{iklm}e_{prst} = -\begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_r & \delta^i_s \\ \delta^k_p & \delta^k_r & \delta^k_s \\ \delta^l_p & \delta^l_r & \delta^l_s \end{vmatrix},$$

$$e^{iklm}e_{prst} = -2(\delta^i_p\delta^k_r - \delta^i_r\delta^k_p), \qquad e^{iklm}e_{prst} = -6\delta^i_p.$$

Bul formulalardaǵı ulıwmalıq koefficientler polyar qısıwdıń nátiyjesi boyınsha tekseriledi. Bunday kısıwdı (9) beriwi kerek.

[6] e^{iklm} 4 tenzorınıń qurawshılarınıń 4 koordinatalar sistemasın aylandırıwǵa, 3 tenzor bolǵan $e_{\alpha\beta\gamma}$ nıń keńisliklik koordinata kósherlerin aylandırıwǵa qatnası boyınsha ózgermey qalıwı ulıwmalıq qaǵıydanıń dara jaǵdayı bolıp tabıladı: Rangası keńisliktiń ólshemleri sanına teń hám usı keńislikte anıqlanǵan qálegen antisimmetriyalıq tenzor usı keńisliktegi koordinatalar sistemasın aylandırıwlarǵa qarata invariant.

[7] Maǵlıwmat ushın sáykes formulalardı keltiremiz:

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\mu\nu} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\lambda} & \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} \\ \delta_{\beta\lambda} & \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} \\ \delta_{\gamma\lambda} & \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} \end{vmatrix}.$$

Bul tenzordı indekslerdi bir, eki hám úsh jup boyınsha ápiwayılastırıp, alamız

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\mu\nu} = \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\lambda}, \quad e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\beta\gamma} = 2\delta_{\alpha\lambda}, \quad e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\beta\gamma} = 6.$$

sol túrlendiriwlerge qatnası boyınsha úsh ólshemli polyar vektordı quraydı. Solay etip antisimmetriyalı 4 tenzordıń qurawshıların mına keste túrinde kórsetiwge boladı:

$$\left(A^{ik}\right)=\begin{bmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -a_z & a_y \\ -p_y & a_z & 0 & -a_x \\ -p_z & -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Qala berse, keńisliklik túrlendiriwlerge qatnası boyınsha **p** menen **a** polyar hám aksial vektorlar bolıp tabıladı. Antisimmetriyalıq 4 tenzordıń qurawshıların birim-birim aytıp shıǵıw arqalı olardı mına túrde jazamız:

$$A^{ik} = (\mathbf{p}, \mathbf{a}).$$

Bunday jaǵdayda sol tenzordıń kovariant kurawshıları mına túrge iye:

$$A_{ik} = (-\mathbf{p}, \mathbf{a}).$$

Endi, aqırında tórt ólshemli tenzorlıq analizdiń bazı bir differenciallıq hám integrallıq operaciyaların qaraw ushın toqtap ótemiz.

φ skaloyarınıń 4 gradienti mına 4 vektor bolıp tabıladı:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}=\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t},\nabla\varphi\right).$$

Usı jazılǵan tuwındılardıń 4 vektordıń kovariant qurawshıları ekenligin názerde tutıw zárúrli. Haqıyqatında da skalyardıń differencialı

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}dx^i$$

shaması da skalyar bolıp tabıladı; onıń túrinen (eki 4 vektordıń skalyar kóbeymesi) joqarıdaǵı tastıyıqlawdıń durıslıǵı ayqın kórinedi.

Ulıwma x^i, $\partial/\partial x^i$ koordinatası boyınsha differenciallaw operatorları operatorlıq 4 vektordıń kovariant qurawshıları sıpatında qaralıwı kerek. Sonlıqtan, mısalı, kontravariant qurawshıları A^i differenciallanatuǵın 4 vektordıń divergenciyası - $\partial A^i/\partial x^i$ ańlatpası skalyar bolıp tabıladı[8].

[8] Eger «kovariant koordinata» x_i boyınsha differenciallaw júrgizilse, onda

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}=\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t},-\nabla\varphi\right)$$

4 vektordıń kontravariant kurawshıların dúzedi. Bunday jazıwlardı biz tek ayrıqsha jaǵdaylarda ǵana paydalanamız (mısalı 4 gradienttiń kvadratı bolǵan $\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ di jazıw ushın). Ádebiyatta tuwındılardıń koordinataları boyınsha dara tuwındılardıń

$$\partial^i=\frac{\partial}{\partial x_i},\quad \partial_i=\frac{\partial}{\partial x^i}$$

simvolları járdemindegi qısqasha jazılıwı jiyi qollanıladı. Differenciallaw operatorlarınıń jazılıwınıń usınday formasında olar tárepinen payda etiletuǵın shamalardıń kontra- hám kovariantlıq xarakteri anıq kórinedi. Tap usınday

Úsh ólshemli keńislikte integrallawdı kólem, bet hám iymeklik boyınsha júrgiziw múmkin. Tórt ólshemli keńislikte bolsa sáykes tórt túrli integrallawdı ámelge asırıw múmkin.

1) 4 keńisliktegi iymektik boyınsha integral. Integrallaw elementi uzınlıq elementi, yaǵnıy dx^i 4 vektorı bolıp tabıladı.

2) 4 keńisliktegi bet boyınsha (eki ólshemli) integral. Úsh ólshemli keńislikte paralelogramnıń dr hám dr' vektorlarında qurılǵan maydanınıń $x_\alpha x_\beta$ koordinatalıq tegisligine túsirilgen proekciyası $dx_\alpha dx'_\beta - dx_\beta dx'_\alpha$ ǵa teń ekenligi belgili. Tap sol sıyaqlı 4 keńislikte bettin sheksiz kishi fragmenti ekinshi rangalı $df^{ik} = dx^i dx'^k - dx^k dx'^i$ antisimmetriyalı tenzorı menen anıqlanadı, onıń qurawshıları elementtiń maydanınıń koordinatalıq tegislikke proekciyalarına teń. Úsh ólshemli keńislikte $df_{\alpha\beta}$ tenzorınıń ornına bettiń elementi sıpatında $df_{\alpha\beta}$ tenzorına duallıq bolǵan df_α tenzorı qollanıladı: $df_\alpha = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} df_{\beta\gamma}$. Geometriyalıq jaqtan bettiń elementine normal bolǵan vektor, al bul vektordıń absolyut shaması usı elementtiń maydanına teń. Tórt ólshemli keńislikte bunday vektordıń súwretin salıwǵa bolmaydı, biraq df^{ik} tenzorına duallıq bolǵan df^{*ik} tenzorınıń súwretin salıwǵa boladı, yaǵnıy

$$df^{*ik} = \frac{1}{2} e^{iklm} df_{lm}. \tag{11}$$

Geometriyalıq jaqtan ol df^{ik} elementine teń hám «normal» bet elementin súwretleydi, onıń ústinde jatqan barlıq kesindiler df^{ik} elementi ústindegi barlıq kesindilerge ortogonal. $df^{ik} df^*_{ik} = 0$ ekenligi ayqın.

3) Giperbet boyınsha integral, yaǵnıy úsh ólshemli kóp túrlilik (mnogoobrazie) boyınsha. Úsh ólshemli keńislikte úsh vektordan dúzilgen parallelopipedtiń kólemi usı vektorlardıń qurawshılarınan dúzilgen úshinshi tártipli anıqlawshıǵa teń ekenligi málim. 4 keńislikte tap usınday jollar menen dx^i, dx'^i, dx''^i dep belgilengen 4 vektorlarda dúzilgen «parallelopipedtiń» kóleminiń proekciyaları ańlatıladı. Olar mına anıqlawshı járdeminde kórsetiledi:

$$dS^{ikl} = \begin{vmatrix} dx^i & dx'^i & dx''^i \\ dx^k & dx'^k & dx''^k \\ dx^k & dx'^k & dx''^l \end{vmatrix}$$

Bul anıqlawshı úsh indeksi boyınsha antisimmetriyalı bolǵan 3-rangalı tenzordı dúzedi. Giperbet boyınsha integrallaw elementi sıpatında dS^{ikl} tenzorına duallıq bolǵan dS^i arqalı belgilengen 4 vektorın paydalanǵan qolaylı:

$$dS^i = -\frac{1}{6} e^{iklm} dS_{klm},\ dS_{klm} = e_{nklm} dS^n. \tag{12}$$

Usınıń menen birge

$$dS^0 = dS^{123},\ dS^1 = dS^{023}, \ldots$$

---

artıqmashlıqqa tómende keltirilgen tuwındılardıń basqa túrdegi qısqasha jazılıwı (útir belgisinen keyin indeks jazıw) iye:

$$\varphi_{,i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}, \quad \varphi^{,i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}.$$

Geometriyalıq jaqtan dS^i shaması jağınan giperbet elementiniń «maydanı» na teń, al bağıtı boyınsha usı elementke normal 4 vektor bolıp tabıladı (yağnıy giperbet elementinde ótkerilgen barlıq tuwrılarğa perpendikulyar). Dara jağdayda dS^0 = dxdydz, yağnıy úsh ólshemli dV kólemniń elementi bolıp tabıladı (giperbet elementiniń x^0 = const gipertegisligindegi proekciyası).

4) Tórt ólshemli kólem boyınsha integral; integrallaw elementi mına differenciallardıń kóbeymesi bolıp tabıladı:

$$d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = cdtdV. \tag{13}$$

Bul element skalyar bolıp tabıladı. 4 keńisliktiń ushastkasınıń kóleminiń koordinatalar sistemasın burganda ózgermeytuğınlığı túsinikli[9].

Úsh ólshemli vektorlıq analizdiń Gauss penen Stoks teoremalarına sáykes tórt ólshemli integrallardı bir birine túrlendiriwlerge múmkinshilik beretuğın teoremalar bar.

Tuyıq giperbet boyınsha integraldı usı bet ishinde jaylasqan 4 kólem boyınsha dS_i integrallaw elementin

$$dS_i \to d\Omega \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{14}$$

operatorına almastırıw arqalı túrlendiriwge boladı. Mısalı A^i vektorınıń integralı ushın iye bolamız:

$$\oint A^i dS_i = \int \frac{\partial A^i}{\partial x^i} d\Omega. \tag{15}$$

Bul formula Gauss teoremasınıń ulıwmalıstırılıwı boladı.

Eki ólshemli bet boyınsha integral usı bet tárepinen qamtıp alınatuğın giperbet boyınsha integralğa df^*_{ik} integrallaw elementin

$$df^*_{ik} \to dS_i \frac{\partial}{\partial x^k} - dS_k \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{16}$$

operatorına almastırıw arqalı túrlenedi. Mısalı A^{ik} antisimmetriyalı tenzorınan alınğan integral ushın iye bolamız:

$$\frac{1}{2}\oint A^{ik} df^*_{ik} = \frac{1}{2}\int \left(dS_i \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - dS_k \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^i} \right) = \int dS_i \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k}. \tag{17}$$

---

[9] Integrallaw ózgeriwshileri bolğan x^0, x^1, x^2, x^3 lerdi jańa x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 ózgerishilerine túrlendirgende $d\Omega$ integrallaw elementi $Jd\Omega'$ ke almastırıladı. Bul jerde $d\Omega' = dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3$, al

$$J = \frac{\partial(x'^0 x'^1 x'^2 x'^3)}{\partial(x^0 x^1 x^2 x^3)}$$

shaması túrlendiriw yakobianı bolıp tabıladı. $x'^i = \alpha^i_k x^k$ túrindegi sızıqlı túrlendiriw ushın J yakobianı $\left|a^i_k\right|$ anıqlawshısı menen sáykes keledi hám birge teń (koordinatalar sistemasınıń burılıwları ushın), usınıń menen $d\Omega$ nıń invariantlılığı kelip shığadı.

Tórt ólshemli tuyıq sızıq boyınsha alıńgan integral usı sızıq tárepinen qamtıp alıńgan bet boyınsha integralǵa

$$dx^i \to df^{ki}\frac{\partial}{\partial x^k} \tag{18}$$

almastırıwı arqalı túrlendiriledi. Mısalı vektordan alıńgan integral ushın

$$\oint A_i dx^i = \int df^{ki}\frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \frac{1}{2}\int df^{ki}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right). \tag{19}$$

ańlatpasına iye bolamız. Bul ańlatpa Stoks teoremasınıń ulıwmalastırılıwı bolıp tabıladı.

Tórt ólshemli tezlik. Ádettegi úsh ólshemli tezlik vektorınan tórt ólshemli tenzordı da túrlendiriw múmkin.

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} \tag{20}$$

vektorı bóleksheniń usınday 4 ólshemli tezligi (4 tezligi) bolıp tabıladı.

Onıń qurawshıların tabıw ushın

$$ds = cdt\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

ekenligin eske túsiremiz. Bul ańlatpada v arqalı bóleksheniń úsh ólshemli tezligi belgilengen. Sonlıqtan

$$u^1 = \frac{dx^1}{ds} = \frac{dx}{cdt\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{u_x}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

h.t.b. Solay etip

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{v}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right). \tag{21}$$

4 tezliktiń ólshem birligi joq shama ekenligin atap ótemiz.

4 tezliktiń qurawshıları bir birinen ǵárezsiz emes. $dx_i dx^i = ds^2$ ekenligin eske alıp

$$u^i u_i = 1. \tag{22}$$

ańlatpasına iye bolamız. Geometriyalıq jaqtan u^i bóleksheniń dúnyalıq sızıǵına urınba bolǵan birlik 4 vektor.

4 tezliktiń anıqlamasına sáykes

$$w^i = \frac{d^2x^i}{ds^2} = \frac{du^i}{ds}$$

tuwındısın 4 tezleniw dep ataw múmkin. (3) ti differenciallap

$$u_i w^i = 0. \tag{23}$$

ekenligin tabamız. *Demek tezlik penen tezleniwdiń 4 vektorları óz-ara ortogonal eken*.

Eń kishi tásir principi. Materiallıq bólekshelerdiń qozǵalısın izertlegende biz eń kishi tásir principinen kelip shıǵamız. Bul principtiń mánisi mınadan ibarat: hár bir mexanikalıq sistema ushın tásir dep atalatuǵın S integralı bar bolıp, bul integral haqıyqıy qozǵalıslarda minimumga iye boladı, al usıǵan baylanıslı onıń variaciyası δS nolge teń[10].

Erkin materiallıq bólekshe ushın (bunday bólekshe qanday da bir sırtqı kúshlerdiń tásirinde bolmaydı) tásir integgralın anıqlaymız.

Bunıń ushın biz dáslep integraldıń anıw yamasa mınaw inercial esaplaw sistemasınan ǵárezli emes ekenligin, yaǵnıy onıń Lorenc túrlendiriwlerine qarata invariant ekenligin ańǵaramız. Demek bunnan bul integraldıń skalyardan alınıwınıń kerek ekenligi kelip shıǵadı. Sanday-aq integral astında birinshi dárejeli differenciallardıń turıwı kerek ekenligi túsinikli. Biraq erkin materiallıq bólekshe ushın dúziw múmkin bolǵan usınday birden bir skalyar interval ds yamasa αds bolıwı kerek (α arqalı bazı bir turaqlı belgilengen).

Solay etip erkin bólekshe ushın tásir mına túrge iye bolıwı kerek:

$$S = -\alpha\int_a^b ds.$$

Integral berilgen *a* hám *b* waqıyaları arasındaǵı dúnyalıq sızıq boyınsha alınadı (bólekshe *a* hám *b* nokatlarında belgili bir t_1 hám t_2 waqıt momentlerinde turadı, yaǵnıy berilgen dúnyalıq noqatlar arasında dep esaplanadı); α bolsa berilgen bólekshen táriyipleytuǵın bazı bir turaqlı. Barlıq bóleksheler ushın α nıń oń shama bolatuǵınlıǵın ańsat kóriwge boladı. Haqıyqatında da $\int_a^b ds$ integralı dúnyalıq sızıq boylap tuwrı boyında maksimallıq mániske iye boladı, dúnyalıq sızıqtıń boyı boylap onı qálegenimizshe kishi etip alıwımızǵa boladı.

Solay etip oń mánisi menen alınǵan integral minimumǵa iye bolmaydı, al keri belgi menen alınǵan integral dúnyalıq sızıq boylıp minimumǵa iye boladı.

Tásirdi waqıt boyınsha integral túrinde beriwge boladı:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt.$$

dt nıń aldındaǵı koefficient L berilgen mexanikalıq sistema ushın ***Lagranj funkciyası*** dep ataladı.

Bir qansha belgilewler qabıl etemiz. Meyli dt arqalı qozǵalmaytuǵın esaplaw sistemasındaǵı (yaǵnıy qozǵalmay turǵan bizler menen baylanısqan sistemadaǵı) sheksiz kishi waqıt aralıǵı, al dt' arqalı v tezligi menen qozǵalıwshı esaplaw sistemasındaǵı (qozǵalıwshı saattıń júriw tezligi) dt ǵa sáykes waqıt aralıǵı belgilengen bolsın. Onday bolsa Lorenc túrlendiriwlerine sáykes

$$dt' = \frac{ds}{c} = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

[10] Qatań túrde aytqanda eń kishi tásir principi S integralınıń integrallaw sızıǵınıń tek kishi ushastkası boylap minimal mániske iye boadı dep tastıyıqlaydı. Iqtıyarlı uzınlıqtaǵı sızıq ushın S integralı minimum bolıp tabılıwı shárt emes ekstremumǵa iye boladı dep tastıyıqlawǵa boladı.

Demek $S=\int_{t_1}^{t_2} L dt$ formulasınıń járdeminde alamız:

$$S=-\int_{t_1}^{t_2} \alpha c\sqrt{1-v^2/c^2}\,dt.$$

Bul ańlatpada v arqalı materiallıq bóleksheniń tezligi belgilengen. Demek bóleksheniń Lagranj funkciyası mınaǵan teń boladı eken:

$$L=-\alpha c\sqrt{1-v^2/c^2}.$$

Joqarıda aytılǵanınday α shaması berilgen bóleksheni táriyipleydi. Klassikalıq mexanikada hár bir bólekshe m massası menen táriyiplenedi. Endi m hám α shamaları arasındaǵı baylanıstı anıqlaymız. Bul baylanıs $c\to\infty$ sheginde biziń L ushın jazılǵan ańlatpamız klassikalıq ańlatpaǵa ótiwi kerek shárti tiykarında tabıladı:

$$L=\frac{mv^2}{2}.$$

Bul otiwdi ámelge asırıw ushın L di v/c nıń dárejesi boyınsha qatarǵa jayamız. Bunday jaǵdayda jokarı tártipli aǵzalardı taslap ketip, alamız

$$L=-\alpha c\sqrt{1-v^2/c^2}\approx-\alpha c+\frac{\alpha v^2}{2c}.$$

Lagranj funkciyasındaǵı turaqlı aǵzalar qozǵalıs teńlemelerinde sáwlelenbeydi hám sonıń ushın taslap ketiledi. L degi αs nı taslap ketip hám klassikalıq ańlatpa $L=mv^2/2$ menen salıstırıp α = ms ekenligine iye bolamız.

Solay etip erkin bólekshe ushın tásir mınaǵan teń:

$$S=-mc\int_a^b ds, \tag{24}$$

al Lagranj funkciyası bolsa

$$L=-mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}. \tag{25}$$

Energiya hám impuls. Bóleksheniń impulsı dep $\mathbf{p}=\partial L/\partial \mathbf{v}$ vektorına aytadı ($\partial L/\partial \mathbf{v}$ jazıwı qurawshıları L den **v** nıń sáykes qurawshısı boyınsha alınǵan tuwındıǵı teń vektordıń simvollıq belgileniwi bolıp tabıladı). (25)-ańlatpanıń járdeminde tabamız:

$$\mathbf{p}=\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{26}$$

Kishi tezliklerde (v<<c) yamasa $c \to \infty$ sheginde bul ańlatpa klassikalıq $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ ańlatpasına ótedi. Eger v = s bolsı impuls sheksizlikke aylanadı.

Impulsten waqıt boyınsha alıngan tuwındı bólekshege tasir etiwshi kúshke teń. Meyli bólekshenıń tezligi tek bagıtı boyınsha ózgeretugın bolsın (yagnıy kúsh tezlikke perpendikulyar bagıtlangan). Onda

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \qquad (27)$$

Eger tezlik shaması boyınsha ózgeretugın bolsa (yagnıy kúsh tezlik bagıtında túsirilgen)

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \qquad (28)$$

Eki jagdayda kúshtiń tezlikke qatnasınıń birdey emes ekenligin kóremiz.

Bólekshenıń energiyası E dep

$$E = \mathbf{pv} - L$$

shamasına aytamız. L hám **p** ushın (25)- hám (26)-ańlatpaların qoyıp, alamız

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (28)$$

Bul ogada áhmiyetli formula relyativistlik mexanikada erkin bólekshenıń energiyasınıń tezlik nolge teń (yagnıy v = 0) bolganda da nolge teń bolmay, al

$$E = mc^2 \qquad (29)$$

shamasına teń bolatugınlıgın kórsetedi. Onı bólekshenıń ***tınıshlıqtagı energiyası*** **(*tınıshlıq energiyası*)** dep ataydı.

Kishi tezlikler ushın (v<<c) (28)-ańlatpanı v/s nıń dárejeleri boyınsha qatarga jaysaq, onda

$$E \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2}$$

ańlatpasın alamız. Demek bul jagdayda alıngan formuladan mc^2 tınıshlıq energiyasın alıp taslasaq, onda bólekshe ushın kinetikalıq energiyanıń klassikalıq ańlatpasın alamız.

Biz joqarıda «bólekshe» haqqında sóz júrtip atırmız, biraq onıń «elementarlılıgı» hesh bir jerde paydalanılmadı. Sonlıqtan alıngan formulalardı kóp bólekshelerden turatugın qálegen kuramalı dene ushın qollanıw múmkin hám bul jagdayda m arqalı denenıń tolıq massası, al v arqalı onıń tutası menen qozgalıw tezligi belgilengen. Mısalı (29)-formula qálegen tınıshlıqta turgan tutas dene ushın durıs. Biz erkin denenıń energiyasınıń (yagnıy qálegen tuyıq sistemanıń energiyasınıń) relyativistlik mexanikada belgili bir anıq mánimske iye bolatuǵınlıǵın, barlıq waqıtta da oń mániske iye bolatuǵınlıǵın hám deneniń massası menen tikkeley baylanısı bar shama ekenligine itibar beriwimiz kerek. Usıǵan baylanıslı biz klassikalıq mexanikada deneniń energiyası tek ıqtıyarlı additiv shama dálliginde anıqlanatuǵınlıǵın, onıń oń mániske de, teris mániske de iye bolatuǵınlıǵın eske túsirip ótemiz.

Tınıshlıqta turǵan deneniń energiyası onıń quramına kiretuǵın bólekshelerdiń tınıshlıq energiyasınan basqa sol bólekshelerdiń kinetikalıq energiyaların hám olardıń bir biri menen tásirlesiw energiyaların da óz ishine aladı. Basqa sóz benen aytqanda mc^2 shaması $\sum m_a c^2$ qa teń emes (m_a bólekshelerdiń massası) hám sonlıqtan m niń mánisi $\sum m_a$ ǵa teń emes. Solay etip relyativistlik mexanikada massanıń saqlanıw nızamı orın almaydı eken: quramalı deneniń massası onıń bólekleriniń massasınıń qosındısına teń emes. Bunıń ornına tek energiyanıń saqlanıw nızamı orın alıp, buǵan bólekshelerdiń tınıshlıq energiyaları da kiredi.

(26)- hám (28)-ańlatpalardı kvadratqa kóterip hám olardı salıstırıw arqalı iz bóleksheniń energiyası menen impulsı arasındaǵı mına qatnastı alamız:

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2c^2. \tag{30}$$

Impuls arqalı ańlatılǵan energiyanıń Gamilton funkciyası H dep atalatuǵınlıǵı belgili:

$$H = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}. \tag{31}$$

Kishi tezliklerde $p << mc$ hám juwıq túrde:

$$H \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m},$$

yaǵnıy eger tınıshlıq energiyasın alıp taslasaq Gamilton funkciyasınıń belgili klassikalıq ańlatpasın aladı ekenbiz.

(26)- hám (28)-ańlatpalardan erkin bóleksheniń energiyası, impulsı hám energiyası arasındaǵı tómendegidey qatnas kelip shıǵadı:

$$\mathbf{p} = \frac{E\mathbf{v}}{c^2}. \tag{32}$$

$v = c$ bolǵan bóleksheniń impulsı menen energiyası sheksizlikke aylanadı. Bul massası nolge teń bolmaǵan bólekshelerdiń jaqtılıqtıń tezligindey tezlik penen qozǵala almaytuǵınlıǵın bildiredi. Biraq relyativistlik mexanikada massası nolge teń hám jaqtılıqtıń tezligindey tezlik penen qozǵalatuǵın bólekshelerdiń bolıwı múmkin. Bunday bóleksheler ushın (32)-ańlatpadan iye bolamız[11]:

$$p = \frac{E}{c}. \tag{33}$$

Juwıq túrde tap usı formula massası nolge teń emes bóleksheler ushın bóleksheniń energiyası E onıń tınıshlıqtaǵı energiyası mc^2 tan júdá úlken bolǵan ***ultrarelyativistlik jaǵdaylarda*** durıs boladı.

---

[11] Jaqtılıq kvantları – fotonlar sonday bóleksheler bolıp tabıladı.

Endi barlıq alıngan qatnaslardı tórt ólshemli túrde keltirip shıǵaramız. Eń kishi tásir principine sáykes

$$\delta S = -mc\delta\int_a^b ds = 0.$$

δS ushın ańlatpanı ashamız. Bunıń ushın $ds = \sqrt{dx_i dx^i}$ ekenligin ańǵaramız hám sonlıqtan

$$\delta S = -mc\int_a^b \frac{dx_i \delta dx^i}{ds} = -mc\int_a^b u_i d\delta x^i.$$

Bólimler boyınsha integrallap, tabamız:

$$\delta S = -mcu_i \delta x^i \Big|_a^b + mc\int_a^b \delta x^i \frac{du_i}{ds} ds. \qquad (34)$$

Málim, qozǵalıs teńlemelerin tabıw ushın berilgen eki awhaldan ótetuǵın hár qıylı traektoriyalar salıstırıladı [yaǵnıy $(\delta x^i)_a = (\delta x^i)_b = 0$ sheklerindegi]. Hakıyqıy traektoriya $\delta S = 0$ shártinen anıqlanadı. Bunday jaǵdayda (34)- formuladan $du^i/ds = 0$ teńlemesin alǵan bolar edik, yaǵnıy tórt ólshemli túrde erkin bólekshenıń tezliginiń turaqlılıǵı.

Koordinatalardıń funkciyası sıpatında tásirdiń variaciyasın tabıw ushın tek bir *a* noqatın berilgen dep esaplaw kerek, sonıń ushın $(\delta x^i)_a = 0$. Ekinshi noqattı ózgermeli dep esaplaw kerek, biraq sınıń menen birge tek haqıyqıy nokatlardı, yaǵnıy traektoriyanıń qozǵalıs teńlemelerin qanaatlandıratuǵın noqatlardı qaraw kerek. Sonıń ushın (34)-ańlatpadaǵı integral δS ushın nolge teń. $(\delta x^i)_b$ nıń ornına tek δx^i dep jazamız hám solay etip tabamız:

$$\delta S = -mcu_i \delta x^i. \qquad (35)$$

4 vektor

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i} \qquad (36)$$

4 impuls dep ataladı. Mexanikadan málim bolǵanınday, $\partial S/\partial x, \partial S/\partial y, \partial S/\partial z$ bólekshenıń **p** impulsınıń úsh kurawshısı bolıp tabıladı, al $\partial S/\partial t$ tuwındısı bolsa bólekshenıń energiyası E bolıp tabıladı. Sonlıqtan 4 impulstıń kovariant qurawshıları $p_i = (E/c, -p)$, al kontravariant qurawshıları bolsa[12]

$$p^i = \left(\frac{E}{c}, \quad p\right). \qquad (37)$$

(35)-ańlatpadan kórinip turǵanınday, erkin bólekshenıń 4 impulsınıń qurawshıları mınaǵan teń:

[12] Fizikalıq 4 vektorlardı este saqlaw ushın miemonikalıq qaǵıydaǵa dıqqat awdaramız: kontravariant qurawshılar sáykes úsh ólshemli vektorlar menen (x^i ushın r, p^i ushın p h.t.b.) «durıs», oń belgi arqalı baylanısqan.

$$p^i = mcu^i. \tag{38}$$

Bul ańlatpaǵa

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{v}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} \right)$$

formulasınan u^i diń mánisin qoysaq, onda **p** hám E ushın (26)- hám (28)- ańlatpalardıń alınatuǵınlıǵına isenemiz.

Solay etip relyativistlik mexanikada impuls penen energiya bir 4 vektordıń qurawshıları bolıp tabıladı eken. Bunnan impuls penen energiyanıń bir esaplaw sistemasınan ekinshisine ótkendegi túrleniw formulaları tikkeley shıǵadı. 4 vektordıń túrleniwiniń ulıwmalıq formulaları bolǵan [(1)-formula]

$$A^0 = \frac{A'^0 + (V/c)A'^1}{\sqrt{1-V^2/c^2}},\ A^1 = \frac{A'^1 + (V/c)A'^0}{\sqrt{1-V^2/c^2}},\ A^2 = A'^2, A^3 = A'^3.$$

formulalarına (37)-ańlatpanı qoyıp mına formulalardı alamız:

$$p_x = \frac{p_x' + (V/c)E'}{\sqrt{1-V^2/c^2}},\ p_y = p'_y,\quad p_z = p'_z,\ E = \frac{E' + (V/c)p'_x}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \tag{39}$$

Bul ańlatpada p_x, p_y, p_z arqalı úsh ólshemli **p** vektorınıń qurawshıları belgilengen.

4 impulstıń anıqlaması bolgan (38) den hám $u^i u_i = 1$ teńliginen erkin bóleksheniń 4 impulsınıń kvadratı ushın iye bolamız:

$$p^i p_i = m^2 c^2. \tag{40}$$

Bul ańlatpaǵa (37) ni qoyıp biz (30)-ańlatpaǵa qaytıp kelemiz.

Kúsh ushın ádettegi anıqlamaǵa sáykes kúsh 4 vektorın mına tuwındı túrinde anıqlaw múmkin:

$$g^i = \frac{dp^i}{ds} = mc\frac{du^i}{ds}. \tag{41}$$

Onıń qurawshıları $g_i u^i = 0$ teńligin qanaatlandıradı. Bul 4 vektordıń kurawshıları kúshtiń ádettegi úsh ólshemli **f** = d**p**/dt vektorı arqalı bılayınsha ańlatıladı:

$$g^i = \left(\frac{\mathbf{fv}}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad \frac{\mathbf{f}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right). \tag{42}$$

Waqıtlıq qurawshı kúshtiń jumısı menen baylanısqan bolıp shıǵadı.

Paydalanılǵan ádebiyatlar dizimi

1. Hugh D. Young, Roger A. Freedman,cjntributing autor A.Lewis Ford. University Physics with modern Physics. 13th Edition. Addison-Wesley. 1598 p.
(p. 1223-1260).
2. L.D.Landau, E.M.Lifshic. Teoretiчeskaya fizika. Uчebnoe posobie dlya vuzov. V. 10 t. Tom II. Teoriya polya. 8-e izdanie. Izdatelstvo "FIZMATLIT". Moskva. 2003. 536 s.
Glava 1. §§ 5-7. Glava 2. §§ 8-9.
3. A.N.Matveev. Mexanika i teoriya otnositelnosti. Uчebnik dlya studentov vısshix uчebnıx zavedeniy. 3-e izdanie. Izdatelstva "ONIKS 21 vek", "Mir i obrazovanie". Moskva. 2003. 432 s.
Glava 3. §§ 13-14.
4. Benjamin Crowell. Spesial Relativity. www.lightandmatter.com, rev. February 11, 2016.
5. Lewis Ryder. Introduction to General Relativity. Cambridge University Press. 2009. 441 p.

5-lekciya. Gravitaciyalıq tásirlesiwdi geometriyalastırıw. Ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyası tiykarında jatatuǵın gipotezalar

Inercial emes esaplaw sistemasına Evklid geometriyasın qollanıwǵa bolmaytuǵınlıǵın kórgennen keyin geometriya degen ne hám onıń nege keregi bar? Degen soraw ústinde oylayıq. Bul sorawǵa beriletuǵın eń qısqa hám durıs juwap mınadan ibarat:

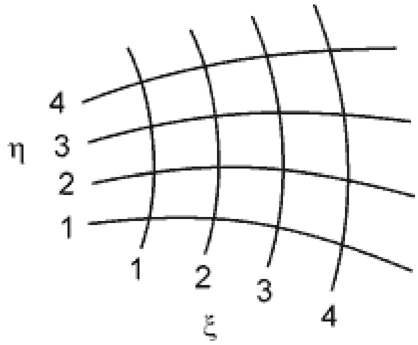
geometriya birinshi gezekte keńisliktegi noqatlardıń óz-ara jaylasıwın anıqlaw ushın kerek. Hár bir ayqın jaǵday ushın noqatlardıń óz-ara jaylasıwdı anıqlawshı qaǵıydalardı islep shıǵıw geometriya iliminiń ózin quraydı.

Biz bul jerde keńislik degende biziń úsh ólshewli keńisligimizdi názerde tutıw shárt emes. Keńislik eki ólshemli yamasa tórt ólshemli (mısalı Minkovskiy keńisligi) bolıwı múmkin. Ólshemleri sanı $n \geq 2$ bolǵan qálegen keńislik ushın geometriyanı dúziw máselesi tuwrı sızıqlardıń apparatın hám oǵan sáykes keliwshi akseomalar menen teoremalardıń Evklidlik sistemasın aldın-ala beriwsiz ámelge asırıladı.

Biz jer ólshewshi adamdı kóz aldımızǵa keltireyik. Ol oylı-bálentli hám qalıń toǵay ósken jerdi ólshep usı ushastkanıń kartasın dúzetuǵın bolsın. Hár bir noqatta turǵanda ol átirapındaǵı ushastkanıń kishi bólimin ǵana kóredi. Biziń jer ólshegishimizdiń qolında tek ólshew ruletkası ǵana bar. Bul ruletka úlken emes úsh múyeshlikler yamasa tórt múyeshliklerdi ólsheydi. Olardıń tóbelerin jerge qaǵılǵan qazıqlar menen belgilew múmkin. Usınday jollar menen ólshengen figuralardı bir birine baylanıstırıp jer ólshewshi toǵaydıń qashıqlaw ushatkalarına karay belgili bir izbe-izlikte júriwge májbúr boladı. Abstrakt túrde aytatuǵın bolsaq jer ólshewshi úlken emes oblastlarda ádettegi Evklid geometriyasınıń usılların qollanadı. Biraq bul usıllardı pútini menen alǵandaǵı barlıq jer ushastkasına qollanıw múmkin emes. Bunday ushastkanı tek bir ushaskadan ekinshi ushaskaǵa ótiw jolı menen geometriyalıq jaqtan izertlew múmkin. Qala berse Evklid geometriyasın globallıq mániste oylı-bálentli ushastkada qollanıwǵa bolmaydı: bunday ushastkada tuwrı sızıq pútkilley bolmaydı. Sızǵıshtıń kısqa lentasın tuwrı dep esaplawǵa boladı, biraq biyiklikti biyiklik penen, oypattı oypat penen tutastıratuǵın bettiń barlıq noqatların tutasturatuǵın (bettiń ústinde jatatuǵın) tuwrı sızıq bolmaydı Solay etip Evklid geometriyası belgili bir mániste tek kishi (yamasa infinitezimal) oblastlar ushın ǵana durıs boladı. Al úlken oblastlarda bolsa keńislik yamasa bet haqqında ulıwmalıraq kóz-qaraslar orın aladı.

Eger jer ólshewshi sistemalı túrde jumıs islegisi keletuǵın bolsa, onda ol toǵay ósken betti sızıqlar torı menen qaplaydı. Olardı kazıqlar menen bekitedi yamasa belgili aǵashlarǵa baylanıstıradı. Oǵan sızıqlardıń kesilisetuǵın eki semeystvosı kerek boladı.

Koordinatalardıń Gausslıq sisteması.



Sızıqlar múmkin bolǵanınsha tegis hám úzliksiz mayısqan, al hár bir semestvo ramkalarında izbe-iz nomerlengen bolıwı kerek. Bir semeystvonıń qálegen bir aǵzasınıń simvollıq belgileniwi retinde ξ di, al baska seseystvonıń qálegen aǵzası ushın η di alamız. Bunday jaǵdayda hár bir kesilisiw noqatın eki ξ hám η sanı táriyipleydi (mısalı ξ = 3 hám η = 5). Barlıq aralıqlıq noqatlardı ξ hám η shamalarınıń bólshek mánisleri menen táriyiplew múmkin. Mayısqan bettiń noqatların anıqlawdıń usınday usılın birinshi ret Gauss paydalandı hám sonlıqtan ξ hám η shamaların **Gauss koordinataları** dep ataydı. Gauss usılınıń ózine tán ózgesheligi: ξ hám η shamaları uzınlıqtı da, múyeshti de, basqa da ólshenetuǵın geometriyalıq shamanı ańlatpaydı, al tek sanlar bolıp tabıladı.

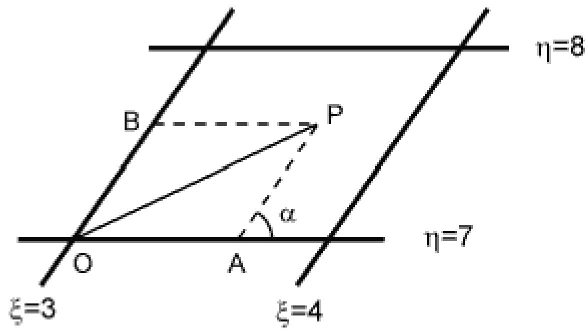
Ushastkadaǵı noqatlardı esaplawdaǵı birlik ólshemdi anıqlaw tolıǵı menen jer ólshewshiniń isi bolıp tabıladı. Onıń ruletkasınıń uzınlıǵı Gauss koordinatalar sistemasındaǵı bir yasheykaǵa sáykes oblasttı anıqlaydı.

Jer ólshewshi endi bir yasheykadan keyin ekinshi yasheykanı ólshewi, usınday ólshewlerdi dawam etiwi múmkin. Bul yasheykalardıń hár birin kishi parallelogramm dep karawǵa boladı. Eger eki tárepi menen onıń arasındaǵı múyesh anıqlanǵan bolsa bunday parallelogramdı tolıq anıqlanǵan dep esaplawǵa boladı. Jer ólshewshi bul yasheykalardıń hár birin ólshewi kerek hám keyin olardı óziniń kartasına túsiriwi kerek. Bul proceduralardı orınlaǵannan keyin ol óziniń kartasında ushastkanıń geometriyası haqqında tolıq maǵlıwmatlardı aladı.

Hár bir yasheyka ushın úsh sannıń (eki tárep hám múyesh) ornına basqa usıldı qollanıw kópshilikke málim. Onıń artıqmashlıǵı simmetriyasınıń joqarılıǵında.

YAsheykalardıń birin qaraymız. Bul yasheyka parallelogram bolsın hám onıń tárepleri birinen soń biri keletuǵın eki nomerge sáykes kelsin ($\xi = 3$, $\xi = 4$ hám $\eta = 7$, $\eta = 8$; sm., súwrette keltirilgen).

Bir yasheyka sheklerindegi qashıqlıqlardı anıqlaw.



YAsheyka ishindegi P bazı bir noqat, al S arqalı múyeshtiń tóbesinde turǵan O noqatınan qashıqlıǵı belgilengen. Bul qashıqlıq ólshew ruletkasınıń járdeminde anıqlanadı. P noqatı arqalı eki koordinata sızıǵına paralleller ótkeremiz: bul paralleller koordinata sızıqların A hám B noqatlarında kesedi.

Bunday jaǵdayda A hám B larǵa biziń koordinata torımız ramkalarında sanlar yamasa Gauss koordinataları sáykes keledi. A noqatı $(\xi+\Delta\xi, \eta)$ koordinatalarına, al B noqatı $(\xi, \eta+\Delta\eta)$

koordinatalarına iye, $(\xi,\ \eta)$ bolsa O noqatınıń koordinatası bolıp tabıladı. Gauss koordinatalarınıń ósimleri bolǵan $\Delta\xi$ hám $\Delta\eta$ shamaların A hám B noqatları hám OA hám OB qashıqlıqları turatuǵın parallelogramnıń tárepleri ólshew hám usı shamalardıń parallelogramnıń táreplerine qatnasın esaplaw jolı menen anıqlaymız. Biziń parallelogramımız óziniń Gauss koordinataları menen birge ayrılatuǵın sızıqlar menen dúzilgen bolǵanlıqtan $\Delta\xi$ hám $\Delta\eta$ ósimleri usı qatnaslarǵa teń boladı. Baska sóz benen aytqanda olar A hám B noqatlarınıń parallelogramnıń sáykes táreplerin qanday qatnasta bóletuǵınlıǵın kórsetedi.

OA qashıqlıǵınıń haqıyqıy mánisi $\Delta\xi$ emes, al $a\Delta\xi$ shamasına teń. Bul jerde a arqalı ólshew arqalı tabılatuǵın belgili bir shama. Tap sol sıyaqlı OB uzınlıǵınıń haqıyqıy mánisi $\Delta\eta$ ge teń emes, al bazı bir $b\Delta\eta$ shamasına teń. Eger P noqatın jılıstırsaq, onda onıń Gauss koordinataları ózgeredi; gauss koordinatalarınıń haqıyqıy uzınlıqlarǵa qatnası bolǵan a hám b shamaları bolsa bir yasheyka sheklerinde ózgerissiz qaladı.

Endi $OP = \Delta L$ qashıqlıǵın tabamız. Kosinuslar boyınsha teoremadan

$$\Delta L^2 = OA^2+2\ OA\cdot OB\cos\alpha + OB^2. \qquad (1)$$

Bul ańlatpadaǵı α parallelogramnıń tóbesi O noqatındaǵı múyesh bolıp tabıladı. Bul ańlatpanı $\Delta\xi$ hám $\Delta\eta$ arqalı qaytadan jazsaq mınanı alamız

$$\Delta L^2 = a^2\Delta\xi^2 + 2ab\cos\alpha\,\Delta\xi\Delta\eta + b^2\Delta\eta^2\,. \qquad (2)$$

Proporcionallıq koefficientleri a, b hám α múyeshi ulıwma jaǵdaylarda yasheykadan yasheykaǵa ótkende ózgeredi (yaǵnıy olar O tóbesiniń koordinataları bolǵan ξ hám η shamalarınıń funkciyaları bolıp tabıladı. (2)-teńlemedegi úsh kóbeytiwshini basqa usıl menen belgilew ulıwma túrde qabıl etilgen. Atap aytqanda

$$\Delta L^2 = g_{11}\Delta\xi^2 + 2g_{12}\Delta\xi\Delta\eta + g_{22}\,\Delta\eta^2\,. \qquad (3)$$

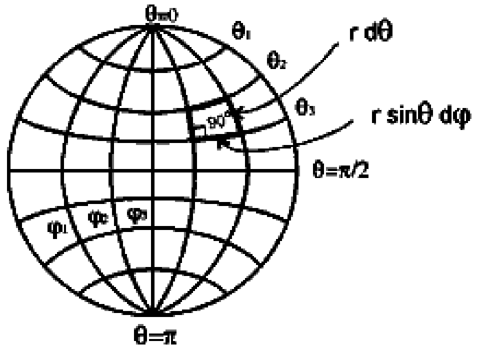
Bul formulanı Gauss koordinatalarındaǵı **Pifagordıń ulıwmalastırılǵan teoreması** dep ataydı.

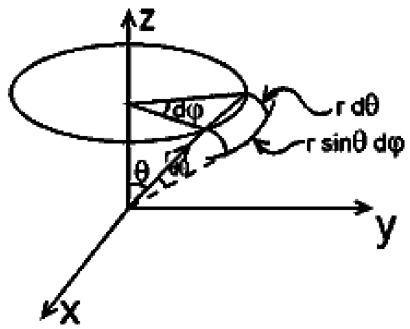
Biziń ańlatpalarımızda payda bolǵan úsh g_{11}, g_{12}, g_{22} shamaları parallelogramnıń sheklerinde qashıqlıqlardı hám noqatlardıń orınların anıqlaytuǵın eki tárep hám muyesh sıpatında xızmet etedi. Sonlıqtan olardı **metrlik koefficientler**, al (3)-ańlatpanı **bettiń metrikasın** anıqlaydı dep esaplaydı. Metrlik koefficientlerdiń mánisleri yasheykadan yasheykaǵa ózgerip baradı, bul jaǵdaydı kartada belgilep barıw yamasa noqattıń Gauss koordinataları bolǵan ξ, η shamalarınıń matematikalıq funkciyası sıpatında beriw kerek:

$$g_{11}(\xi,\eta)\,,\, g_{12}(\xi,\eta)\,,\, g_{22}(\xi,\eta)\,. \qquad (4)$$

Eger bul funkciyalar belgili bolsa, onda (3)-formula járdeminde koordinata basınan qálegen yasheykada jaylasqan qálegen noqatqa shekemgi haqıyqıy qashıqlıqlardı esaplaw múmkin (sebebi olardıń Gauss koordinatları ξ, η menen O noqatınıń koordinataları belgili). **Solay etip g_{ij} metrlik koefficientleri bettiń barlıq geometriyasın anıqlaydı eken.**

Geodeziyalıq sızıqlar hám qıysıqlıq. Qıysıq bette tuwrı sızıqlar bolmaydı, al eń dúziwleri boladı. Sol sızıqlar noqatlar jupları arasındaǵı qashıqlıqlardı anıqlaydı. Olardıń matematikalıq atı geodeziyalıq sızıqlar. Mısalı sferalıq bette geodeziyalıq sızıqlar úlken dóńgelektiń sheńberleri bolıp tabıladı. Bul sheńberler sferanıń orayı arqalı ótiwshi tegislikler menen kesiledi.





Sferadağı metrika

Sferadağı eki Gauss koordinatası retinde eki múyeshti alıw múmkin (polyar múyesh θ hám azimutallıq múyesh φ). Sferanıń radiusın r arqalı belgilep sferadağı metrikanı mına túrde kórsetiw múmkin:

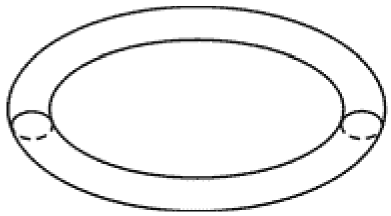
$$dL^2 = r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2 + r^2\, d\theta^2. \qquad (5)$$

Bul ulıwma formula bolǵan (3)-ańlatpadağı metrlik koefficientlerge sáykes keledi:

$$g_{11} = r^2\sin^2\theta\,,\, g_{22} = r^2, g_{12} = 0\ . \qquad (6)$$

g_{12} qurawshısınıń nolge teń ekenligi koordinata sistemasınıń ortogonallığın bildiredi.

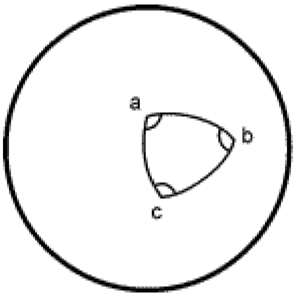
Tor.



Basqa betlerdegi eń kısqa sızıqlar kópshilik jağdaylarda quramalı qurılısqa iye boladı; biraq usıǵan qaramastan usı betlerdiń ramkalarında olar eń ápiwayı iymeklikler bolıp tabıladı hám bul bettiń geometriyasınıń karkasın payda etedi (mısalı Evklid geometriyasındağı tuwrı sızıqlardıń tegisliktiń karkasın payda etkenindey).

Bettiń ekinshi fundamentallıq qásiyeti – onıń qıysıqlığı bolıp tabıladı. Qıysıqlıqtı ádette úshinshi keńisliklik ólshem járdeminde anıqlaydı. Mısalı sferanıń qıysıqlığı onıń radiusı arqalı ólshenedi (atap aytqandı bettegi noqattan sferanıń orayına shekemgi aralıq – sferalıq betten tısta ornalasqan).

Toǵaylı orındağı jer ólshewshi qıysıqlıqtıń bul anıqlamasın paydalana almaydı. Ol betten tısta jaylasqan noqatlarǵa bara almaydı. Sonlıqtan qıysıqlıqtı anıqlaw ushın tek óziniń ruletkasınan paydalanıwı kerek. Gauss usı usıldıń haqıyqatında da durıs ekenligin dálilledi hám usı jerde máseleniń sferada qalay sheshiletuǵınlıǵın kórsetip ótemiz. Bunıń ushın sferanıń betinde úsh a, b jáne c noqatların alamız hám olardı geodeziyalıq sızıqlar menen tutastıramız.



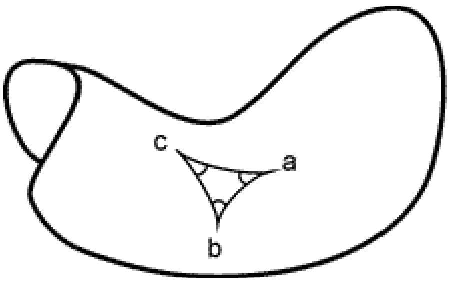
Sfera betinde alınǵan úsh múyeshliktiń ishki múyeshleriniń qosındısı π den úlken.

Nátiyjede joqarıdaǵı súwrette kórsetilgendey úsh múyeshlik alınadı. Bul úsh múyeshliktiń ishki múyeshleriniń qosındısı π den (yaǵnıy 180˚tan) úlken boladı. Bul sferanıń dóńisliginiń nátiyjesi. Úsh múyeshlik qanshama úlken bolsa ishki múyeshlerdiń qosındısınıń π den ayırması úlken boladı. Usı ayırma járdeminde biz sferanıń qıysıqlıq dárejesin – onıń radiusın anıqlay alamız ba? - degen soraw tuwıladı. Álbette anıqlaw múmkin. Bunıń ushın úsh múyeshliktiń ishki múyeshleriniń qosındısın Σ arqalı belgileymiz hám $\Sigma - \pi$ ayırmasın úsh múyeshliktiń maydanı S_Δ ǵa bólemiz:

$$\frac{\Sigma-\pi}{S_\Delta}=\frac{1}{R^2}\equiv C. \tag{7}$$

Alınǵan shama $1/R^2$ qa teń (R arqalı sferanıń radiusı belgilengen). Onı qıysıqlıq dep ataydı jáne C háripi járdeminde belgileydi.

Qálegen qıysayǵan bet jaǵdayında qıysıqlıqtı joqarıda keltirilgendey jollar menen anıqlaydı. Ulıwma jaǵdayda bet hár qıylı noqatlarda hár qıylı bolıp qıysayǵan bolıwı múmkin. Sonlıqtan berilgen orındaǵı qıysıqlıqtı anıqlaw ushın úsh múyeshlikti sheksiz kishi etip alıw kerek. Usınday jollar menen sfera ushın alınǵan qıysıqlıq oń mániske iye bolıp shıǵadı. Biraq teris mániske iye qıysıqlıqqa iye betler de bar. Usınday betke mısal retinde er tárizli betti keltiriw múmkin (tómendegi súwret).



Er teris mánisli qıysıqlıqqa iye bet bolıp tabıladı.

Usınday er tárizli bettegi úsh múyeshliktiń ishki múyeshleriniń qosındısı π den kishi, yaǵnıy

$$C=\frac{\Sigma-\pi}{S_\Delta}<0, \tag{8}$$

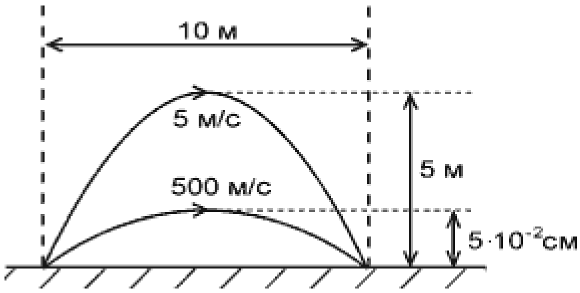
yaǵnıy qıysıqlıq teris.

Bettiń qıysıqlıǵı haqqında sheńber uzınlıǵınıń onıń radiusına qatnası boyınsha da tallaw múmkin. Sferada bul qatnas 2π den kishi, al er tárizli bette 2π den úlken.

Ulıwma jaǵdaylarda qıysıqlıq R_{iklm} 4–rangalı tenzorı járdeminde táriyiplenedi hám ol **qıysıqlıq tenzorı** dep ataladı hám **ol metrlik tenzor** $g_{\alpha\beta}$ arqalı ańlatılıwı múmkin. Qıysıqlıq tenzorınıń barlıq qurawshıları bir birinen ǵárezsiz emes. Mısalı 2 ólshemli keńislik ushın R_{iklm} tenzorınıń 16 qurawshısınan tek bir qurawshısı (R_{1212}) ǵárezsiz bolıp tabıladı.

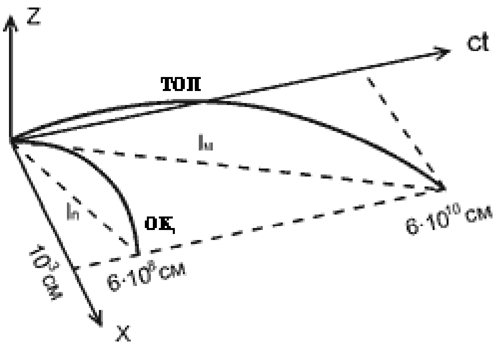
Úsh ólshemli keńislikte hár bir noqattaǵı qıysıqlıq 3 shamanıń járdeminde táriyiplenedi (R_{iklm} tenzorınıń 6 ǵárezsiz qurawshısı + koordinata sistemasın saylap alıw). Tórt ólshemli keńislikte qıysıqlıq tenzorı 20 ǵárezsiz qurawshıǵa iye hám hár bir noqatta 4 ólshemli keńisliktiń qıysıqlıǵı 14 shamanıń járdeminde táriyiplenedi (koordinata sistemasın arnap saylap alıwdıń esabınan).

Jerdiń keńislik-waqıtındaǵı qıysıqlıq. Jerdiń gravitaciyalıq maydanı menen baylanısqan qıysıqlıqtı qalay ólshewge boladı? Bul sorawǵa top penen oqtıń mısalında juwap beremiz (tómende keltirilgen súwret).



Top penen oqtıń Jerdiń tartıw maydanındaǵı traektoriyası.

Álbette birden qaraǵanda eki traektoriya bir birinen kúshli ayrıladı (eger gáp ádettegi keńisliktegi traektoriyalar haqqında aytılatuǵın bolsa). Biraq salıstırmalıq teoriyasında gáp keńislik-waqıttıń qıysıqlıǵı haqqında aytıladı. Sonlıqtan bul traektoriyalardı biz keńislik-waqıtta sáwlelendiriwimiz kerek (tómende keltirilgen súwret).



Top penen oqtıń keńislik-waqıttaǵı traektoriyası.

Belgili formulalarǵa sáykes ushıw waqıtı kóteriliw biyikligi menen bılayınsha baylanısqan:

$$t = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}. \qquad (9)$$

Bul ańlatpada g arqalı erkin túsiw tezleniwi belgilengen. Sonlıqtan oq ushın $t_p = 2 \cdot 10^{-2}$ sek, al top ushın $t_m = 2$ sek. Usı waqıt ishinde jaqtılıq sáykes $6 \cdot 10^8$ sm hám $6 \cdot 10^{10}$ sm aralıqlardı ótedi (súwrette keltirilgen). Bul aralıqlar 10 m den ádewir úlken (jerge túskennen keyingi toptıń koordinatası). Demek (x, ct) tegisliginde oq penen top ótken jollar sáykes

$$l_o \approx 6 \cdot 10^8 \text{ sm}, \; l_t \approx 6 \cdot 10^{10} \text{ sm}. \qquad (10)$$

Álbette 10 metrlik ekinshi katetti esapqa almaymız.

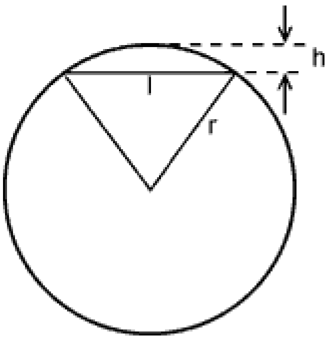
Endi qıysıqlıq radiusın mına formula boyınsha esaplaymız (súwretti qarańız)

$$r = \frac{l^2}{8h}. \tag{10}$$

Barlıq shamalardı qoyıw arqalı qıysıqlıq radiusı ushın alamız

$$r_0 = r_t \approx 10^{18}\ \text{sm} = 10^{13}\ \text{km} \approx 1\ \text{jaqtılıq jılı}. \tag{11}$$

Solay etip keńislik-waqıttağı oq penen toptıń traektoriyaları haqıyqatında da birdey eken hám ol shama menen 1 jaqtılıq jılına teń (Jer menen Quyash arasındağı qashıqlıqtan 70 mıń ese úlken).



Qıysıqlıq radiusın anıqlaw.

Bunday úlken sannıń qaydan alınatuğınlığın anıqlaw qıyın emes. Jer betinde gravitaciyalıq effektler tolığı menen erkin túsiw tezleniwi $g \approx 10^3$ sm/sek^2 járdeminde anıqlanadı. Usı shama menen jaqtılıqtıń tezligi járdeminde ólshem birligi uzınlıqtıń ólshem birligi bolǵan tek bir kombinaciyanı payda ete alamız:

$$r = \frac{c^2}{g} = c\,\frac{c}{g} \approx c \cdot 3 \cdot 10\ sek = 1\ jaqtılıq\ jılı. \tag{12}$$

Ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyasınıń geometriyalıq xarakteri. Inercial esaplaw sistemasındağı dekart koordinatalar sistemasında *ds* mına formula járdeminde anıqlanadı:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2\ . \tag{13}$$

Basqa qálegen inercial esaplaw sistemasına ótkende intervaldıń óz túrin saqlaytuğınlığın biz jaqsı bilemiz. Biraq eger biz inercial emes esaplaw sistemasına ótetuğın bolsaq, onda ds^2 shaması tórt koordinatanıń differenciallarınıń qosındısı hám kvadratlarınıń ayırması bolmaydı. Mısalı bir tekli aylanıwshı koordinatalar sistemasına ótsek

$$x = x'\cos\Omega t - y'\sin\Omega t\,,\ y = x'\sin\Omega t + y'\cos\Omega t\,,\ z = z' \tag{14}$$

(Ω arqalı z kósheri bağıtındağı aylanıwdıń múyeshlik tezligi belgilengen) interval mına túrge iye boladı:

$$ds^2 = [c^2 - \Omega^2(x'^2 + y'^2)]dt^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + 2\Omega y'dx'dt - 2\Omega x'dy'dt\,. \tag{15}$$

Waqıt qanday nızam boyınsha túrlendiriletuǵın bolsa da bul ańlatpa tórt koordinatanıń differenciallarınıń kvadratlarınıń qosındısına aylanbaydı.

Solay etip inercial emes esaplaw sistemasında intervaldıń kvadratı koordinatalardıń differenciallarınıń ulıwmalıq túriniń bazı bir kvadratlıq forması bolıp tabıladı eken, yaǵnıy mına túrge iye boladı:

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k. \tag{16}$$

Bul ańlatpadaǵı ekinshi rangalı g_{ik} tenzorı metrlik tenzor bolıp tabıladı. Ol keńisliklik x^1, x^2, x^3 koordinataları menen waqıtlıq x^0 koordinatanıń bazı bir funkciyası bolıp tabıladı. Solay etip tórt ólshemli x^0, x^1, x^2, x^3 koordinatalar sisteması inercial emes esaplaw sistemaları ushın qollanılǵanda qıysıq sızıqlı koordinatalar sisteması bolıp tabıladı. Joqarıda keltirilgen g_{ik} shamalar berilgen hár bir iymek sızıqlı koordinatalar sistemasındaǵı geometriyanıń barlıq qásiyetlerin anıqlap, bizge keńislik-waqıttıń metrikasın beredi.

Joqarıdaǵı g_{ik} shamaların i hám k indeksleri boyınsha barlıq waqıtta simmetriyalı dep qaraw kerek:

$$g_{ik} = g_{ki} \tag{17}$$

Sebebi olar (16)-simmetriyalı kvadratlıq formadan anıqlanadı. Bul ańlatpaǵa g_{ik} hám g_{ki} bir túrdegi $dx^i dx^k$ kóbeymesine kóbeytilgen halda kiredi. Ulıwma jaǵdayda 10 dana hár qıylı g_{ik} shamalarına iye bolamız (tórtewi birdey altawı hár qıylı indeksler menen). Inercial esaplaw sistemasında dekart keńisliklik koordinataların $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ hám waqıttı $x^0 = ct$ qolanǵanda g_{ik} shamaları mınalarǵa teń

$$g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1\ , i \neq k \text{ bolǵanda } g_{ik} = 0. \tag{18}$$

Usınday mánislerdegi g_{ik} ları bar tórt ólshemli koordinatalar sistemasın Galiley koordinatalar sisteması dep ataymız.

Ekvivalentlik principine muwapıq inercial emes esaplaw sistemaları bazı bir kúsh maydanlarına ekvivalent. Demek biz relyativistlik mexanikada bul maydanlardıń g_{ik} shamaları menen anıqlanatuǵınlıǵın kóremiz.

Usı aytılǵanlar haqıyqıy gravitaciyalıq maydanǵa da tiyisli boladı. Qálegen gravitaciya maydanı keńislik-waqıttıń metrikasınıń ózgerisi sıpatında anıqlanadı (demek g_{ik} shamaları járdeminde anıqlanadı). Bul oǵada áhmiyetli juwmaq bolıp tabıladı hám onıń mánisi mınadan ibarat: keńislik-waqıttıń geometriyalıq qásiyetleri (onıń metrikası) fizikalıq qubılıslar menen anıqlanadı, al keńislik penen waqıttıń ózgermeytuǵın jáne barlıq waqıtlar ushın berilgen turaqlı qásiyeti bolıp tabılmaydı.

Salıstırmalıq teoriyası tiykarında qurılǵan (dóretilgen) gravitaciyalıq maydanlar teoriyasın ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyası dep ataymız. Bul teoriya bakalavr jumısınıń kirisiw bóliminde aytılıp ótilgenindey Albert Eynshteyn tárepinen dóretilgen (1915-jılı tolıq dóretildi) hám usı waqıtqa shekem dóretilgen fizikalıq teoriyalardıń eń sulıwı bolıp tabıladı. Bul teoriya Eynshteyn tárepinen deduktivlik usıllar tiykarında dóretildi hám keyninen astronomiyalıq baqlawlarda durıslıǵı tastıyıqlandı.

Paydalanılǵan ádebiyatlar dizimi

1. Hugh D. Young, Roger A. Freedman,cjntributing autor A.Lewis Ford. University Physics with modern Physics. 13th Edition. Addison-Wesley. 1598 p.
(p. 1223-1260).

2. L.D.Landau, E.M.Lifshic. Teoretiчeskaya fizika. Uчebnoe posobie dlya vuzov. V. 10 t. Tom II. Teoriya polya. 8-e izdanie. Izdatelstvo "FIZMATLIT". Moskva. 2003. 536 s.
Glava X. §§ 81-83.
3. Benjamin Crowell. Spesial Relativity. www.lightandmatter.com, rev. February 11, 2016.
4. Lewis Ryder. Introduction to General Relativity. Cambridge University Press. 2009. 441 p.

6-lekciya. Gravitaciyalıq maydan teńlemeleri. Gravitaciyalıq maydanda qozǵalıwshı materiallıq noqattıń qozǵalıs teńlemesi

Gravitaciya teoriyasınıń teńlemeleri sisteması. Salıstırmalıq teoriyası tiykarında qurılǵan gravitaciyalıq maydanlar teoriyasın ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyası dep ataymız.

Biz usı jerde Eynshteyn tárepinen 1915-jılı tolıq dúzilgen gravitaciya maydanınıń teńlemelerin jazıp ótemiz. Ol mına túrge iye boladı:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik}.$$

Bul teńlemeler sisteması (on dana sızıqlı emes teńlemeler sisteması) aralas qurawshılarda bılay jazıladı

$$R_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k R = \frac{8\pi k}{c^4} T_i^k.$$

Bul teńlemeler ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyasınıń tiykarǵı teńlemeleri – gravitaciya maydanınıń teńlemeleri bolıp tabıladı. Bul teńlemelerdegi simmetriyalı R_{ik} tenzorı ($R_{ik} = R_{ki}$) Rishshi tenzorı, $R = g^{ik} R_{ik} = g^{il} g^{km} R_{iklm}$ tenzorı keńisliktiń skalyar qıysıqlıǵı, T_{ik} energiya-impuls tenzorı dep ataladı.

Eger Internet tarmaǵındaǵı Vikipediya universallıq enciklopediyasına itibar beretuǵın bolsaq, onda biz "Uravneniya Eynshteyna" atlı maqalada tómendegilerdi oqıymız:

Eynshteyn teńlemeleri (geypara jaǵdaylarda "Eynshteyn-Gilbert teńlemeleri" ataması da ushırasadı) ulıwma salıstırmalıq teoriyasındaǵı mayısqan keńislik-waqıttıń metrikasın usı keńislik-waqıtta jaylasqan materiyanıń qásiyetleri menen baylanıstıratuǵın gravitaciyalıq maydannıń teńlemeleri bolıp tabıladı. Termin birlik seplewde de paydalanıladı. Sebebi bul tenzorlıq túrde jazǵanda bir teńleme bolıp tabıladı, al qurawshılarda bolsa teńlemeler sistemasınan turadı.

Teńleme mınaday túrge iye boladı:

$$R_{ab} - \frac{R}{2} g_{ab} + \Lambda g_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}$$

hám bul teńlemede R_{ab} arqalı keńislik-waqıttıń qıysıqlıǵı tórtinshi rangalı R_{abcd} tenzorınan indekslerdiń jubınıń svertkası nátiyjesinde alınadı, R arqalı skalyar qıysıqlıq (yaǵnıy svertkalanǵan Rishshi tenzorı), g_{ab} arqalı metrlik tenzor, Λ arqalı kosmologiyalıq turaqlı (kóp sanlı avtorlar λ arqalı da belgileydi), al T_{ab} arqalı materiyanıń energiya-impuls tenzorı belgilengen. Teńlemelerge kiriwshi barlıq tenzorları simmetriyalıq tenzorlar bolǵanlıqtan tórt ólshemli keńislik-waqıtta olar 4·(4+1)/2=10 dana skalyar teńlemelerge teń kúshke iye.

x^{μ} koordinatalar sistemasında qıysıqlıq tenzorınıń qurawshıları

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = dx^{\rho}\left(R(\partial_{\mu},\partial_{\nu})\partial_{\sigma}\right)$$

ańlatpasınıń járdeminde anıqlanadı. Bul ańlatpada $\partial_{\mu} = \partial / \partial x^{\mu}$ arqalı hár bir noqatta x^{μ} koordinatalıq sızıqqa urınba bağıtında bağıtlanǵan vektorlıq maydan belgilengen. Kristoffel simvolları termininde qıysıqlıq tenzorın mına túrde jazamız:

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}.$$

Eynshteyn teńlemeleriniń eń áhmiyetli qásiyetleriniń biri olardıń sızıqlı emesliginde. Sonlıqtan olardı superpoziciya principin sheshkende qollanıwǵa bolmaydı.

1917-jılı Eynshteyn joqarıda keltirilgen eki teńlemeni kosmologiyalıq máselelerdi sheshiw (tutas Álem) ushın paydalandı hám Álemniń stacionarlıǵın (waqıttan ǵárezsizligin) támiyinlew ushın teńlemege Λg_{ik} qosımsha aǵzasın qostı hám mına túrge endirdi

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik} + \Lambda g_{ik}. \qquad (1)$$

Biz gravitaciya maydanı teńlemesine kosmologiya turaqlısın qosqanlıǵın Eynshteyn «ómirinde jiberilgen eń úlken qátelik» dep daǵazalaǵanlıǵın atap ótemiz. Biraq waqıttıń ótiwi menen Λ turaqlısınıń fizika ilimindegi áhmiyeti arttı. Házirgi waqıtlardaǵı fizika bul shamanı vakuumnıń energiyası menen baylanıstıradı.

Joqarıdaǵı teńlemedegi Λ shamasın kosmologiyalıq turaqlı (kosmologiya turaqlısı) dep ataydı. Házirgi waqıtları gravitaciya maydanınıń teńlemesi kópshilik jaǵdaylarda Λ shaması menen jazıladı hám kópshilik astrofizikalıq máseleler sol teńlemelerdi sheshiw menen sheshiledi.

Potencialı $\varphi << c^2$ bolǵan ázzi gravitaciyalıq maydanda keńislik-waqıttıń metrikası mına túrge iye boladı:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right)c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Nyutonlıq jaqınlasıwında hám qozǵalıstıń xarakteri relyativistlik emes bolǵanda $2\varphi/c^2$ aǵzasın hám sonıń menen birge ápiwayı qawsırmadaǵı shamalardı esapqa almawǵa boladı. Biraq jaqtılıq ushın bunı islew múmkin emes.

Eynshteyn teńlemesin sheshiw degenimiz keńislik-waqıttıń metrlik tenzorı $g_{\mu\nu}$ nıń túrin tabıw degen sóz. Teńlemeni sheshiw ushın shegaralıq shártler, koordinatalıq shártler hám energiya-impuls tenzorı bolǵan $T_{\mu\nu}$ tenzorın jazıw menen ámelge asırıladı. $T_{\mu\nu}$ tenzorı noqatlıq massaǵa iye obъektti, tarqalǵan materiyanı yamasa energiyanı, sonıń menen birge tutası menen alınǵan barlıq Álemdi de táriyiplewi múmkin. Energiya-impuls tenzorınıń túrine baylanıslı Eynshteyn teńlemesiniń sheshimlerin vakuumlıq, maydanlıq, tarqalǵan, kosmologiyalıq hám tolqınlıq dep túrlerge bóledi. Usınıń menen bir qatarda sheshimlerdiń matematikalıq klassifikaciyaları da orın alǵan.

Endi bóleksheniń gravitaciya maydandaǵı qozǵalısın qaraymız. Ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyası boyınsha bóleksheniń dúnyalıq sızıǵı geodeziyalıq penen sáykes keledi (biz «Geodeziyalıq sızıq» sózleriniń ornına «geodeziyalıq» sózin paydalanamız). Basqa sóz benen aytqanda 4 keńisliktegi («4 keńislik» termin sıpatında qabıl etilgen, ol 4 ólshemli Minkovskiy keńislik-waqıtına sáykes keledi) minimallıq yamasa maksimallıq «uzınlıqqa» iye x^0, x^1, x^2, x^3

sızığına sáykes keledi. Gravitaciya maydanı bar bolsa keńislik-waqıt Galileylik emes bolǵanlıqtan bul sızıq Evklidlik mániste tuwrı sızıq bolmaydı hám bólekshenií haqıyqıy keńisliklik qozǵalısı teń ólshewli emes hám tuwrı sızıqlı emes boladı. Solay etip ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyasında gravitaciyalıq maydandaǵı bólekshenií keńisliklik traektoriyasınıń qıysayıwı Nyuton teoriyasındaǵı tartılıs kúshiniń tásiri emes, al keńislik-waqıttıń óziniń qıysıqlıǵı bolıp tabıladı. Bul qıysıq keńislik-waqıtta bólekshe barlıq waqıtta da eń qısqa jol (onıń «kóz-qarası» boyınsha) jol (onıń «túsinigi» boyınsha tuwrı), yaǵnıy geodeziyalıq boyınsha qozǵaladı. 1 hám 2 bolǵan dúnyalıq noqatlar arasındaǵı dúnyalıq sızıqtıń uzınlıǵı intervaldıń shaması boyınsha anıqlanadı

$$s = \int_1^2 ds.$$

Ázzi gravitaciya maydanında hám bólekshenií tezligi v jaqtılıqtıń tezliginen kishi bolǵanda sheksiz kishi interval

$$\mathrm{ds}^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{\mathrm{c}^2}\right)\mathrm{c}^2\mathrm{dt}^2 - \left(1 - \frac{2\phi}{\mathrm{c}^2}\right)(\mathrm{dx}^2 + \mathrm{dy}^2 + \mathrm{dz}^2)$$

ańlatpası boyınsha anıqlanadı. Sonlıqtan shekli ósim ushın

$$s - c\int_1^2 dt\sqrt{1 + \frac{2\varphi}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}} \approx \int_{t_1}^{t_2} dt\left(1 + \frac{\varphi}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

shamasına iye bolamız. s shamasınıń ekstremallıǵı bólekshenií tómendegi integraldıń ekstremumın támiyinlewshi traektoriya boyınsha kozǵalatuǵınlıǵın bildiredi

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\left(\frac{\varphi^2}{2} - \varphi\right).$$

$T = mv^2/2$ hám $U = m\varphi$ bolǵanlıqtan (birinshisi bólekshenií kinetikalıq energiyası, al ekinshisi potencial energiya) klassikalıq mexanikadaǵı eń kishi tásir principine sáykes keledi (rus tilindegi «princip naimenshego deystviya» názerde tutılmaqta). Bul princip boyınsha bólekshenií traektoriyası mına integraldıń ekstremum shárti

$$\mathrm{S} = \int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} \mathrm{dt}(\mathrm{T} - \mathrm{U})$$

boyınsha anıqlanadı. Bul integraldı mexanikada (pútkil fizikada) "háreket" ("deystvie") dep ataladı. Nyutonnıń II nızamınıń bul ulıwmalıq principtiń nátiyjesi ekenligin kórsetiwge boladı. Jaqtılıq bolsa (materiallıq bóleksheleren parqı) dúnyalıq sızıq boyınsha tarqaladı. Onıń ushın interval $ds = 0$. Demek Eynshteynnıń geometriyalıq teoriyasınıń mánisin tómendegidey úsh jaǵday túrinde túsiniw kerek eken:

a) Geodeziyalıq sızıqlar lokallıq jaqtan tuwrı sızıqlar;

b) Keńislik-waqıttıń úlken oblastlarında dáslep qashıqlasatuǵın, al keyin keńislik-waqıttıń kıysıqlıǵı menen anıqlanatuǵın tezlik penen jaqınlasatuǵın geodeziyalıq sızıqlar geometriyanıń materiyaǵa tásiri hám házirgi waqıtları biz aytıp júrgen «tartısıw» bolıp tabıladı;

c) Materiya óz gezeginde ózi jaylasqan geometriyanı (belgili bir geometriyaǵa iye keńislik-waqıttı) deformaciyalaydı.

Ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyasındağı qozğalıs teńlemesi. Nyuton mexanikasındağı bólekshelerdiń qozğalısına gravitaciyalıq maydannıń qalayınsha tásir etetuğınlığı jaqsı izertlengen. Bunday jağdayda qozğalıs teńlemesiniń shep tárepinde izertlenip atırğan bóleksheniń tezleniwiniń usı bóleksheniń massasına kóbeymesi turadı (bul jağdayda inert massa turadı). Al teńlemeniń oń tárepinde bolsa gravitaciyalıq kúshtiń shaması jazıladı:

$$m_{inert}\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-G\frac{m_{grav}M}{r^3}\mathbf{r}.$$

Ekvivalentlik principine sáykes deneniń inert massası onıń gravitaciyalıq massasına teń bolğanlıqtan izertlenip atırğan bóleksheniń qozğalısı onıń massasınan ğárezli emes, yağnıy barlıq deneler gravitaciya maydanında birdey bolıp qozğaladı.

A.Eynshteynniń gravitaciya teoriyasında bolsa gravitaciyalıq kúshtiń ornın keńislik-waqıttıń qıysıqlığı iyeleydi. Gravitaciyalıq maydandağı qozğalıs qıysayğan keńisliktegi qozğalıs bolıp tabıladı, al tuwrı sızıq boyınsha qozğalıstan awısıw qıysayğan keńislik-waqıtta júzege keletuğın tuwrı sızıqtan awısıw bolıp tabıladı.

Endi arnawlı salıstırmalıq teoriyasındağı qozğalıs teńlemesiniń qanday bolatuğınlığın kórip ótemiz.

Arnawlı salıstırmalıq teoriyasında izertlenip atırğan bóleksheniń qozğalıs teńlemesi bılayınsha jazıladı:

$$m_{inert}c^2\frac{du^a}{ds}=F^{\alpha}. \tag{2}$$

Bul ańlatpada u^a arqalı bóleksheniń 4 ólshemli (4 tezligi) tezligi (bul fizikalıq anıqlama) yamasa bólekshenıń traektoriyasına urınba vektor (bul matematikalıq anıqlama) belgilengen. u^a shamasınıń ólshem birliginiń joq, al ds shamasınıń [sm] ólshem birligine iye ekenligin atap ótemiz. Basqa sóz benen aytqanda joqarıdağı teńliktiń shep tárepinde sm/sek^2 ólshem birligine iye shama turıptı.

Elektronnıń elektromagnit maydanındağı qozğalıs teńlemesi

$$m_e c^2\frac{du^a}{ds}=eF^{\alpha\beta}u_{\beta} \tag{3}$$

túrine iye boladı. Teńlemeniń shep tárepinde turğan kúsh $F^{\alpha\beta}$ Maksvell tenzorınan quralğan 4 invariant Lorenc kúshi bolıp tabıladı.

Tásir etiwshi kúshler nolge teń bolsa, yağnıy $F^{\alpha}=0$ teńligi orınlanğanda bólekseniń qozğalısı inerciya boyınsha boladı. Bunday jağdayda (2)-teńlemeniń sheshimi

$$u^{\alpha}(s)=u_0^{\alpha}, \tag{4}$$

$$x^{\alpha}(s)=u^{\alpha}\cdot s=x_0^{\alpha} \tag{5}$$

túrine iye boladı. Inerciya boyınsha qozğalıs tuwrı sızıq boyınsha qozğalıs bolıp tabıladı. Al Evklid hám psevdoevklid geometriyasında tuwrı sızıq dep eki noqat arasındağı eń qısqa sızıqtı aytadı. Evklidlik emes geometriyalarda eń qısqa uzınlıqqa iye sızıqtı geodeziyalıq sızıq (yamasa geodeziyalıq) dep ataydı. Sırttan tásir etetuğın kúshlerdiń qosındısı nolge teń bolğan jağdaydağı qozğalıs evklidlik emes geometriyada ulıwmalıq kovariant teńleme – geodeziyalıq sızıq penen almastırıladı.

Eger u^a fotonnıń tarqalıw bağıtındağı birlik vektor, al s traektoriya boyınsha afinlik parametr bolsa, onda (4)-teńleme fotonnıń qozğalısın táriyipleydi.

Geodeziyalıq sızıqlar boyınsha qozǵalıs gravitaciyalıq maydandaǵı izertlenip atırǵan bólekshenіń qozǵalısın táriyipleydi. Bul qozǵalıs evklidlik metrikaǵa iye keńisliktegi inerciya boyınsha qozǵalıstıń analogı bolıp tabıladı.

(1)-teńlemeniń kovariantlıq ulıwmalastırılıwın jazıw arqalı gravitaciya maydanındaǵı qozǵalıs teńlemesin jazamız:

$$m_{inert} c^2 \frac{Du^\mu}{ds} = F^\mu. \tag{6}$$

Bul ańlatpada D arqalı kovariantlıq differencialdıń belgisi ańlatılǵan. Sonlıqtan gravitaciya teoriyasında qozǵalıs teńlemesin tolıǵıraq

$$m_{inert} c^2 \frac{du^\mu}{ds} + m_{inert} c^2 \Gamma^{\alpha\beta}_{\mu} u^\alpha u^\beta = F^\mu \tag{7}$$

túrinde jazamız. Bul ańlatpada $\Gamma^{\alpha\beta}_{\mu}$ arqalı Kristoffel (Elvin Bruno Kristoffel, Elwin Bruno Christoffel, 1829—1900, nemis matematigi) simvolları belgilengen. Endi qozǵalıs teńlemesi tezlikler boyınsha sızıqlı bolıwdan qaldı, teńlemedegi shep táreptegi ekinshi aǵza tezliklerdiń kvadratlıq kóbeymesine iye.

Biz Kristoffel simvollarınıń qıysıqlıq tenzorınıń ańlatpasında payda bolatuǵınlıǵın, biraq simvollardıń ózleriniń tenzor bolıp tabılmaytuǵınlıǵın atap ótemiz. Biz Kristoffel simvolların kompyuterde esaplawdıń usılın tómende keltiremiz hám sonıń menen birge I hám II áwlad Kristoffel simvollarınıń bar ekenligin atap ótemiz.

Demek elektronnıń elektromagnit maydanındaǵı qozǵalıs teńlemesi

$$m_e c^2 \frac{Du^\alpha}{ds} = eF^{\alpha\beta} u_\beta \tag{8}$$

túrine iye boladı eken. Bul ańlatpada $F^{\alpha\beta}$ arqalı elektromagnit maydannıń tenzorı, al m_e menen e arqalı elektronnıń sáykes massası menen zaryadı belgilengen.

Endi sırtqı kúshler bolmaǵanda (yaǵnıy $F^\alpha = 0$ teńligi orınlanǵanda) izertlenip atırǵan bólekshenіń qozǵalısınıń evkilid geometriyasındaǵıday tuwrı sızıq boyınsha bolmaytuǵınlıǵı atap ótemiz. Sırtqı kúshler bolmaǵan jaǵdaydaǵı qozǵalıstı barlıq tórt koordinata ushın dúzilgen ekinshi tártipli differencial teńlemeler sisteması táriyipleydi. Olar izertlenip atırǵan bólekshenіń tórt ólshemli traektoriyasın táriyipleydi.

Paydalanılǵan ádebiyatlar dizimi

1. L.D.Landau, E.M.Lifshic. Teoretiчeskaya fizika. Uчebnoe posobie dlya vuzov. V. 10 t. Tom II. Teoriya polya. 8-e izdanie. Izdatelstvo "FIZMATLIT". Moskva. 2003. 536 s.
Glava XI. §§ 91-95.

2. Lewis Ryder. Introduction to General Relativity. Cambridge University Press. 2009. 441 p.

7-lekciya. Merkuriy planetasınıń perigeliyiniń awısıwı. Quyashtıń gravitaciyalıq maydanındaǵı jaqtılıq nurınıń baǵıtınıń ózgerisi. Gravitaciyalıq qızılǵa awısıw

Merkuriy planetası hám onıń orbitalıq qozǵalısındaǵı anomaliya. Quyash sistemasınıń planetalarınıń ishinde Merkuriy Quyashqa eń jaqın jaylasqan hám ɵlshemleri boyınsha da eń kishi planeta bolıp tabıladı. Usı jaǵdaylarǵa baylanıslı ol astronomlar ushın "úlken qıyınshılıq tuwdıratuǵın" planeta bolıp tabıladı. Tariyxıy maǵlıwmatlar boyınsha Kopernik "men Merkuriydi hesh qashan kɵrmedim" dep bir neshe aytqan.

Merkuriy menen Quyash arasındaǵı ortasha qashıqlıq Jer orbitasınıń diametriniń 0,37 shamasına teń. Merkuriydiń diametri Jerdiń diametrinen 3 ese kishi. Quyash sistemasındaǵı basqa denelerdiń tásirinde planetanıń perigeliyi, afeliyi hám ellips tárizli orbitanıń eki fokusı arqalı ɵtetuǵın úlken yarım kɵsherdiń baǵıtı (apsid sızıǵı) keńisliktegi baǵıtın ɵzgertedi. Usınıń menen bir waqıtta báhárgi kún teńlesiw noqatına baǵıtlanǵan tuwrı menen perigeliyge baǵıtlanǵan tuwrı arasındaǵı (bunı perigeliydiń uzınlıǵı dep ataydı) múyesh te ɵzgeredi. Qozǵalıs muǵdarınıń saqlanıw nızamı (impuls momentiniń saqlanıw nızamı) boyınsha planetanıń bir tegislikte qozǵalıwı kerek. Al tartılıs nızamı boyınsha planeta sol tegislikte tuyıq iymeklik (orbita) boyınsha qozǵaladı. Biraq sırtqı tásirlerdiń sebebinen (bunı ádette uyıtqıwlardıń tásirinde dep ataydı) planeta belgili dáwirden keyin ɵziniń dáslepki ornına qaytıp kelmeydi. Ellips tárizli orbitanıń Quyashqa jaqın jaylasqan noqatı (perigeliy) keńislikte awısadı.

Biz perigeliy haqqında bir qatar maǵlıwmatlardi atap ɵtemiz. Perigeliy (áyyemgi grekshe περί «peri» - átirapında, ηλιος «gelios» - Quyash) - Quyash sistemasınıń planetasınıń yamasa basqa da aspan denesiniń orbitasınıń Quyashqa eń jaqın noqatı bolıp tabıladı. Perigeliydiń antonimi afeliy termini bolıp tabıladı. Afeliy dep orbitanıń Quyashtan eń qashıq noqatın túsinemiz. Afeliy menen perigeliy arasındaǵı sızıqtı apsid sızıǵı dep ataydı.

Perigeliydiń radiusı $r_p = (1-e)a$ formulasınıń járdeminde esaplanadı. Bul formulada a arqalı orbitanıń úlken yarım kɵsheriniń mánisi, e arqalı orbitanıń ekscentriteti belgilengen.

Perigeliydiń tezligi

$$v_{per} = \sqrt{\frac{GM_{\odot}(1+e)}{a(1-e)}}$$

formulasınıń járdeminde esaplanadı. Bul formulada G arqalı gravitaciyalıq turaqlı, $M_{\odot}$ arqalı Quyashtıń massası belgilengen.

Jerdiń perigeliyi 147 098 291 km ge teń. Bul shama Quyash penen Jer arasındaǵı qashıqlıqtan shama menen 2,5 million km ge kishi. Jer perigeliy arqalı 2-5 yanvar kúni ɵtedi (eń qısqa kúnnen keyin ortasha 13 kúnnen soń).

Amerika Qurama SHtatlarındaǵı NASA agentliginiń informaciyası boyınsha Quyash sistemasınıń perigeliyleriniń mánisleri tɵmendegilerden ibarat: Merkuriy – 46 001 009 km, Venera - 107 476 170 km, Mars - 206 655 215 km, YUpiter – 740 679 815 km, Saturn – 1 349 823 615 km, Uran – 2 734 998 229 km, Neptun – 4 459 753 056 km.

1-kestede Quyash sistemasınıń ayırım planetaları ushın perigeliydiń ásirlik awısıwlarınıń (precessiyalarınıń) mánisleri keltirilgen.

1-keste.

Geypara aspan deneleriniń perigeliyleriniń awısıwı (precessiyaları)
(múyeshlik sekundlardaǵı mánisleri)

Perigeliydiń júz jıl dawamındaǵı qosımsha awısıwları	Teoriyalıq mánis	Baqlawlardıń nátiyjeleri
Merkuriy	43	43,1 ± 0,5
Venera	8,6	8,4 ± 4,8
Jer	3,8	5,0 ± 1,2
Mars	1,35	1,1 ± 0,3

1-kestede keltirilgen maǵlıwmatlar astronomiya iliminiń qanday dál ilimge aylanǵanlıǵın hám perigeliydiń awısıwınıń Quyashqa jaqın planetalarda úlken mániske iye ekenligin ayqın túrde kөrsetedi. Sonıń menen birge Jer menen Venera ushın keltilirgen maǵlıwmatlardaǵı salıstırmalı úlken qátelik (mısalı Venera ushın 8,4 ± 4,8) bul planetalardıń orbitalarınıń derlik sheńber tárizli ekenligi menen baylanıslı.

Biz XVII hám XVIII ásirlerdiń astronomlarınıń Merkuriy planetasınıń qozǵalıs teoriyasın dөretiw ushın өtkergen baqlawlarınıń jetkilikli dárejede dál emes ekenligin moyınlaǵanın atap өtemiz. Biraq hátte XIX ásirdiń basında bul "úlken emes" planetanıń qozǵalısı dál boljawlarǵa "baǵınbadı". Francuz astronomı Urben Jan Jozef Levere [francuzsha Urbain Jean Joseph Le Verrier, (1811-1877), aspan mexanikası máseleleri menen shuǵıllanǵan francuz matematigi, өziniń өmiriniń kөpshilik bөliminde Parij observatoriyasında islegen] өziniń astronom sıpatındaǵı jumısların Nyutonnıń pútkil dúnyalıq tartılıs nızamın paydalanıw tiykarında Merkuriy planetasınıń qozǵalıs teoriyasın izertlewden basladı. Ol 1811-jılı tuwılǵan hám 1854-jılı Parij observatoriyasınıń direktorı bolıp tayınlanǵan. Өziniń xızmet babındaǵı wazıypaların orınlawda Levere observatoriya xızmetkerleriniń kewilinen shıqpaǵan. Sonlıqtan kөp uzamay onıń ornın basqa astronom SHarl Delone iyelegen. Biraq lawazımnan bosaw ullı astronomnıń jumısına tásirin tiygizbegen. Delone qaytıs bolǵannan keyin 1873-jılı Levere qaytadan Parij observatoriyasınıń direktorı lawazımına tayarlanǵan hám bul lawazımda ol 1877-jılı qaytıs bolǵanǵa shekem islegen.

Merkuriydiń qozǵalısınıń onsha sátli bolmaǵan teoriyasınıń birinshi variantın Levere 1843-jılı usınıldı. Sol dáwirlerdegi eń jetilisken hám dál bolǵan baqlaw maǵlıwmatların paydalanıw jolı menen teoriyanı qaytadan qarap shıǵıwdıń barısında ol jáne bir mashqalanıń bar ekenligin anıqladı hám onı eń baslı mashqala dep esapladı. 1859-jılı ol Merkuriy planetasınıń perigeliyiniń anomallıq tuwrı awısıwınıń orın alatuǵınlıǵın taptı. Bul awısıw teoriyalıq boljawlar menen baqlaw nátiyjeleriniń arasındaǵı ayırmanıń payda bolıwına alıp kelgen.

1859-jılı shıqqan maqalalarında Neptun planetasın ashqanlardıń biri U.Levere 1846-jılı Merkuriy planetasınıń perigeliyiniń teoriyalıq jollar menen alınǵan shamadan tezirek jılısatuǵınlıǵın (awısatuǵının) ashqanlıǵın járiyaladı. Өziniń esaplawlarında Levere barlıq planetalardıń Merkuriydiń qozǵalısına tásirin esapqa alǵan. 2-kestede Levere tárepinen esaplanǵan sol tásirler astında Merkuriydiń perigeliyiniń qansha shamaǵa burılatuǵını keltirilgen.

2-keste.

Merkuriy planetasınıń perigeliyiniń awısıwına basqa planetalardıń tásiri

Planeta	Merkuriydiń perigeliyiniń burılıwına qosqan úlesi (júz jıl ishindegi múyeshlik sekundlardaǵı burılıw)
Venera	280,6
Jer	83,6
Mars	2,6
YUpiter	152,6
Saturn	7,2
Uran	0,1

Levere teoriyası boyınsha Merkuriydiń perigeliyi 100 jıl dawamında 526,7'' shamaǵa awısıwı kerek edi. Biraq úlken dállikte өtkerilgen beqlawlar hám өlshewler bul shamanıń 570'' ekenligin kөrsetti (yaǵnıy esaplawlar nátiyjelerinen 43'' shamasına úlken).

Anomaliya máselesin sheshiw ushın kөp sanlı astronomlar tiykarınan eki tiptegi gipotezalardı usındı:

1. "Materiallıq gipotezalar": awısıw Quyashtıń qasındaǵı qanday da bir materiya menen baylanıslı.

2. Planetanıń qozǵalısına Quyashtıń formasınıń dál sferalıq emes formasınıń tásiri.

3. Nyutonnıń pútkil dúnyalıq tartılıs nızamınan basqa tartılıs nızamın izlew.

Kөp sanlı fizikler menen astronomlar perigeliydiń ásirlik awısıwı ushın oǵada kөp sanlı fizikalıq sebeplerdi tabıwǵa tırıstı. Olardıń arasında XIX ásirdegi elektrodinamika boyınsha belgili alım Vilgelm Veber, 1909-jılı qaytıs bolǵan shveycariyalı jas fizik Valter Ritc bar edi.

Merkuriy planetasınıń orbitası menen baylanıslı bolǵan mashqala XIX ásirdiń aqırındaǵı hám XX ásirdiń basındaǵı Quyash sistemasındaǵı aspan denelerin izertlegen astronomlar arasındaǵı eń baslı mashqalaǵa aylandı.

XX ásirdiń basında jańa fizika payda boldı hám rawajlana basladı. Salıstırmalıq teoriyasınıń fundamentallıq áhmiyeti kөrine basladı. Fiziklerdiń jańa áwladı nátiyjeleri baqlawlardıń nátiyjelerine sáykes keletuǵın jańa tartılıs teoriyasın dөretiw menen shuǵıllana basladı. Al 1915-jılı A.Eynshteyn өziniń ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyasın dөretiw boyınsha jumısların juwmaqladı. Bul teoriya Levere hám basqa da astronomlar tapqan perigeliylerdiń awısıwın ayqın túrde túsindire aldı. Ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyası Merkuriydiń perigeliyiniń awısıwın túsindiriw maqsetinde dөretilgen kөplegen teoriyalardı biykarladı. Al keyinirek Merkuriydiń perigeliyiniń anomallıq awısıwın ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyasın hám onıń menen konkurenciyaǵa túsken R.Dikke tárepinen dөretilgen alternativlik skalyarlıq-tenzorlıq teoriyanıń durıslıǵın tekserip kөriw ushın paydalanıldı.

Relyativistlik emes fizika ilimindegi Kepler máselesi. Eger Vikipediya sıyaqlı universallıq enciklopediyaǵa itibar berip qarasaq, onda Kepler máselesiniń bir biri menen gravitaciya arqalı tásirlesetuǵın sferalıq simmetriyaǵa iye eki deneniń qozǵalısın tabıw máselesi bolıp tabıladı. Klassikalıq tartılıs teoriyasında bul mashqalanıń sheshimin Isaak Nyutonnıń өzi tapqan: deneler konuslıq kesimler boyınsha qozǵaladı, al bul konuslıq kesimler baslanǵısh shártlerge baylanıslı ellips, parabola yamasa giperbola tárizli bolıwı múmkin. Ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyası boyınsha bul máseleniń өzi "jaman" qoyılǵan másele bolıp tabıladı. Sebebi relyativistlik fizikada absolyut qattı deneniń orın alıwı múmkin emes. Al absolyut qattı emes deneler bir biri menen tásirleskende sferalıq simmetriyaǵa iye bolmaydı. Sonlıqtan geypara jaǵdaylarda noqatlıq denelerge өtiwge tuwrı keledi. Biraq bunday denelerdi Nyuton mexanikasında paydalanıw múmkin bolsa da, ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyasında bir qatar mashqalalardı payda etedi. Usınıń menen bir qatarda denelerdiń baslanǵısh orınları menen tezliklerin beriw menen birge barlıq keńisliktegi baslanǵısh gravitaciyalıq maydandı da beriw kerek boladı (bunı ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyasındaǵı baslanǵısh shártler mashqalası dep ataydı). Bul jaǵdaylar ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyasında Kepler máselesiniń dál analitikalıq sheshiminiń joq ekenligin bildiredi. Tap usınday másele sıpatında Nyutonnıń tartılıs nızamındaǵı úsh dene máselesin kөrsetiw múmkin. Biraq házirgi zaman fizikasında Kepler máselesi sheklerinde denelerdiń qozǵalısların zárúrli bolǵan dállikte esaplawdıń usıllarınıń kompleksi islep shıǵılǵan. Olardıń qatarına sınap kөriletuǵın dene jaqınlasıwı, postnyutonlıq (Nyutonnan keyingi) formalizm, sanlı ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyasın kirgiziwge boladı. Ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyasında gravitaciyalıq maydan haqqında gáp etilgende mayısqan keńislik-waqıt názerde tutıladı.

Kepler máselesi dep bir biri menen pútkil dúnyalıq tartılıs nızamı boyınsha tásirlesetuǵın eki deneniń baslanǵısh koordinatalar menen tezlikler ıqtıyarlı túrde berilgen jaǵdaydaǵı eki deneniń qozǵalısı haqqındaǵı másele bolıp tabıladı.

Máseleni sheshiwden burın klassikalıq mexanikanıń bazı bir faktleri menen qaǵıydaların eske túsiremiz hám bárshe tárepinen qabıl etilgen terminologiyanı túsindiremiz.

Háreket dep

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q}_i, q_i, t)dt \tag{1}$$

shamasına aytamız. Bul integral astındağı $L(\dot{q}_i, q_i, t)$ funkciyası q_i ulıwmalastırılğan koordinatalardıń, $\dot{q}_i$ ulıwmalastırılğan tezliklerdiń hám waqıt t nıń skalyar funkciyası bolıp tabıladı. Integrallaw t_1 menen t_2 waqıt aralığında alınadı.

Eń kishi tásir principi (Mopertyui principi[13]) boyınsha variaciyanıń járdeminde qozğalıs teńlemesi ańsat alınadı:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i\right)dt.$$

Variaciyanıń nolge teń bolıwı summanıń ağzalarınıń barlıq ağzalarınıń nolge teń bolatuğınlığın ańğartadı. Usınıń nátiyjesinde teńlemeler sistemasın alamız hám bul sistemada hár bir dene əziniń hár bir erkinlik dárejesi ushın bir birden teńlemege iye boladı. Anıqlaması boyınsha háreket anıq integral bolğanlıqtan, al integrallawdıń waqıt boyınsha shekleri mánisi boyınsha konstantalar bolğanlıqtan úshinshi ağzanıń variaciyası nolge teń boladı. Lagranj teńlemesi boyınsha $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ teńliginiń orınlanatuğınlığın esapqa alıp

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial}{\partial t}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i\right)dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q_i}\right)\delta q_i \, dt.$$

ańlatpasına iye bolamız .

Integral astındağı ağzanı bəleklerge bəlip integrallawğa boladı hám nátiyjede təmendegidey ańlatpağa iye bolamız:

$$\delta S_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \Bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right)\delta q_i dt.$$

Bul jerde de integrallanğan ağzanıń variaciyası nolge teń hám usığan sáykes integral astında turğan ańlatpa da nolge teń bolıwı kerek. Bunnan

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{2}$$

túrindegi ańlatpağa iye bolamız. Bul formulanı ilgerilemeli qozğalıs ushın da, aylanbalı qozğalıs ushın da Nyutonnıń ulıwmalastırılğan ekinshi nızamı dep atawğa boladı. Biraq alınğan ańlatpanı paydalanıw ushın $L(\dot{q}_i, q_i, t)$ funkciyasınıń túriniń qanday bolatuğınlığın biliw shárt (bul funkciyanı fizikada Lagranj funkciyası dep ataydı).

Eger dene erkin qozğalatuğın bolsa (yağnıy hesh bir tásirlesiw bolmasa) skalyar funkciyanı tek $L \sim \sum_i \dot{q}_i^2$ bolğan bir jağdayda alıw múmkin. Sebebi basqa jup dárejelerdi paydalanğan jağdayda psevdoskalyar alınadı. Demek $L = \sum_i \alpha_i \dot{q}_i^2$ túrindegi ańlatpağa iye bolamız hám ilgerilemeli qozğalıs ushın $\alpha_i = \frac{m_i}{2}$ ańlatpasın alıwımız kerek boladı. Bul ańlatpa deneniń inerciyalıq massasına anıqlama beredi. Al aylanbalı qozğalıslar izertlengende $\alpha_i = \frac{I_i}{2}$ ańlatpasın jazıwımız kerek. Bul jağdayda I_i arqalı deneniń berilgen kəsherge salıstırğandağı inerciya momenti belgilengen.

---

[13] Mopertyu principi boyınsha klassikalıq mexanikadağı konservativlik golonomlıq sistemanıń halı onıń kinetikalıq energiyasınıń kvadrat túbirinen traektoriya boyınsha alınğan integral minimallıq mániske iye bolatuğınday bolıp əzgeredi. Bul principtiń termodinamikada analogı bar: erkin energiyanıń minimum bolıw principi.

Teńlemeniń ekinshi aǵzasınıń qanday da bir skalyar funkciyası ekenligine gúmán joq. Sonlıqtan bul aǵza ulıwmalıstırılǵan kúshtiń ornın iyeleydi hám bir ɵlshemli ilgerilemeli qozǵalısta Lagranj funkciyasınıń anıq túrine $L = \frac{mv^2}{2} - U(x)$ funkciyasınıń sáykes keletuǵınlıǵın kɵrsetedi. Bul ańlatpadaǵı tek koordinatadan ǵárezli bolǵan $U(x)$ funkciyasın potencial energiya dep ataymız. Usı jaǵday ushın (2)-formulanı paydalansaq alınatuǵın teńlemeni

$$m\ddot{x} - F(x) = 0$$

túrinde jazamız hám onı Nyutonnıń ekinshi nızamı dep ataymız.

Kɵpshilik jaǵdayda Lagranj funkciyasınıń ayqın túrin tabıw hesh qanday ayrıqsha túrdegi qıyınshılıqtı payda etpeydi. Differenciallaǵannan keyin alınatuǵın teńlemeler sistemasın sheshkende quramalı jaǵdaylar payda boladı. (dekart koordinatalar sistemasında Nyutonnıń ekinshi nızamınıń teńlemeleri bolıp tabıladı). Másele sonnan ibarat, hár bir teńlemeni waqıt boyınsha eki retten integrallawǵa tuwrı keledi. Bunday matematikalıq operaciyalardı orınlaw hátte ápiwayı máselelerdi sheshkende de ádewir qıyınshılıqlardı payda etedi. Bunday mashqaladan shıǵıwdıń eń standart usıllarınıń biri alınǵan sistemadaǵı qanday da bir simmetriyanı (yamasa simmetriyalardı) tabıwdan ibarat. Geypara jaǵdaylarda tek usı másele ushın tán bolǵan dara jaǵdaydaǵı simmetriyanıń orın alıwı múmkin. Al geypara jaǵdayda alınatuǵın simmetriya ulıwmalıq áhmiyetke iye boladı.

Usınday ulıwmalıq simmetriyalardıń birin waqıttan anıq túrde hesh qashan ǵárezli emes, al koordinatalar menen tezliklerden ǵárezli bolǵan Lagranj funkciyasın dıqqat penen tallaǵanda kɵriwge boladı. Eger usınday ɵzgeris ushın ayrıqsha baǵıt bolmasa waqıttan anıq túrdegi ǵárezlilik te kesent jasay almaydı (yaǵnıy potencialdıń waqıtqa ǵárezli ɵzgeriwiniń asimmetriyası menen baylanıslı bolǵan kúshtiń qosımsha qurawshıları payda bolmasa). Tábiyatta alternativlik jaǵdaylardıń bolmaytuǵınlıǵına itibar beremiz. Bunday jaǵdayda (tek usı jaǵdayda) teńlemeler sistemasın tek bir ret integrallaw hám tek baslanǵısh shártlerge baylanıslı bolǵan integrallaw konstantasın alıw múmkin:

$$\sum_i \sum_j 2\alpha_j \dot{q}_{ji}^2 - L = const = E. \tag{3}$$

Bul ańlatpada j arqalı deneniń indeksi, al i arqalı koordinatanıń indeksi belgilengen. Bul waqıttıń ɵtiwi menen baylanıslı bolǵan konstantanı sistemanıń energiyası dep ataydı. (3)-ańlatpa bolsa energiyanıń anıqlaması bolıp tabıladı. Ilgerilemeli qozǵalıs ushın ańlatpanı túsindiriw ańsat bolatuǵınday túrde jazıw múmkin:

$$\sum_i \sum_j m_j V_{ji}^2 - L = const = E.$$

Kepler máselesi orayǵa qarata simmetriyalı bolǵan maydandaǵı qozǵalıslardıń dara jaǵdayı bolıp tabıladı. Bunday qozǵalıslarda potencial energiya bir biri menen tásirlesetuǵın obъektler arasındaǵı qashıqlıqtıń skalyar funkciyası bolıp tabıladı. Eger sırttan basqa kúshler tásir etpese, onda usı denelerdiń massalarınıń orayı inerciallıq esaplaw sisteması bolıp tabıladı hám sonlıqtan onı (oraydı) koordinatalar bası dep saylap alıw qolaylı boladı. Usınıń menen birge, eger bir deneniń massasın ekinshi deneniń massasınan ádewir úlken hám onı massalar orayında tınıshlıqta tur dep esaplasaq, onda tek masshtab ǵana ɵzgeriske ushıraydı, al qozǵalıwshı deneniń traektoriyası ɵzgermeydi (bul jaǵday ɵzgeriwshilerdi sızıqlı túrde almastırıwdıń nátiyjesi bolıp tabıladı).

Oraylıq simmetriyadan kelip shıqqan halda Lagranj funkciyasın hám energiyanı polyar koordinatalarda jazǵan qolaylı:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = U(r); \;\; E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = const.$$

Úshinshi koordinataǵa itibar bermewge boladı. Sebebi bir birine salıstırǵandaǵı tezlik vektorı hám oray arqalı ɵtetuǵın jalǵız tegislikti saylap alǵanda koordinatalar saylap alınǵan tegisliktiń sheklerinen hesh waqıtta da shıǵıp ketpeydi (sebebi bul máselede usı tegislikke normal baǵıtlanǵan kúshler de, kúshlerdiń qurawshıları da joq).

Múyesh ushın jazılǵan (2)-teńleme (qozǵalıs teńlemesi) $mr^2\ddot{\varphi} = 0$ túrine iye hám waqıt boyınsha ańsat integrallanadı:

$$mr^2\dot{\varphi} = const = M. \tag{4}$$

Alınǵan M konstantası impuls momenti (qozǵalıs muǵdarınıń momenti) atamasına iye. Qozǵalıs momentiniń saqlanıw nızamı qálegen orayǵa qarata simmetriyalı maydanlar ushın orınlanatuǵınlıǵı anıq. $r^2\dot{\varphi}$ shaması bolsa traektoriyanıń maydanın basıp ɵtiw tezligi bolıp tabıladı. Sonlıqtan (4)-ańlatpa Keplerdiń II nızamınıń basqashalaw formulirovkası bolıp tabıladı.

(4)-ańlatpanı esapqa alǵan halda energiyanıń saqlanıw nızamın basqasha túrde kɵshirip jazamız:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r).$$

Bul ańlatpada

$$U_{eff}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} + U(r)$$

túrindegi belgilew qollanılǵan.

Radius boyınsha sheshim alıw ushın energiyanıń saqlanıw nızamınıń járdeminde eki ret integrallawdıń ornına bir ret integrallaw menen shekleniwge bolatuǵınlıǵın ańsat ańǵarıwǵa boladı:

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U_{eff}(r)\right]}. \tag{5}$$

Kvadrat túbirdiń aldında payda bolıwı múmkin bolǵan minustı joq etiwge boladı. Sebebi polyar koordinatalar sistemasında teris mánisli radius hesh qanday fizikalıq mániske iye bolmaydı. (4) hám (5) túrindegi jazıwlar waqıttı joq etip traektoriyanıń teńlemesin alıwǵa múmkinshilik beredi:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{M/(mr^2)}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U_{eff}(r)\right]}}$$

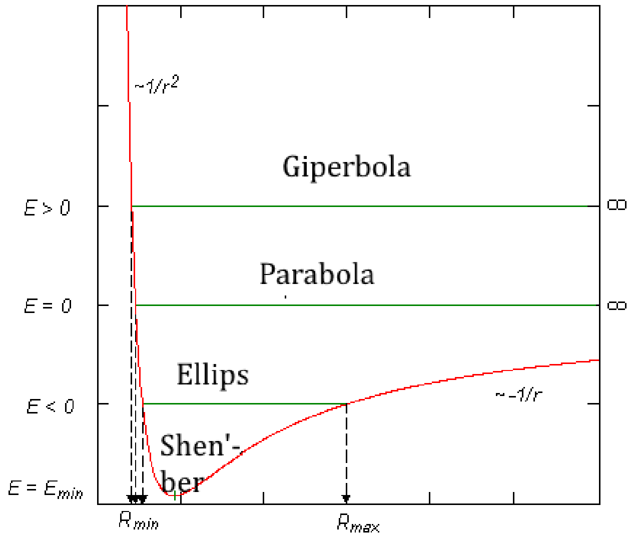
yamasa

$$\varphi = \varphi_0 + \int \frac{M\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{2m\left[E - U_{eff}(r)\right]}}. \tag{6}$$

Múmkin bolǵan traektoriyalardı tabıw ushın $U_{eff}(r)$ funkciyasınıń ayqın túrin tabıw kerek. Pútkil dúnyalıq tartılıs nızamınan gravitaciyalıq potencial $U = -a/r$ túrine iye boladı (biz $a = Gm_1m_2$ belgilewin qabıl ettik). Bunday jaǵdayda

$$U_{eff}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{a}{r} \tag{7}$$

ańlatpasın alamız. Bul formuladaǵı birinshi aǵzanı "oraydan qashıwshı potencial" dep ataydı. Bul funkciyanıń xarakterli grafigi 1-súwrette kɵrsetilgen.



1-cúwret.

$$U_{eff}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{a}{r}$$

funkciyasınıń grafigi.

1-súwrettegi iymekliktiń tɵmeninde hesh qanday sheshimniń bolmaytuǵınlıǵı anıq kɵrinip tur. Sebebi bul jaǵday $E < E_{eff}$ teńsizligine sáykes keledi, al bul jaǵday (6)-ańlatpadaǵı kvadrat túbirdiń astında turǵan shama teris mániske iye bolǵanda júzege keledi. Iymekliktiń ɵzin túsinikli faktler menen baylanıslı: kishi qashıqlıqlarda oraydan qashıwshı potencial gravitaciyalıq potencialdıń qasında baslı orındı iyeleydi. Onıń bɵlimi orayǵa shekemgi qashıqlıqtıń kvadratı menen baylanıslı. Biraq jetkilikli dárejedegi úlken qashıqlıqlarda gravitaciyalıq potencialdıń moduliniń ástelik penen kemeyiwine baylanıslı onıń tásirin esapqa almawǵa boladı. Hár qıylı belgilerdi esapqa alıw súwrette kɵrsetilgen iymekliktiń ɵzine tán xarakterli ɵzgesheliklerin ayqın túrde sáwlelendiredi.

Traektoriyalardıń principialıq jaqtan bir birinen ayrılatuǵın tɵrt túriniń bar bolıwınıń múmkin ekenligin atap aytıw kerek: $E > 0$, $E = 0$, $E < 0$ hám $E = E_{min}$. Sońǵı jaǵdayda $r = const$, yaǵnıy traektoriya sheńber bolıp tabıladı. Al impuls momentiniń saqlanıw nızamınan orbitalıq tezliktiń turaqlı ekenligin kelip shıǵadı. Biraq tábiyatta bunday traektoriyanıń júzege keliwiniń múmkinshiligi joq. Sebebi qálegen sırtqı tásir $E < 0$ bolǵan jaǵdayǵa alıp keledi.

$E > 0$ shárti úlken qashıqlıqlarda gravitaciyalıq tásirlesiwge baylanıslı bolǵan potencial energiyadan ádewir úlken bolǵan kinetikalıq energiya bolatuǵın situaciyaǵa sáykes keledi. Bunday jaǵdayda potencial energiyanı esapqa almawǵa boladı hám traektoriya infinitlik (yaǵnıy tuyıq emes hám sheklenbegen). Tek bir minimallıq jaqınlasıw noqatı bar boladı. Deneler tek bir ret jaqınlasadı hám bunnan keyin sheksizlikke ajırasıp ketedi. Sáykes keletuǵın traektoriya giperbola tárizli boladı.

$E = 0$ bolǵan parabola tárizli orbitaǵa sáykes keliwshi jaǵday $E > 0$ shárti orınlanatuǵın jaǵdaydan az ayrıladı. Bul jaǵdayda sistemanıń tolıq energiyası nolge teń. Sonlıqtan tábiyatta bunday jaǵdaydıń júzege keliwiniń itimallıǵı nolge teń.

$E < 0$ teńsizligi orınlanatuǵın jaǵday eń qızıqlı jaǵday bolıp tabıladı hám eń jaqın keliw noqatı da, eń alıslaw noqatı da orın aladı. Bul jaǵday ellips tárizli orbitaǵa sáykes keledi.

Bunday baylanısqan haldı deneler өzinshe (yaǵnıy sırttan energiya almay) өzgerte almaydı. Tap sol sıyaqlı bunday halǵa denelerdiń өz-өzinen өtiwi de múmkin emes (sistemaǵa energiya berilmeydi).

Eń aqırında orayǵa qulap túsiwdiń de múmkin emes ekenligin atap өtemiz (bunday qubılıstıń júzege keliwine oraydan qashıwshı potencial kesent beredi). Demek, eger maksimallıq jaqınlasıw noqatı bir biri menen tásirlesetuǵın obъektlerdiń radiuslarınan kishi bolǵan jaǵdaylarda ǵana denelerdiń soqlıǵısıwı múmkin. Biraq bunday jaǵdaydıń orın alıwı júdá siyrek ushırasadı.

Endi (7)-effektivlik potencialdıń anıq túrin beriw arqalı (6)-teńlemeni tuwrıdan-tuwrı integrallawǵa boladı. $u = 1/r$ өzgeriwshisin alǵan jaǵdayda (6)-teńleme

$$\varphi = \varphi_0 - \int \frac{M du}{\sqrt{2m\left[E - U_{eff}(u)\right]}}$$

túrine enedi. Integrallaw

$$\varphi = \varphi_0 + ArcCos\left(\frac{\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}}}\right)$$

ańlatpasın beredi. Quramalı bolmaǵan túrlendiriwlerden keyin alınǵan ańlatpanı bılayınsha jaza alamız:

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cdot Cos(\varphi - \varphi_0). \qquad (8)$$

Bul ańlatpada $p = M^2/m\alpha$ (parametr) hám

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$$

(ekscentrisitet) belgilewleri paydalanılǵan. Biz Merkuriy planetası ushın ekscentrisitettiń $e = 0{,}206$ shamasına teń ekenligin atap өtemiz.

Ápiwayı tallawlar mınalardı beredi: $E > 0$ bolǵan jaǵdayda $e > 1$ giperbolanı alamız. $E = 0$ bolǵan jaǵdayda $e = 1$ – parabolaǵa iye bolamız. $E < 0$ teńsizligi orınlanǵanda $e < 1$ shárti orınlanatuǵın ellipsti alamız. Usınıń menen bir qatarda sheklik jaǵday da bar. Bunday jaǵdayda $E = -m\alpha^2/2M^2$ teńligi orınlanadı hám ekscentrisitet ushın $e = 0$ mánisin alamız. Bul sheńber tárizli traektoriyaǵa sáykes keledi.

Ellips tárizli traektoriya jaǵdayında

$$r_{min} = \frac{p}{1+e} \ \ hám \ \ r_{max} = p/(1-e)$$

teńlikleri orın aladı. Demek úlken yarım kөsher ushın

$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\alpha}{2|E|},$$

al kishi yarım kөsher ushın

$$b = a\sqrt{1-e^2} = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}$$

ańlatpaların alamız.

Impuls momentiniń saqlanıw nızamı, atap aytqanda radius-vektordıń basıp өtiw tezliginiń turaqlılıǵınan [(4)-formula] ellipstiń maydanın esaplaw múmkin: $\varphi = M/2m$, biraq T waqıtı ishinde barlıq maydannıń basıp ɵtiliwi kerek. Demek $S = MT/2m$. Ekinshi tárepten ellipstiń maydanı $S = \pi ab$ shamasına teń. Bunnan aylanıw dáwiri ushın

$$T = \frac{\pi ab2m}{M} = \frac{2\pi\sqrt{m}}{\sqrt{\alpha}}a^{3/2} = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}$$

teńligine iye bolamız. Bul ańlatpa Keplerdiń úshinshi nızamına sáykes keledi.

Koordinatalardıń waqıttan ǵárezligin tabıw bılayınsha ámelge asırıladı:

Impuls momentiniń saqlanıw nızamın

$$M = mr^2\dot{\varphi} = const \tag{9}$$

túrinde jazamız. Bul ańlatpadan $\dot{\varphi}$ shamasın M arqalı ańlatıp hám energiya ushın jazılǵan ańlatpaǵa qoyıp

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) \tag{10}$$

ańlatpalarına iye bolamız. Bunnan

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2}} \tag{11}$$

yamasa ɵzgeriwshilerdi ajıratıp hám integrallap waqıt ushın

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2}}} + \text{const} \tag{12}$$

ańlatpasın alamız. Bunnan keyin (9)-teńlemeni

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2}\,dt$$

túrinde jazıp hám bul ańlatpaǵa (11)-ańlatpadan dt shamasın qoyıp hám integrallap

$$\varphi = \int \frac{(M/r^2)\,dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - M^2/r^2}} + \text{const} \tag{13}$$

formulasına iye bolamız.

(12)- hám (13)-formulalar ulıwma túrde qoyılǵan máseleni sheshedi. (13)-ańlatpa $\boldsymbol{r}$ menen φ arasındaǵı baylanıstı anıqlaydı. (12)-ańlatpa bolsa oraydın qozǵalatuǵın noqatqa shekemgi qashıqlıq r di waqıttıń anıq emes funkciyası sıpatında anıqlaydı. φ múyeshiniń waqıttıń ɵtiwi menen monotonlı ɵzgeretuǵınlıǵın atap ɵtemiz. (9)-ańlatpadan $\dot{\varphi}$ shamasınıń hesh qashan belgisin ɵzgertpeytuǵını kɵrinip tur.

(10)-ańlatpa qozǵalıstıń radiallıq bɵlimin

$$U_{эф} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} \tag{14}$$

shamasına teń "effektivlik" potencial energiyası bar maydandaǵı bir ɵlshemli qozǵalıs sıpatında qarawǵa bolatuǵınlıǵın kɵrsetedi. $M^2/(2mr^2)$ shamasın oraydın qashıwshı energiya dep ataymız.

$$U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} = E \tag{15}$$

teńligi orınlanatuǵın r diń mánisi oraydan qashıqlıǵı boyınsha qozǵalıs oblastınıń shegarasın anıqlaydı. (15)-teńlik orınlanǵanda radiallıq tezlik $\dot{\varphi}$ nolge aylanadı. Bul jaǵday haqıyqıy bir ǝlshemli qozǵalıstaǵıday bǝleksheniń toqtaǵanın ańlatpaydı. Sebebi múyeshlik tezlik $\dot{\varphi}$ nolge teń bolmaydı. $\dot{r} = 0$ teńligi traektoriyanıń "burılıw noqatın" ańǵartadı. Bunday noqatta $r(t)$ funkciyası ǝsiwden kemeyiwge yamasa kemeyiwden ǝsiwge ǝtedi.

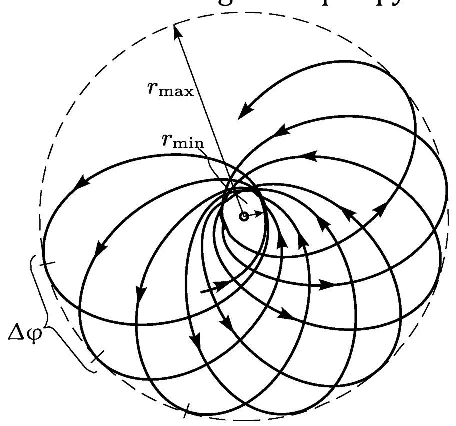
Eger r diń ǝzgeriwiniń múmkin bolǵan oblastı tek $r \geq r_{min}$ shárti menen sheklengen bolsa, onda bǝleksheniń qozǵalısı infinitlik boladı. Bǝleksheniń traektoriyası sheksizlikten keledi hám sheksizlikke ketedi.

Eger r diń ǝzgeriwiniń múmkin bolǵan oblastı r_{min} hám r_{max} shamalarına teń eki shegaraǵa iye bolsa, onda finitlik qozǵalısqa iye bolamız hám traektoriya tolıǵı menen $r = r_{max}$ hám $r = r_{min}$ sheńberleri tárepinen sheklengen saqıynanıń ishinde boladı. Biraq bul jaǵday traektoriyanıń sǝzsiz tuyıq bolatuǵınlıǵın ańǵartpaydı. r diń shaması r_{max} nan r_{min} ge hám onnan keyin r_{max} ge shekem ǝzgeretuǵın waqıt ishinde radius vektor $\Delta\varphi$ múyeshine burıladı. (13)-ańlatpaǵa sáykes $\Delta\varphi$ múyeshiniń mánisi

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{(M/r^2)\, dr}{\sqrt{2m(E-U) - M^2/r^2}} \tag{16}$$

ańlatpasınıń járdeminde esaplanadı [31].

Traektoriyanıń tuyıq bolıw shárti bul múyeshtiń 2π shamasınıń racionallıq bǝlimine teń bolıwına sáykes keledi. YAǵnıy $\Delta\varphi = 2\pi m/n$ shamasına teń. Bul ańlatpana m menen n lep pútin sanlar. Bunday jaǵdayda usı waqıt aralıǵı n ret qaytalanǵanda noqattıń radius-vektorı m dana aylanıp ǝziniń eń dáslepki mánisine qaytıp keledi, yaǵnıy traektoriya tuyıqlanadı. Biraq bunday jaǵdaydıń orın alıwı oǵada siyrek boladı hám $U(r)$ funkciyasınıń ıqtıyarlı túrinde $\Delta\varphi$ shaması 2π diń racionallıq bǝlimi bolıp tabılmaydı. Sonlıqtan ulıwma jaǵdayda finitlik qozǵalıstıń traektoriyası tuyıq emes (2-súwret). Noqat sheksiz kǝp ret maksimallıq hám minimallıq qashıqlıqlar arqalı ǝtedi hám sheksiz úlken waqıt ishinde eki shegaralawshı sheńber arasındaǵı barlıq saqıynanı toltıradı.



2-súwret.
Tuyıq emes finitlik qozǵalısqa keltirilgen mısal. Bunday jaǵdayda noqat sheksiz kǝp ret maksimallıq hám minimallıq qashıqlıqlar arqalı ǝtedi hám sheksiz úlken waqıt ishinde eki shegaralawshı sheńber arasındaǵı barlıq saqıynanı toltıradı.

Finitlik qozgalıstıń traektoriyaları tuyıq bolatuǵın oraylıq maydannıń eki tipi bar. Olar bǝleksheniń potenciallıq energiyası $\frac{1}{r}$ hám r^2 shamalarına proporcional bolǵan maydanlar bolıp tabıladı. Birinshi jaǵday biziń qarawımız bolǵan Kepler máselesiniń potencialı bolıp tabıladı. Ekinshi jaǵday keńisliklik oscillyatorǵa sáykes keledi hám onı biz qaramaymız.

Biz (12)-ulıwmalıq ańlatpanıń járdeminde orbita boyınsha qozǵalǵandaǵı koordinatalardıń waqıttan ǵárezliligin táriyipleytuǵın formulanı ala alamız. Onday formula qolaylı parametrlik túrde bılayınsha kǝrsetiledi:

Dáslep ellips túrindegi orbitalardı qaraymız. Joqarıdaǵıday jollar menen a menen e shamaların kirgizip waqıtta anıqlaytuǵın (12)-integraldı bılayınsha jazamız:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{r\,dr}{\sqrt{-r^2 + \frac{\alpha}{|E|} r - \frac{M^2}{2m|E|}}} = \sqrt{\frac{ma}{\alpha}} \int \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2e^2 - (r-a)^2}}.$$

Bunnan keyin

$$r - a = -ae\cos\xi$$

túrindegi ornına qoyıw jolı menen bul integral

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} \int (1 - e\cos\xi)\,d\xi = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (\xi - e\sin\xi) + \mathrm{const}$$

túrine alıp kelinedi. Bul formuladaǵı *const* tıń nolge aylanıwı ushın waqıttıń basın saylap alıp r diń t dan ǵárezligi ushın

$$\mathbf{r} = a(1 - e\cos\xi), \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (\xi - e\sin\xi)$$

túrindegi formulalardı alamız ($t = 0$ waqıt momentinde bөlekshe perigeliyde jaylasqan boladı). ξ parametri arqalı bөlekshenıń dekart koordinataların da ańlatıwǵa boladı:

$$x = r\ cos\varphi, \quad y = r\ sin\varphi.$$

(x hám y kөsherleri ellipstiń sáykes úlken hám kishi yarım kөsherleri baǵıtında alınǵan).

Joqarıda keltirilgen ańlatpalar tiykarında

$$ex = p - r = a(1 - e^2) - a(1 - e\cos\xi) = ae(\cos\xi - e)$$

túrindegi qatnaslar ańsat alınadı. Bunday jaǵdayda y ushın $\sqrt{r^2 - x^2}$ ańlatpasınıń orınlı ekenligin esapqa alıp eń aqırında

$$x = a(\cos\xi - e), \quad y = a\sqrt{1 - e^2}\sin\xi$$

formulalarına iye bolamız. Ellips tárizli orbita boyınsha tolıq bir aylanıw ushın ξ parametriniń nolden 2π ge shekemgi өzgerisi talap etiledi.

Tap sol sıyaqlı esaplawlar giperbolalıq orbita ushın tөmendegidey ańlatpalardı beredi:

$$r = a(e\,\mathrm{ch}\,\xi - 1), \qquad t = \sqrt{ma^3/\alpha}\,(e\,\mathrm{sh}\,\xi - \xi),$$
$$x = a(e - \mathrm{ch}\,\xi), \qquad y = a\sqrt{e^2 - 1}\,\mathrm{sh}\,\xi,$$

Bul ańlatpalarda ξ parametri $-\infty$ den $+\infty$ ge shekem өzgeredi.

Relyativistlik fizikadaǵı Kepler máselesi. 1905-jılı arnawlı salıstırmalıq teoriyasın dөretip bolǵannan keyin Albert Eynshteyn tartılıs teoriyasınıń relyativistlik variantın dúziwdin zárúrligin moyınladı. Sebebi Nyutonnıń teńlemeleri Lorenc túrlendiriwlerin qanaatlandırmadı, al Nyuton gravitaciyasınıń tarqalıw tezligi sheksiz úlken boldı. 1907-jılı jazılǵan xatlarınıń birinde Eynshteyn tөmendegidey jaǵdaydı atap өtti:

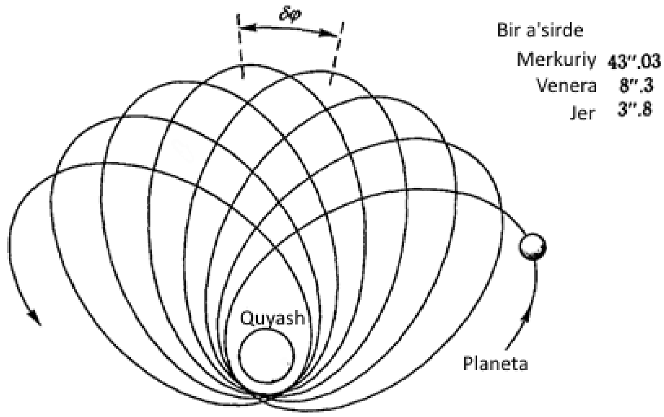
Házirgi waqıtları men salıstırmalıq teoriyasınıń poziciyalarında turıp tarlıtıs nızamın izertlew menen shuǵıllanıp atırman. Bul jumıs maǵan Merkuriy planetasınıń orbitasınıń ásirlik awısıwın túsindiriwge múmkinshilik beredi dep úmit etemen.

Relyativistlik tartılıs teoriyasınıń eń dáslepki variantların 1910-jıllardıń basında Maks Abraxam, Gunnar Nordstrёm hám Eynshteynniń өzi baspadan shıǵardı. Abraxamda Merkuriydiń perigeliyiniń awısıwı baqlawlarda alınǵan shamadan úsh esedey kishi bolıp shıqtı. Nordstrёmnıń teoriyasına hátte awısıwdıń baǵıtı ushın da durıs emes nátiyje alındı.

1912-jılğı Eynshteynniń versiyası baqlawlarda alınǵan shamanıń úshten birindey shamaǵa kishi mánis alındı.

1913-jılı Eynshteyn jáne bir qádem alǵa ilgeriledi – skalyar gravitaciyalıq potencialdan tenzorlıq kөriniske өtti. Bul matematikalıq apparat keńislik-waqıttıń evklidlik emes metrikasın táriyiplewge múmkinshilik berdi. 1915-jılı bolsa Eynshteyn өziniń tartılıs teoriyasınıń eń sońǵı variantın baspadan shıǵardı hám sol variant "ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyası" atamasına iye boldı. Bul teoriyada úlken massaǵa iye denelerdiń qasında keńislik-waqıttıń geometriyası evkilidlik geometriyadan sezilerliktey ajıraladı. Bul jaǵday planetalardıń qozǵalısınıń klassikalıq traektoriyalarınan awısıwǵa alıp keledi. 1915-jılı 18-noyabr kúni Eynshteyn bul awısıwdı juwıq túrde esapladı hám astronomiyalıq baqlawlarda alınǵan bir ásir dawamındaǵı 43'' shamasına dál sáykes keletuǵın mánisti aldı. Usı shamanı alǵanda konstantalardıń mánislerin өzgertiwge zárúrlik bolmaǵan hám shamalar ıqtıyarlı túrde өzgertilmegen.

3-súwret.
Planetalardıń perigeliyleriniń ásirlik awısıwın túsirdiretuǵın sxema (awısıw múyeshiniń mánisi úlkeytilgen).



Aradan eki ay өtpey atırıp Karl Shvarcshild tárepinen Eynshteyn teńlemeleriniń dál sheshimi alındı (yaǵnıy 1916-jılı yanvar ayında). Bul jumısta planetalardıń perigeliyleriniń qosımsha awısıwǵa ushıraytuǵınlıǵı kөrsetildi. Eger M arqalı Quyashtıń massası, c arqalı jaqtılıqtıń tezligi, A arqalı planetanıń orbitasınıń úlken yarım kөsheri, e arqalı orbitanıń ekscentrisiteti, T arqalı planetanıń Quyashtıń dөgeregindey aylanıw dáwiri belgilengen bolsa, onda ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyasında planeta Quyashtıń dөgereginde bir ret aylanǵanda perigeliydiń radianlardaǵı burılıwı

$$\delta\varphi \approx \frac{6\pi GM}{c^2A(1-e^2)} = \frac{24\pi^3A^2}{T^2c^2(1-e^2)}$$

shamasına teń boladı eken. Bul formula Merkuriy planetası ushın 100 jılda 42,98'' shamasın beredi. Bul shama astronomiyalıq baqlawlarda alınǵan shamaǵa dál sáykes keledi.

1919-jılǵa shekem (usı jılı Artur Eddington jaqtılıqtıń gravitaciyalıq awısıwın ashtı) Merkuriydiń perigeliyiniń awısıwı Eynshteyn teoriyasınıń durıs ekenliginiń jalǵız tastıyıqlanıwı edi. 1916-jılı Garold Djeffris ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyasınıń durıs ekenligine gúmánnıń bar ekenligin bildirdi. Sebebi teoriya Nyukom tárepinen kөsetilgen Venera planetasınıń túyinleriniń awısıwın túsindire almadı. Biraq 1919-jılı Djeffris өziniń pikirlerinen bas tarttı. Jańa maǵlıwmatlar boyınsha Eynshteyn teoriyasına qayshı keletuǵın Veneranıń qozǵalısında qanday da bir өzgeshelikler tabılmadı.

Qalay degen menen ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyasın áshkaralaw 1919-jıldan keyin de dawam etti. Bazı bir astronomlar Merkuriydiń perigeliyiniń ásirlik awısıwı ushın alınǵan eksperimentallıq hám teoriyalıq maǵlıwmatlardıń bir birine sáykes keliwin tosınnan bolǵan waqıya dep túsindiriwge tırıstı. Biraq házirgi zamanlarda alınǵan dál maǵlıwmatlar ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyası bergen muǵlıwmatlardıń durıs ekenligin ayqın túrde tastıyıqladı.

Ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyasınıń formulası PSR B1913+16 qos juldız-pulsarında tekserip kөrildi. Bul sistemada massaları Quyashtıń massası menen barabar bolǵan eki juldız bir birine jaqın qashıqlıqlarda aylanadı. Sonıń ushın hár qaysısınıń piastrı (perigeliydiń analogı) awısıwǵa ushıraydı. Baqlawlar hár jıllıq awısıwdıń 4,2 gradusqa teń ekenligin kөrsetti hám bul shama ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyası beretuǵın shamaǵa tolıq sáykes keledi.

Spektrallıq sızıqlardıń qızılǵa awısıwı (gravitaciyalıq qızılǵa awısıw). Ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyası úlken massaǵa iye denelerdiń qasındaǵı nurlanıwlarda spektrallıq sızıqlardıń basqa orınlardaǵı nurlanıwlardıń spektr sızıqlarına salıstırǵanda tөmengi jiyilikler tárepke qaray jılısatuǵınlıǵın boljaydı. Bul nátiyje ulıwma bolǵan mınaday tastıyıqlawdıń dara jaǵdayı bolıp tabıladı: úlken massaǵa iye denelerdiń qasında júzege keletuǵın barlıq processler ástelengen. Spektrallıq jiyiliktiń өzgerisi Nyuton potencialına proporcional, demek úlken massaǵa iye deneniń orayına shekemgi qashıqlıqqa keri proporcional. Jiyiliklerdiń usınday bolıp өzgeriwin gravitaciyalıq qızılǵa awısıw dep ataydı. Sebebi jiyiliktiń kishireyiwi reńdi qızıl tárepke qaray jılıstıradı. Basqa sebeplerge baylanıslı spektrdegi sızıqlardıń qızılǵa qaray awısıwı da, fiolet tárepke qaray awısıwı da múmkin. Mısalı jaqtılıqtıń deregi baqlawshı tárepke qaray tez qozǵalǵanda fioletke qaray jılısıw orın aladı hám bunday qubılıstı Dopplerlik awısıw (yamasa Doppler effekti) dep ataydı. Kelbetlik sıpatında qollanılǵan "Gravitaciyalıq" sөzi jaqtılıq dereginiń kúshli gravitaciyalıq maydan payda etetuǵın úlken massalı deneniń qasında turǵanlıǵın atap kөrsetedi. Al 1960-jılı Garvard universitetinde islewshi R.Paund hám Rebkalar tárepinen Jerdiń gravitaciyalıq maydanı sebepli payda bolǵan qızılǵa awısıw laboratoriyalıq sharayatlarda júzege keltirildi. Usı waqıtlarǵa shekem qızılǵa awısıw júdá tıǵız bolǵan juldızlardıń qatarına kiriwshi aq irgejeylilerdiń spektrinde baqlanǵan edi. Bul effekt Quyashtıń spektrinde de baqlandı.

Eger jaqtılıqtıń degerin júdá qısılǵan massaǵa jaqınlatsaq, onda jiyiliktiń kishireyiwi gravitaciyalıq radiusqa jaqın kelgende terbelislerdiń tolıq toqtawı menen juwmaqlanǵan bolar edi.

Biz házir qarap atırǵan másele esaplaw sistemasınıń tezleniwshi qozǵalısına baylanıslı máselelerdiń qatarına kiredi. Tezleniwdiń esaplaw sistemalarına tásiri 1907-jılı A.Eynshteyn tárepinen arnawlı salıstırmalıq teoriyasınıń sheklerinde izertlengen edi. Sonlıqtan bul paragrafta tallanıp atırǵan másele arnawlı salıstırmalıq teoriyasında da, ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyasında da bar másele bolıp tabıladı.

Bul effektlerdiń birinshisi – waqıttıń gravitaciyalıq ásteleniwi boyınsha gravitaciyalıq shuqır qanshama tereń bolsa saattıń júriwi de sonshama ástelenedi. Bul effekttiń orın alatuǵınlıǵı kóp sanlı eksperimentlerde tastıyıqlandı hám Jerdiń jasalma joldaslarınıń navigaciyası sistemalarında esapqa alınadı. Eger bul effekt esapqa alınbaǵanda hár sutkada (kúnde) onlaǵan mikrosekund qátelik ketken bolar edi.

Paydalanılǵan ádebiyatlar dizimi

1. L.D.Landau, E.M.Lifshic. Teoretiчeskaya fizika. Uчebnoe posobie dlya vuzov. V. 10 t. Tom II. Teoriya polya. 8-e izdanie. Izdatelstvo "FIZMATLIT". Moskva. 2003. 536 s.

Glava XII. §§ 99-101.

2. Lewis Ryder. Introduction to General Relativity. Cambridge University Press. 2009. 441 p.

8-lekciya. Qara qurdımlar. Kosmologiya. Eynshteyn teńlemeleriniń Fridman sheshimleri.

Fridman modelleri. Xabbl nızamı. Úrleniwshi (inflyaciyalıq) Álemniń modelleri

Shvarcshild sheshimi haqqında. A.Eynshteyn өziniń gravitaciya teńlemelerin baspadan shıǵarǵannan keyin bir neshe aydan soń nemis astronomı Karl Shvarcshild (nemisshe Karl Schwarzschild, 1873-1916) bul teńlemelerdiń eń birinshi dál sheshimlerin ala aldı. Bul sheshim approksimaciya emes hám maydanlardıń "kúshi" yamasa "ázziligi" haqqında hesh bir boljawǵa iye emes edi.

Shvarcshild sheshimi bir sferalıq massanıń usı massanı qorshap turǵan keńisliktegi gravitaciyalıq maydanın táriyipleydi. Bul massadan jetkilikli dárejelerdegi qashıqlıqlarda sheshimler klassikalıq tartılıs nızamınıń sheshimine өtedi (yaǵnıy qashıqlıqtıń kvadartına keri proporcional bolǵan sheshimge aylanadı). Al gravitaciyalıq maydannıń deregi úlken emes өlshemlerdegi hám úlken emes tıǵızlıqtaǵı aspan denesi bolıp tabılatuǵın bolsa, onda Shvarcshild sheshimi menen Nyuton boyınsha sheshim arasında ayırma bolmaydı. Tek gravitaciya maydanınıń dereginiń massası júdá kishi kөlemde tıǵızlanǵan bolǵan jaǵdaylarda ǵana deneniń betinde "kúshli" gravitaciyalıq maydanlar payda boladı, astronomiyalıq baqlawlarda tabılıwı múmkin bolǵan jańa qızıqlı qubılıslar júzege keledi.

Shvarcshild sheshiminde onıń atı menen atalatuǵın metrika eń áhmiyetli orındı iyeleydi. Shvarcshild metrikası bos keńisliktegi kosmologiyalıq konstantaǵa iye Eynshteyn teńlemesiniń sferalıq simmetriyaǵa iye dál sheshimi bolıp tabıladı. Mısalı bul metrika aylanbaytuǵın hám elektr zaryadına iye emes qara qurdımnıń hám sferalıq simmetriyaǵa iye úlken massaǵa iye bolǵan (hám basqa denelerden úlken qashıqlıqlarda turǵan) deneniń gravitaciyalıq maydanın táriyipleydi.

Bul sheshim statikalıq sheshim bolıp tabıladı. Sonlıqtan sferalıq gravitaciyalıq tolqınlardıń bolıwı múmkin emes.

Shvarcshildtiń esteligine baylanıslı Berlin ilimler akademiyasında өtkerilgen májiliste A.Eynshteyn Shvarcshildtiń jumısların bılayınsha bahaladı:

"Shvarcshildtiń teoriyalıq jumıslarında izertlewdiń matematikalıq usılların tolıq isenim menen paydalanıwı hám onıń astronomiyalıq yamasa fizikalıq mashqalanıń mánisine qanday jeńil jetetuǵınlıǵı hayran qaldıradı. Júdá tereń matematikalıq bilim ondaǵı durıs máni beriw menen oylawdıń jumsaqlıǵı siyrek ushıraydı. Usınday qásiyet oǵan basqa izertlewshilerdi өziniń matematikalıq qıyınshılıqları menen qorqıtqan áhmiyetli teoriyalıq jumıslardı orınlawǵa múmkinshilik berdi".

Shvarcshild koordinataları dep atalatuǵın (t, r, θ, φ) koordinatalarında (bul koordinatalardıń keyingi úshewi úsh өlshemli keńisliktegi sferalıq koordinatalarǵa sáykes keledi) metrlik tenzor bılayınsha jazıladı:

$$g = \begin{bmatrix} 1 - \frac{r_s}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix}.$$

Bunday metrikadaǵı intervaldı bılayınsha jazadı:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} - r^2 \left(\sin^2\theta \, d\varphi^2 + d\theta^2\right),$$

Bul formulada $r_s = 2\frac{GM}{c^2}$ shamasın Shvarcshild radiusı yamasa gravitaciyalıq radius dep ataydı. M arqalı gravitaciyalıq maydandı payda etetuǵın deneniń massası, G arqalı gravitaciya turaqlısı, al c arqalı jaqtılıqtıń tezligi belgilengen. Bunday jaǵdayda koordinatalar tөmendegidey oblastlarda өzgeredi:

$$-\infty < t < \infty, r_s < r < \infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Usınıń menen birge $(t, r, \theta, \varphi = 0)$ hám $(t, r, \theta, \varphi = 2\pi)$ noqatları birdey (ádettegi sferalıq koordinatalardaǵıday).

Shvarcshild radiusınıń fizikalıq mánisi ekinshi kosmoslıq tezliktiń mánisi jaqtılıqtıń vakuumdaǵı tezligine teń bolatuǵın jaǵday ushın $\frac{mc^2}{2} = G\frac{mM}{r}$ formulasınan kelip shıǵatuǵın r diń mánisine teń. Quyash ushın $r_s = 2\frac{GM_\odot}{c^2} \approx 3\ km$, al Jer ushın $r_s = 2\frac{GM_\oplus}{c^2} \approx 0{,}9\ sm$.

r koordinatası radius-vektordıń uzınlıǵı emes, al usı metrikada $t = const, r = r_0$ bolǵan sferanıń betiniń maydanı $4\pi r_0^2$ shamasına teń bolatuǵınday etip alınadı. Bunday jaǵdayda hár qıylı r lerge iye (biraq basqa koordinataları birdey bolıwı kerek) eki waqıya arasındaǵı "qashıqlıqtıń" shaması

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}} > r_2 - r_1, r_2, r_2 > r_s.$$

integralınıń járdeminde beriledi.

Metrikanıń өzine tán өzgeshelikleri $\boldsymbol{r = 0}, \boldsymbol{r = r_s}$ bolǵan noqatlarda ayqın túrde kөrinedi. Haqıyqatında da Shvarcshild koordinatalarında denege túsip baratırǵan bөleksheniń $\boldsymbol{r = r_s}$ betine jetemen degenshe sheksiz úlken waqıt $\boldsymbol{t}$ kerek boladı. Biraq denege túsip baratırǵan bөlekshede jaylasqan baqlawshı ushın (bunı erkin túsiwshi bөlekshe menen birge júriwshi esaplaw sistemasındaǵı Lemetr koordinatalarında dep ataymız) sol bettegi keńislik-waqıttıń hesh qanday ayrıqsha өzgeshelikleri bolmaydı. Sonlıqtan erkin túsiwshi baqlawshı bettiń өzine de, $\boldsymbol{r \approx 0}$ bolǵan oblastqa da shekli waqıttıń ishinde barıp jetedi.

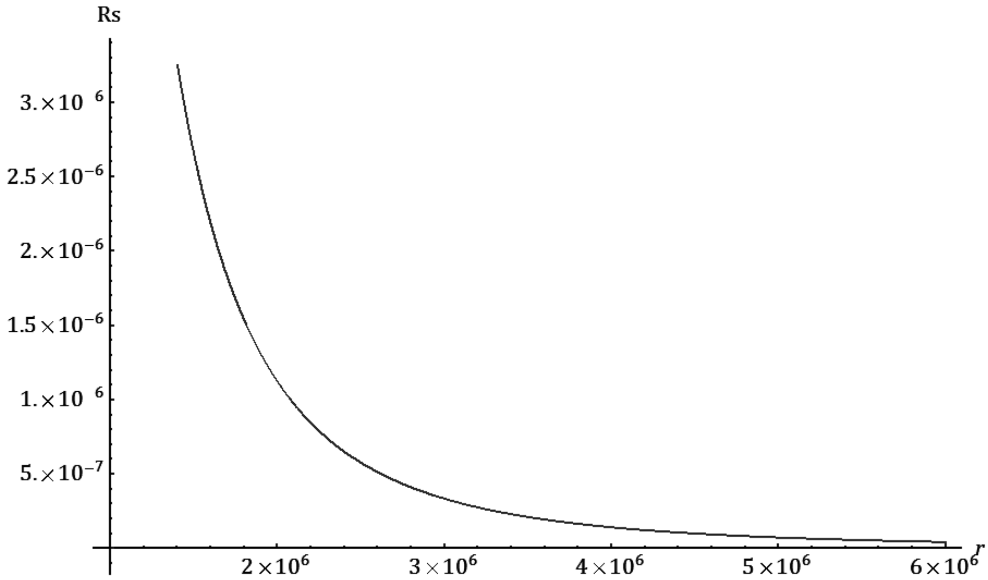
Shvarcshild metrikasınıń haqıyqıy өzgesheligi $r \to 0$ sheginde orın aladı. Bul noqatta kıysıqlıq tenzorınıń skalyar invariantları sheksizlikke umtıladı. Bul өzgeshelikti (onı singulyarlıq dep ataymız) koordinata sisteması өzgertiw jolı menen joq etiwge bolmaydı.

$\boldsymbol{r = r_s}$ beti waqıyalar gorizontı dep ataladı.

Koordinatalardı sátli túrde saylap alǵanda (mısalı Lemetr yamasa Kruskala koordinatalarında) qara qurdımlardan waqıyalar gorizontı arqalı hesh qanday signaldıń sırtqa shıǵıwınıń múmkin emes ekenligin kөrsetiwge boladı. Bunday mániste Shvarcshild qara qurdımınan tısta maydannıń tek bir parametrden – deneniń tolıq massasınan ǵárezli ekenligi tań qalarlıq emes.

Kúshli maydanlar degenimiz ne? Aspan deneleri Jerdiń betindegi denelerge salıstırǵanda júdá úlken, al Jerdiń өzi qozǵalmaytuǵın juldızlarǵa salıstırǵanda júdá kishi. Al qozǵalmaytuǵın juldızlardıń өzi galaktikalarǵa salıstırǵanda hesh nárse de emes. Bul jaǵdaylar Jerdiń betindegi gravitaciyalıq maydannıń basqa da gravitaciyalıq maydanlar ushın hesh qashan da standarttıń bola almaytuǵınlıǵın kөrsetedi. Biraq qálegen jaǵdayda fizika ilimi ushın gravitaciyalıq maydannıń shaması ǵana emes (yaǵnıy berilgen noqattaǵı sınap kөriletuǵın deneniń tezleniwi emes), al gravitaciya maydanınıń bar bolıwınıń saldarınan payda bolatuǵın qıysıqlıq úlken áhmiyetke iye boladı (1-súwret).

Keńislik-waqıttıń qıysıqlıǵı jөninde tolıǵıraq jáne ápiwayı maǵlıwmatlardı beremiz. Eger keńislik radiusı r ge teń bolǵan sfera bolıp tabılatuǵın bolsa, onda onıń betindegi úsh múyeshliktiń ishki múyeshleriniń qosındısı Σ shaması π den úlken boladı. Bunday jaǵdayda keńisliktiń qıysıqlıǵı dep $C = \frac{\Sigma - \pi}{S}$ shamasına aytadı. Bul ańlatpada S arqalı sferanıń betinde sızılǵan úsh múyeshliktiń maydanı belgilengen. Endi C shamasınıń $\frac{1}{r^2}$ shamasına teń ekenligin ańsat dálillewge boladı. Demek sfera tárizli eki əlshemli keńisliktiń qıysıqlıǵı onıń radiusınıń kvadratına keri proporcional boladı eken. Al ulıwma jaǵdayda keńislik-waqıttıń qıysıqlıǵı ekinshi rangalı tenzordıń járdeminde táriyiplenedi.



1-súwret. Gravitaciyalıq maydannıń (keńislik-waqıttıń) santimetrlerdegi qıysıqlıǵınıń shamasınıń (ordinata kəsherinde) radius boyınsha qashıqlıqtan (abscissa kəsherinde santimetrlerde) ǵárezligi.

Əz gezeginde qıysıqlıqtı qıysıqlıq radiusınıń járdeminde táriyiplewge boladı (qıysıqlıq radiusı dep tap sonday qıysıqlıqqa iye sferanıń radiusına teń shamanı aytamız). Qıysıqlıqtıń shaması kishi bolsa onıń radiusı úlken boladı. Biz qarap atırǵan obъekttiń geometriyalıq əlshemlerine salıstırǵanda qıysıqlıq radiusı onsha úlken bolmasa, onda tartısıw (gravitaciya) maydanın kúshli dep esaplaymız. Eger Jerdiń barlıq massasın bir noqatqa jıynasaq, onda tartılıs maydanı orayǵa jaqınlaǵan sayın kúshli boladı Keńislik-waqıttıń qıysıqlıǵınıń radiusı orayǵa 1 sm ge shekem jaqınlasadı (biz joqarıda Jer ushın $r_s = 2\frac{GM_\oplus}{c^2} \approx 0{,}9\ sm$ ekenligin esaplaǵan edik). Tap sonday jollar menen Quyashtı da qıssaq, onda oraydan 3 km qashıqlıqta qıysıqlıq sezilerliktey mániske iye boladı. Eki jaǵdayda da qıysıqlıq radiusı Shvarcshild radiusına (yamasa gravitaciyalıq radiusqa) teń boladı. Qıysıqlıǵınıń shaması Shvarcshild radiusına teń bolǵanda alınatuǵın sferanı (yaǵnıy radiusı Shvarcshild radiusına teń bolǵan sferanı) Shvarcshild sferası dep ataydı.

Gravitaciyalıq radius túsinigine basqasha da qarawǵa boladı. Anıqlaması boyınsha ekinshi kosmoslıq tezlikti (yaǵnıy kosmoslıq korabldiń Jerdi taslap ketiwi ushın jetkilikli bolǵan tezlik) Jer – kosmos korabli sisteması ushın tolıq energiyanıń nolge teń bolıw shárti menen anıqlaydı:

$$\frac{mv^2}{2} = G\frac{mM}{R}.$$

Bul ańlatpada m arqalı kosmos korabliniń massası (ol qısqarıp ketedi), M arqalı Jerdiń massası, al R arqalı ádette Jerdiń radiusı belgilengen. Bunday jaǵdayda $v = 11{,}2$ km/s shamasın alamız. Al $R = 0{,}9$ sm bolǵan jaǵdayda $v = c$ teńligine iye bolamız.

Kvazarlar Álemniń baqlanatuǵın bөlimindegi eń jaqtılı obъektler bolıp tabıladı. Onıń nurlanıwınıń quwatı Qus jolı sıyaqlı galaktikalardaǵı barlıq juldızlardıń quwatlıqlarınıń summasınan onlaǵan hám júzlegen ese úlken. Kvazarlardı júdá quwatlı hám alıstaǵı galaktikalardıń aktiv yadroları dep esaplaydı. Kvazarlardıń átirapındaǵı ata galaktikanıń izleri keyinirek tabıldı.

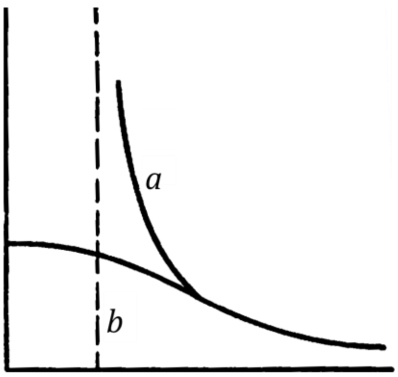
Kvazarlar birinshi gezekte úlken qızılǵa awısıwǵa, elektromagnit nurlanıwǵa hám júdá kishi múyeshlik өlshemlerge iye obъektler sıpatında kөrindi. Sonlıqtan dáslepki jılları astronomlar olardı noqatlıq obъektlerden – juldızlardan ajırata almadı.

Kvazarlar galaktikalardıń aktiv yadroları bolıp tabıladı. YAdroda asa úlken massaǵa iye **qara qurdım** jaylasqan dep esaplanadı. Ol akkreciyanıń saldarınan qorshaǵan keńislikten materiyanı өzine tartadı. Nátiyjede qara qurdımnıń massası úlkeyedi hám galaktikanıń barlıq juldızlarınıń quwatınan úlken nurlanıw orın aladı. Sońǵı waqıtları өtkerilgen baqlawlar kvazarlardıń kөpshiliginiń oǵada úlken ellips tárizli galaktikalardıń oraylarınıń qasında jaylasqan ekenligin kөrsetti.

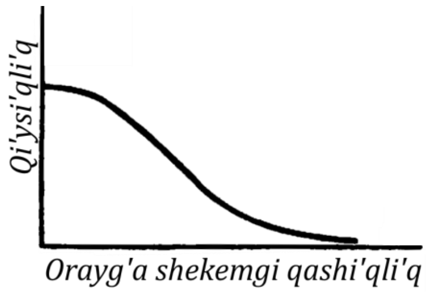
Ayırım teoriyalarda kvazarlardı өziniń rawajlanıwınıń dáslepki dáwirindegi galaktikalar dep túsindiredi. Bul galaktikalarda asa úlken massaǵa iye qara qurdım qorshap turǵan zatlardı jutadı. Sońǵı waqıtları nurlanıwdıń deregin asa úlken massaǵa iye qara qurdımnıń akkreciyalıq diski dep esaplanbaqta. Sonlıqtan kvazarlardıń spektrallıq sızıqlarınıń qızılǵa awısıwı ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyasındaǵı gravitaciyalıq awısıw menen baylanıslı.

Házirgi waqıtları kvazarlarǵa shekemgi qashıqlıqlar hám olardıń өlshemleri boyınsha bir qatar maǵlıwmatlar qolǵa kirgizilgen. Usıǵan baylanıslı kvazarlardıń átirapındaǵı keńislik-waqıttıń qıysıqlıǵı jөninde isenimli maǵlıwmatlar bar.

Shvarcshild sferasınıń ishinde. Sırtta (alısta) jaylasqan baqlawshı alatuǵın maǵlıwmatlar boyınsha bөlekshe hesh waqıtta da Shvarcshild sferasına jete almaytuǵın hám hesh bir jaqtılıq signalı shekli waqıt ishinde bul sferanı kesip өte almaytuǵın bolsa da erkin túsiwshi baqlawshıǵa Shvarcshild sferasınıń ishindegi oblastqa өtiw ushın onıń menshikli waqıtında shekli waqıt kerek boladı. Usı jaǵdayǵa baylanıslı erkin túsiwshi baqlawshını sferanıń ishinde qanday jaǵdaydıń kútip turatuǵınlıǵın biliw qızıqlı máselelerdiń biri bolıp tabıladı. Bul jөninde teoriyanıń neni aytatuǵınlıǵın bilip alıwımız kerek. Biz qarap atırǵan jaǵdaydı gravitaciyanı payda etiwshi massa júdá qısılǵan hám sonlıqtan Shvarcshild sferası deneniń sırtında bos keńislikte ornalasqan. Ádettegidey aspan denelerinde Shvarcshild sferasınıń bar ekenligine baylanıslı bolǵan hesh bir qubılıs baqlanbaydı. Bul jaǵdaydı illyustraciyalaw maqsetinde 2-súwrette eki jaǵday ushın qızılǵa awısıwdıń shamasınıń ǵárezliligi kөrsetilgen: massanıń barlıǵı bir noqatta toplanǵan (a) hám massa Shvarcshild sferasınan sırtqa shıǵatuǵın shekli kөlemde toplanǵan (b). Shvarcshild sferası өtetuǵın rayonda zat keńislikte tarqalǵan bolǵanlıqtan baqlawlardı өtkeriwge (ásbaplardı alıp barıwǵa) mexanikalıq jaqtan kesent beriwi múmkin. Biraq másele onda emes. Hátte aspan denesi arqalı tonnel qazǵan jaǵdayda da Shvarcshild sferası өtetuǵın rayonda hesh qanday tań qalarlıq qubılıs baqlanbaǵan bolar edi. Sebebi deneni payda etetuǵın zatlardıń barlıǵı deneniń ishki oblastındaǵı qıysıqlıqtı payda etiwge qatnaspaydı. 3-súwrette sfera boyınsha jayılǵan zattıń orayına jaqınlaǵanda qıysıqlıqtıń úlkeyiwi kөrsetilgen. Usı súwretti zattıń massasınıń barlıǵı orayda dep esaplanıp soǵılǵan 1-súwret penen salıstırıw kerek.

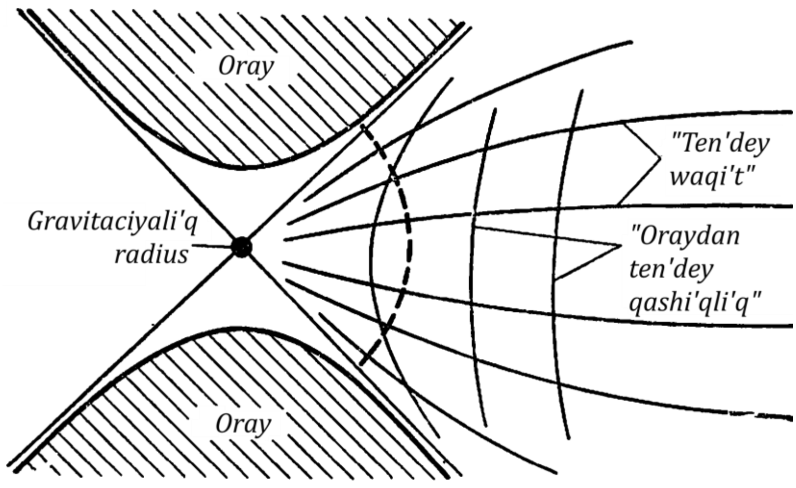


2-súwret. Qızılǵa awısıwdıń qashıqlıqtan ǵárezligi.



3-súwret. Əlshemleri úlken deneniń keńislik-waqıtınıń qıysıqlıǵı.

4-súwrette zat orayda toplanǵan jaǵday sáwlelendirilgen. Bunday sxemanıń barlıq jaǵdayda da ideallastırılǵan súwretti beretuǵınlıǵı anıq. Súwrette oray arqalı ətetuǵın tek bir radiallıq baǵıt bolǵan keńisliklik baǵıt hám bir waqıtlıq baǵıt kərsetilgen. Bul súwrette əzgermeli masshtab saylap alınǵan. Sonlıqtan hár bir ńoqattaǵı sırtqa yamasa ishke qaray tarqalatuǵın nur vertikal baǵıtqa 45^0 lıq múyesh jasap baǵıtlanǵan tuwrınıń járdeminde kərsetiledi. Usı bissektrisalar hám vertikallıq baǵıt arasında jaylasqan qálegen baǵıt waqıtqa megzes. Bul bissektrisalardan qıyalıǵı kishi bolǵan qálegen baǵıt keńislikke megzes. Oraydan qashıqlıqları birdey bolǵan noqatlar vertikallıq sızıqlarda emes, al giperbola tárizli iymekliklerde jaylasadı. "Bir waqıtta" júzege keletuǵın waqıyalardı beretuǵın noqatlar bir noqat arqalı ətetuǵın iymekliktiń boyınsha jatadı. Bul ayrıqsha noqat barlıq shekli waqıtlar ushın Shvarcshild sferasınıń radiusın beredi. Bul noqattan shıǵatuǵın hám oń tárepke qaray 45^0 qa baǵıtlanǵan eki sızıq sheksiz alıstaǵı bolajaqtaǵı hám sheksiz úlken ətmishtegi Shvarcshild sferasınıń radiusı bolıp tabıladı. Bul eki sızıq Shvarcshild sferasına salıstırǵandaǵı sırtqı oblast dep esaplaw múmkin bolǵan keńislik-waqıttıń segmentin sheklep turadı. Bul eki tárepleme signal jiberiw arqalı sırttan baqlaw múmkin bolǵan oblast bolıp tabıladı.



4-súwret. Shvarcshild sferasınıń qasındaǵı geometriya

Punktir menen bəleksheniń dúnyalıq sızıǵı bolıp tabılatuǵın iymeklik belgilengen. Qálegen noqatta bul iymekliktiń qıyalıǵı waqıtqa megzes baǵıtqa iye. 4-súwrettegi grafikalıq sheklerge baylanıslı bul traektoriya tek radiallıq qozǵalısqa sáykes keledi (orayǵa qaray hám oraydan qarama-qarsı baǵıtta). Traektoriyanıń bir bəlimi Shvarcshild sferasınan tıstaǵı eki tárepleme múmkin bolǵan (barıw múmkin bolǵan) oblast arqalı ətedi. Bul oblastta ornalasqan hám r diń turaqlı mánisine sáykes keliwshi iymekliktiń hár qaysısında stacionar baqlawshını jaylastırıwǵa boladı. Usınday qálegen baqlawshı materiallıq bəleksheniń ıqtıyarlı bөlimine өziniń jaqtılıq signalın jibere hám keyinirek shaǵılısqan signaldı qabıl ete aladı. Solay etip ol materiallıq bөlekshe menen eki tárepleme baylanıstı ámelge asırıw múmkinshiligine iye boladı. Biraq materiallıq bөleksheler Shvarcshild sferasın kesip өtetuǵın eki noqatta eki tárepleme baylanıs úziliske ushıraydı: bir ret sferaǵa kirgende, ekinshi ret sferadan sırtqa shıqqanda. Baqlawshı bөlekshe Shvarcshild sferasınan shıqqan momentti baqlay aladı. Biraq bul signaldı ol өziniń signalın jiberip qarsı ala almaydı. Kerisinshe, baqlawshı tárepinen jiberilgen signal bөlekshege sol bөlekshe sferanıń arǵı tárepine (ishine) өtken moment keledi. Biraq bөlekshenıń sferaǵa kirgenligin dálilleytuǵın signaldı baqlawshıǵa jetkeriwdiń hesh qanday usılı joq.

Shvarcshild sferasınıń ishinde bir birinen ayrılatuǵın eki oblast bar boladı. Olardıń birewin "өtmishtiń ishki oblastı", al ekinshisin "bolajaqtıń ishki oblastı" dep ataw múmkin. Stacionar baqlawshı birinshi oblasttaǵı (өtmishtiń ishki oblastındaǵı) waqıyalardı kөre hám ekinshi oblastqa (bolajaqtıń ishki oblastına) signal jibere aladı. Biraq "bolajaqtıń ishki oblastına" signaldı jibere, al "өtmishtiń ishki oblastın" kөre almaydı. "Bolajaqtıń ishki oblastınan" shıqqan signal Shvarcshild sferasınıń sırtına shıǵa almaydı. Shvarcshild sferası ishindegi úshinshi oblastı hesh bir signaldıń (eki baǵıttaǵı signaldıń) járdeminde pútkilley kөriwge bolmaydı. 4-súwrettegi shtrixlanǵan oblastlardıń shegaraları ("oray" dep belgilengen) ayrıqsha noqatqa – "orayǵa" sáykes keledi. Bul noqattı waqıttıń өtiwine baylanıslı qarawǵa bolmaydı. Sebebi Shvarcshild sferasınıń ishinde waqıt өziniń ádettegidey mánisine iye bolmaydı. Al sırtqı stacionar baqlawshıǵa kelsek, onda onıń Shvarcshild sferasına "qolın jetkeriwi" ushın sheksiz kөp waqıt kerek boladı. Ol sferanıń ishindegi waqıttıń qalay өtip atırǵanlıǵın anıqlaw ushın sáykes belgi qoya almaydı. Ol Shvarcshild sferasınıń ishindegi (yaǵnıy waqıyalar gorizontı ishindegi) nárselerden izolyaciyalanǵan hám sonlıqtan sferanıń ishindegi baqlawshı menen signallar jiberiw jolı yamasa basqa da usıllar menen baylanısa almaydı.

Al Shvarcshild sferası arqalı өtiwshi hám bunnan keyin onıń orayına qaray ketiwshi baqlawshı nelerdi kөredi? degen soraw tuwıladı. Joqarıda aytılıp өtilgenindey, ol sferanıń betine shekli waqıttıń ishinde kelip jetedi, onıń qolındaǵı saat sayaxat baslanǵan waqıt momentinen baslap өtken waqıttı kөrsetedi. Sferanıń ishki oblastına өtiwden baslap ol sırtqı oblasttı kөre almaydı (sırtqı qaray signal jiberiw múmkinshiligine iye bolsa da). Ol Shvarcshild sferasın kesip өtkende ádettegidey emes hesh bir өzgeristi baqlamaydı. Biraq baqlawshı orayǵa jaqınlaǵan sayın keńislik-waqıttıń qıysıqlıǵı úlkeye baslaydı, baqlawshı orayǵa jetkende qıysıqlıqtıń mánisi sheksiz úlken boladı. Sonlıqtan oraylıq bөlim baqlawshıǵa barlıq qásiyetleri boyınsha anomallıq bolıp kөrinedi. Baqlawshı jibergen signallardıń sırtqı shıqpaytuǵınlıǵı haqqında ol hesh nárse bile almaydı. Onıń kөz-qarası boyınsha sırtqı qaray jiberilgen signallar ádettegidey ketedi. Signallar sırtqı oblastqa өte almaydı. Sebebi baqlawshıǵa Shvarcshild sferasınıń beti jaqtılıqtıń tezligindey tezlik penen qashıp baratırǵanday bolıp kөrinedi. Sonlıqtan onıń jaqtılıq signalları shegaraǵa jete almaydı. Biraq shegara (Shvarcshild sferasınıń beti) ayrıqsha belgiler menen belgilenip qoyılmaǵanlıqtan baqlawshı bul shegaranıń sırtqa qaray qozǵalısın baqlay almaydı. Eger Shvarcshild sferasına túsiwshi baqlawshı sırttıǵı stacionar baqlawshınıń saatına qarasa, onda ol onıń saatınıń kem-kemnen áste júrip atırǵanlıǵın ańǵaradı. Biraq sırtta qalǵan baqlawshınıń saatı hesh qashan toqtamaydı. Kerisinshe, sırtqı baqlawshı өziniń saatınıń júrisiniń kem-kemnen ástelenip atırǵanlıǵın ańǵaradı hám sol saat Shvarcshild sferasına túsip baratırǵan baqlawshınıń sferanıń shegarası arqalı qashan өtkenligin hesh qashan kөrsetpeydi.

Radiusı gravitaciyalıq radiustan kem bolǵan, tuwrıdan-tuwrı eksperimentlerde ele ashılmaǵan astronomiyalıq obъektler "**qara qurdımlar**" dep ataladı.

2016-jıldıń 11-fevral kúni Moskva, Vashington hám Piza qalalarında bir waqıtta ótkerilgen press-konferenciyada xalıq aralıq LIGO kollaboraciyası (kollaboraciya dep ulıwmalıq maqsetlerge jetiw ushın qanday da bir tarawdaǵı eki yamasa onnan da kóp adamlardıń, shólkemlerdiń birgeliktegi jumısına aytamız) proektiniń (LIGO, ingliz tilinde Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory, gravitaciyalıq-tolqınlıq observatoriya mánisin beredi) qatnasıwshıları gravitaciyalıq tolqınlardıń tabılǵanlıǵın daǵazaladı. Gravitaciyalıq tolqındı registraciyalaw waqıyasın astrofizikada GW150914 (bul jazıwdı "2015-jılı 14-sentyabr kúni baqlanǵan gravitaciyalıq tolqınlar" dep oqıw kerek) waqıyası dep belgilew qabıl etildi. Bunday tolqınlardıń bar ekenligi bunnan 100 jıl burın Albert Eynshteyn tárepinen jańa ǵana dóretilgen ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyasınıń (gravitaciya teoriyasınıń) tiykarında boljap aytılǵan edi. 12-fevral kúni bolsa "Physical Review Letters" jurnalında sol proekttiń aǵzalarınıń "Observation of Gravitational Waves from a Binaty Black Hole Merger" atamasındaǵı maqalası shıqtı. Bul maqalanıń avtorlarınıń sanı derlik bir yarım mıń. Olar Jer júziniń 12 elinde jaylasqan 133 universitet penen ilimiy mákemelerinde jumıs isleydi. Registraciyalanǵan gravitaciyalıq tolqınlarǵa sáykes keliwshi signaldıń forması massaları shama menen Quyashtıń massasınan 36 hám 29 ese úlken bolǵan eki qara qurdımnıń qosılıwınıń nátiyjesinde payda bolatuǵın gravitaciyalıq tolqınlarǵa sáykes keledi. Payda bolǵan qara qurdımnıń massası Quyashtıń massasınan shama menen 62 ese úlken. Sekundtıń onnan bir úlesine teń waqıt ishindegi nurlanǵan gravitaciyalıq nurlardıń energiyası Quyashtıń massasınan 3 ese úlken massaǵa ekvivalent. Demek, Álemde qara qurdımlardıń bar ekenligi haqqındaǵı gipoteza 2016-jıldan baslap tastıyıqlandı dep juwmaq shıǵarıw kerek.

Jerdiń "qara qurdım" ǵa aylanıwı ushın onıń radiusınıń qanday bolatuǵınlıǵı esaplayıq. Máseleni sheshiwdiń bir neshe jolı bar. Mısalı qara qurdım dep ekinshi kosmoslıq tezliktiń shaması (yaǵnıy parabolalıq tezliktiń shaması) jaqtılıqtıń tezligine teń bolǵan obъektti aytıwǵa boladı. Bunday jaǵdayda parabolalıq

$$c = \sqrt{2G\,\frac{m}{r}}$$

Bul ańlatpadan qara qurdımnıń radiusı ushın

$$r = 2G\,\frac{m}{c^2}$$

ańlatpasın alamız. Eger usı ańlatpaǵa Jerdiń massasın hám jaqtılıqtıń tezliginiń kvadratınıń mánislerin qoysaq $r \approx 0.8$ sm shamasına iye bolamız.

Quyashtı qara qurdımǵa aylandırıw ushın onıń radiusın 3 km ge shekem kishireytiw kerek.

Eskertiw: Radiusı gravitaciyalıq radiusqa teń bolǵan obъektlerdi qara qurdımlar dep atawǵa bolmaydı. Radiusı gravitaciyalıq radiusqa teń bolǵan sferanıń betin "waqıyalar gorizontı" dep ataydı. Qara qurdım usı sferanıń orayında jaylasqan. Onıń sızıqlı ólshemlerin ádette nolge teń dep esaplaydı. Waqıyalar gorizontı arqalı ishten sırtqa qaray hesh qanday materiya (yamasa signal) shıǵa almaydı (sebebi ekinshi kosmoslıq tezlik jaqtılıqtıń vakuumdaǵı tezligine teń).

Kosmologiyalıq turaqlı. Ádette gravitaciya teoriyası teńlemelerine qoyılatuǵın ulıwmalıq talap tásirge iye variaciyalıq principti

$$s = -mc\int ds - \frac{c^3}{16\pi G}\left[\int R dV + \int 2\Lambda dV\right] \tag{1}$$

túrinde jazıwǵa ruqsat etedi. Bul ańlatpada V arqalı 4 ólshemli kólem berilgen. Usınday jaǵdayda Eynshteyn teńlemeleri mına túrge iye boladı:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R - \Lambda g_{ik} = \frac{\chi}{c^2}T_{ik}. \tag{2}$$

Bul ańlatpadaǵı Λ kosmologiya turaqlısı, al bul shamaǵa proporcional bolǵan shamalar (ΛdV, Λg_{ik}) kosmologiyalıq aǵzalar dep ataladı. Λ aǵzaları joq teńlemeler de qozǵalıs teńlemelerin óz ishine alatuǵın bolǵanlıqtan (2)-ańlatpada lokallıq lorenc-invariantlılıq shártin qanaatlandıradı. Sonlıqtan burınǵıday $T^{k}_{i;k} = 0$.

(2) túrindegi teńleme 1917-jılı A.Eynshteynniń «Kosmologiya máseleleri hám ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyası» maqalasında payda boldı. Bul maqalanıń 1-betiniń fragmenti 3-súwrette berilgen. Sonlıqtan 1917-jıldı házirgi zaman kosmologiyasınıń tuwılǵan jılı dep ataymız.

A.Eynshteyn dárhál-aq óziniń 1915-jıldıń aqırına taman tolıq dúzilgen gravitaciya teńlemesiniń stacionar sheshimge iye bolmaytuǵınlıǵın túsindi. Al sol waqıtları Álemniń stacionar, waqıtqa baylanıslı ózgermeydi degen pikir húkim súrgen edi. Sonlıqtan Eynshteynniń aldında stacionar sheshimlerge iye teńlemeler kerek boldı. Sonlıqtan ol óziniń teńlemesine Λ aǵzasın qosıp (2) túrindegi teńlemeni aldı.

Álbette Λ aǵzanı teńlemege kirgiziwdegi A.Eynshteynniń aldına qoyǵan maqset nolge teń emes ortasha tıǵızlıq $T^{0}_{0} = \rho c^{2} = \mathrm{const}$ qa sáykes stacionar sheshim alıw edi. Bunıń ushın $\Lambda = \frac{8\pi G\rho}{3c^{2}}$ dep alıw kerek. Biraq qızılǵa awısıw qubılısı baqlanǵannan keyin A.Eynshteyn Λ=0 bolǵan teńlemege qaray kóbirek awdı. 1930-jıllarǵa shekem Λ ≠ 0 bolǵandaǵı stacionar hám stacionar emes sheshimler tereń izertlendi. Biraq Λ aǵzasınań nolge teńligi yamasa teń emes ekenligi, eger nolge teń bolmaǵanda qanday mániske teń bolatuǵınlıǵı elege shekem anıq sheshilgen joq.

Kosmologiya turaqlısınıń fizikalıq sheshimi neden ibarat? Fizika ushın onıń qanday áhmiyeti bar?

Λ niń ózine tartatuǵın bir qásiyeti onıń ólsheminde ([Λ=sm^{-2}]). Usınday kóz-qarastan Λ bos keńisliktiń joq qılıwǵa bolmaytuǵın iymekligi (qıysıqlıǵı) bolıp tabıladı (materiyasız hám gravitaciyalıq tolqınlarsız bos keńisliktiń). Biraq tartılıs teoriyası iymeklikti materiyanıń energiyası, impulsı hám basımı menen baylanıstıradı. Λ nı maydan teńlemeniń oń tárepine ótkerip mına túrge iye teńlemeni alamız:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi G}{c^{4}} T_{ik} - g_{ik}\Lambda. \qquad (3)$$

Λ≠0 boljawı Λ = 0 bolǵan jaǵdaydaǵıday, biraq barlıq kólemdi

massasınıń tıǵızlıǵı $\rho_{\Lambda} = \frac{c^{2}\Lambda}{8\pi G}$,

energiyasınıń tıǵızlıǵı $\varepsilon_{\Lambda} = \frac{c^{4}\Lambda}{8\pi G}$,

basımı $P_{\Lambda} = \varepsilon_{\Lambda}$ bolǵan bos keńisliktiń gravitaciyalıq maydan payda etetuǵınlıǵın óz ishine aladı. Eger $\Lambda = 10^{-55}$ sm^{-2} dep boljasaq $\rho_{\Lambda} = 10^{-28}$ g/sm^{3}, $\varepsilon_{\Lambda} = 10^{-7}$ erg/sm^{3}. Usınday mániste vakuumnıń energiyasınıń tıǵızlıǵı menen basımı (kerim tenzorı) haqqında aytamız.

Biziń ρ_{Λ} hám ε_{Λ} haqqındaǵı boljawlarımızdıń sebebinen teoriyanıń relyativistlik invariantlıǵı buzılmaydı, ρ_{Λ} penen R_{Λ} shamaları bir birine salıstırǵanda qozǵalatuǵın barlıq koordinatalar sistemasında birdey (Lorenc boyınsha túrlendirilgende).

Kosmologiya turaqlısı Λ nolge teń bolmasa da absolyut shaması boyınsha júdá kishi. Sonıń ushın Λ tek kosmologiyada ǵana áhmiyetke iye bola aladı. Sonlıqtan tómende eki jaǵdaydı da (nolge teń bolǵan, nolge teń bolmaǵan) qaraymız.

Eynshteyn teńlemeleriniń stacionar sheshimleri. Biz dáslep A.Eynshteynniń 1917-jılı shıqqan «Kosmologiya máseleleri hám ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyası» maqalasın talqılaymız. Bul maqala mına sózler menen baslanadı:

«Puassonnıń differenciallıq teńlemesi

$$\Delta\varphi = 4\pi K\rho \qquad (4)$$

nıń materiallıq noqattıń qozǵalıs teńlemesi menen Nyutonnıń uzaqtan tásirlesiw teoriyasın almastıra almaytuǵınlıǵı belgili. Keńisliktegi sheksizlikte potencial φ diń belgili bir shekke umtılatuǵınlıǵın qosıw zárúr. Salıstırmalıqtıń ulıwmalıq principinen tap sonday awhaldıń tartılıs teoriyasında da orın alatuǵınlıǵı kelip shıǵadı. Eger biz keńislikte sheksizlikke shekem tarqalǵan dúnyanı qaraytuǵın bolsaq, onda differencial teńlemelerge keńisliklik sheksizlik ushın shegaralıq shártlerdi kirgiziwimiz kerek.

Planetalıq sistemaǵa baylanıslı máseleni qarap shıqqanımızda keńisliklik sheksizlikte tartılıstıń barlıq potencialları $g_{\mu\nu}$ turaqlı bolıp qalatuǵın koordinata sistemasın saylap aldıq. Biraq Álemniń úlken bólimlerin qaraǵanımızda usınday shegaralıq shártlerdiń durıs bolatuǵınlıǵı kózge anıq kórinip turǵan joq. Usı waqıtqa shekem bul áhmiyetli másele boyınsha alınǵan nátiyjeler tómende bayanlanǵan.»

Bunnan keyin maqalada Nyuton teoriyası talqılanadı. A.Eynshteyn bılay jazadı:

«Keńisliktegi sheksizlikte φ ushın turaqlı shektiń bolıwı formasındaǵı Nyutonnıń shegaralıq shártinen materiyanıń tıǵızlıǵınıń sheksizlikte nolge aylanatuǵınlıǵı kelip shıǵatuǵınlıǵı belgili. Haqıyqatında da átirapında materiyanıń gravitaciyalıq maydanı tutası menen alǵanda sferalıq simmetriyaǵa (orayǵa) iye bolatuǵın taptıq dep esaplayıq. Bunday jaǵdayda Puasson teńlemesinen qashıqlıq r diń ósiwi menen sheksizlikte φ diń bazı bir shekke teń bolıwı ushın ortasha tıǵızlıq ρ nıń $1/r^2$ qa salıstırǵanda tezirek nolge umtılatuǵınlıǵı kelip shıǵadı. Bunday mániste sheksiz úlken massaǵa iye bola alatuǵın bolsa da Nyuton dúnyası shekli.

Bunnan aspan deneleri tárepinen shıǵarılǵan nurlanıw Nyuton dúnyasın ortadan radial baǵıtlar boyınsha keyninen izsiz joǵalıw ushın taslap ketedi. Biraq bunday awhal tutas aspan denesinde bolıwı múmkin emes…

Eger gaz molekulalarınıń Bolcman bólistiriliwin juldız sistemasın stacionar jıllılıq qozǵalısındaǵı gaz dep qarap juldızlar ushın qollanatuǵın bolsaq Nyuton áleminiń bolıwınıń múmkin emes ekenligin kóremiz. Sebebi oray menen sheksizlik arasındaǵı shekli mánistegi potenciallar ayırmasına tıǵızlıqlardıń shekli qatnası sáykes keledi. Demek sheksizliktegi nollik tıǵızlıq oraydaǵı nollik tıǵızlıqqa alıp keledi.

Kórinip turǵanınday, bul qıyınshılıqlardan Nyuton teoriyası ramkalarında turıp shıǵıw múmkin emes. Usıǵan baylanıslı soraw tuwıladı: Nyuton teoriyasın modifikaciyalaw jolı menen sol qıyınshılıqlardan shıǵıw múmkin emes pe? Bunıń ushın eń aldın dıqqat qoyıp qabıl etiw ushın joldı kórsetemiz, sebebi bul jol keyingi talqılawlardı jaqsıraq túsinip alıw ushın xızmet etedi. Puasson teńlemesiniń ornına jazamız

$$\Delta\varphi - \lambda\varphi = 4\pi K\rho \qquad (5)$$

Bul ańlatpadaǵı λ bazı bir universal turaqlı shama bolıp tabıladı.

Eger ρ_0 massanıń tarqalıwınıń turaqlı tıǵızlıǵı bolsa, onda

$$\varphi = -\frac{4\pi K}{\lambda}\rho_0 \qquad (6)$$

(5)-teńlemeniń sheshimi bolıp tabıladı. Bul sheshim qozǵalmaytuǵın juldızlardıń keńisliktegi teń ólshewli tarqalıwına sáykes keledi. (6)-formuladaǵı tıǵızlıq ρ_0 dúnyalıq keńisliktegi materiyanıń haqıyqıy ortasha tıǵızlıǵına teń bolıwı kerek. Bul sheshim materiya menen ortasha teń ólshewli toltırılǵan sheksiz úlken keńislikke sáykes keledi.»

Usınday jollar menen A.Eynshteynde waqıtqa baylanıslı ózgermeytuǵın (stacionar) sheksiz úlken álem payda bolǵan. Materiya menen bir tekli toltırılǵan bul álemdi biz Eynshteyn álemi dep ataymız.

Eynshteynniń biz qarap atırǵan maqalasınıń 3-paragrafı «Teń ólshewli tarqalǵan materiyası bar keńisliktegi tuyıq dúnya» dep ataladı. Bul paragrafta biz mınaday jaǵdaylar menen tanısamız:

«Materiyanıń tarqalıwı haqqındaǵı bizge belgili maǵlıwmatlar ishindegi eń áhmiyetlisi juldızlardıń salıstırmalı tezlikleriniń jaqtılıqtıń tezliginen júdá kishi ekenliginde. Sonlıqtan men dáslep mınaday juwıq boljawdı talqılawlarımızǵa tiykar etip alaman: materiya kóp waqıtlar dawamında tınıshlıqta turatuǵın koordinata sisteması bar dep esaplaymız. Usı koordinata sistemasında materiyanıń tenzorı mınaday ápiwayı túrge iye boladı:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{matrix}$$

Tıǵızlıqtıń bólistiriliwi skalyar ρ (ortasha) keńisliktegi koordinatalardıń funkciyası bolıwı múmkin. Biraq biz dúnyanı keńislik boyınsha tuyıq dep boljaymız. Sonlıqtan ρ turǵan orınnan ǵárezli emes degen gipotezanı qabıl etemiz hám bul gipoteza bunnan keyingi talqılawlarımızdıń tiykarında turadı.

Gravitaciya maydanına keletuǵın bolsaq

$$\frac{d^2x_\nu}{ds^2} + \begin{Bmatrix} \alpha\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} \frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} = 0$$

qozǵalıs teńlemesinen statikalıq gravitaciyalıq maydanda tek g_{44} orınǵa baylanıssız bolǵanda materiallıq noqattıń tınıshlıqta turatuǵınlıǵı kelip shıǵadı.

Maqalanıń 4-paragrafı «Gravitaciyalıq maydanǵa kirgiziw zárúr bolǵan qosımsha aǵza haqqında» dep ataladı. Onda

«Iqtıyarlı túrde saylap alınǵan koordinatalar sistemasındaǵı gravitaciyalıq maydannıń teńlemeleri mına túrge iye boladı:

$$G_{\mu\nu} = -\chi(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T). \tag{7}$$

Bul ańlatpada

$$G_{\mu\nu} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{Bmatrix} \mu\ \nu \\ \alpha \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mu\ \alpha \\ \beta \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \nu\ \beta \\ \alpha \end{Bmatrix} + \frac{\partial^2 \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \begin{Bmatrix} \mu\ \nu \\ \alpha \end{Bmatrix}\frac{\partial^2 \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}.$$

...(Bul) teńlemeler sisteması salıstırmalıq postulatına hám (5)-túrdegi Puasson teńlemesin ulıwmalastırıwǵa sáykes bir ulıwmalastırıwǵa múmkinshilik beredi. Ulıwmalıq kovariantlıqtı buzbay (keyingi) teńlemeniń shep tárepine házirshe belgisiz fundamentallıq konstanta λ ge kóbeytilgen fundamentallıq tenzor $g_{\mu\nu}$ dı qosa alamız. Onda (sol teńlemeniń) ornına

$$G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\chi\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T) \right) \quad (8)$$

teńlemesin alamız. Bul teńleme λ shamasınıń jetkilikli dárejede kishi mánisleri ushın Quyash sistemasında júrgizilgen baqlawlarǵa sáykes keledi. Bul teńleme impuls penen energiyanıń saqlanıw nızamların da qanaatlandıradı...»

5-paragraf esaplawlar nátiyjelerin bayanlaydı hám «Esaplawlar. Nátiyje» dep ataladı. Onda bılay delinedi:

«Biziń kontinuumnıń barlıq noqatları birdey bolǵanlıqtan esaplawlardı mısalı koordinataları $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ bolǵan bir noqat ushın orınlaǵan jetkilikli boladı.

Bunday jaǵdayda $g_{\mu\nu}$ diń ornına ($g_{\mu\nu}$ lar differenciallanbaǵan yamasa bir ret differenciallanǵan orınlar ushın) mına mánislerdiń qoyılıwı múmkin:

$$\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Solay etip dáslep mına ańlatpa alınadı:

$$G_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_1}\begin{Bmatrix} \mu & \nu \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2}\begin{Bmatrix} \mu & \nu \\ 2 \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_3}\begin{Bmatrix} \mu & \nu \\ 3 \end{Bmatrix} + \frac{\partial^2 \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu}.$$

...barlıq (8)-teńlemeleriniń eger

$$-\frac{2}{R^2} + \lambda = -\frac{\chi\rho}{2}, \quad -\lambda = -\frac{\chi\rho}{2}$$

qatnasları orınlanǵan jaǵdayda qanaatlandırılatuǵınlıǵı kelip shıǵadı. YAmasa

$$\lambda = \frac{\chi\rho}{2} = \frac{1}{R^2}.$$

Solay etip eger teń salmaqlıq halında saqlanatuǵın ortasha tıǵızlıq ρ, sferalıq keńisliktiń radiusı R hám onıń kólemi $2\pi^2R^3$ belgili bolsa jańadan kirgizilgen universallıq konstanta λ niń mánisin anıqlaw múmkin boladı. Biziń kóz-qarasımız boyınsha Álemniń tolıq massası shekli hám

$$M = \rho 2\pi^2 R^3 = 4\pi^2 \frac{R}{\chi} = \frac{\sqrt{32}\pi^2}{\sqrt{\chi^3\rho}}$$

shamasına teń.».

Házirgi waqıtlardaǵı maǵlıwmatlar boyınsha $\rho \approx 10^{-30}$ g/sm³, al Álemniń radiusı bolsa R $\approx 10^{28}$ cm. Demek

$$M_{Álem} = 2\pi^2 R^3\rho \approx 2\cdot 10^{56} \text{ g}.$$

Eger Quyashtıń massasınıń $2\cdot 10^{33}$ g ekenligin esapqa alsaq, onda $M_{Álem}/M_{Quyash} = 10^{24}$ ekenligi kelip shıǵadı. Bul házirgi waqıtları qabıl etilgen maǵlıwmatlarǵa tolıq sáykes keledi.

Eynshteyn teńlemelerin ayırım kosmologiyalıq máselerdi sheshiwde paydalanıw. Fridman kosmologiyası. Ulıwmalıq talaplar. Eger Álem bir tekli hám izotrop bolsa, onıń geometriyası Robertson-Uoker metrikası menen beriledi:

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2\right]. \tag{9}$$

Bul ańlatpada k = +1, 0, -1 (+1 jabıq, 0 keńisligi tegis hám -1 ashıq modeller ushın). R(t) funkciyasınıń waqıtqa ǵárezliligi menen k shamasın anıqlaw ushın Eynshteyn teńlemeleri qollanılatuǵın bolsa alınǵan keńislik-waqıt Fridman modeli dep ataladı (geypara waqıtları, ásirese kosmologiya turaqlısı nolge teń bolmaǵan jaǵdaylarda bul modeldi Lemetr modeli dep te ataydı). R(t) dan alınǵan eki birinshi tuwındı házirgi dáwirler ushın (házirgi dáwirdi 0 indeksi menen belgileymiz) Xabbl turaqlısı

$$H_0 \equiv \left(\frac{dR}{dt}\right) R \ \ (R = R_0 \text{ de}) \tag{10}$$

hám ásteleniw parametri dep atalatuǵın

$$q_0 \equiv \left[\left(\frac{d^2R}{dt^2}\right)R\right] \Big/ \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 \ \ (R = R_0 \text{ de}) \tag{11}$$

parametriniń járdeminde parametrlestiriledi.

Kosmologiyada ulıwma aytqanda zatlar keńeyiw hám qısılıw hallarında boladı. Sonıń ushın bazı bir baqlawshıǵa jetken jaqtılıq nurı óziniń deregine salıstırǵanda qızılǵa yamasa fioletke awısqan bolıp shıǵadı. Bul awısıw z shaması menen táriyiplenip, mına formula boyınsha anıqlanadı:

$$1 + z \equiv \frac{\nu_{nur\,l.}}{\nu_{baql.}} = \frac{\lambda_{nur\,l.}}{\lambda_{baql.}}. \tag{12}$$

Kópshilik jaǵdaylarda z tiń shaması baqlawshıdan qashıqlıqqa baylanıslı monotonlı ózgeredi, sonlıqtan hárdayım «z qızılǵa awısıwında turǵan obъekt» degen túsinikti paydalanadı.

Meyli ρ hám r arqalı Álemdi toltırıp turǵan massa-energiyaǵa iye materiyanıń tıǵızlıǵı menen basımı belgilengen bolsın. Onda ρ >> r jaǵdayda zatlar basım model, al r ≈ (1/3)ρ nurlanıw basım bolǵan model haqqında gáp etiledi.

Biz dáslep

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)\right] \tag{13}$$

túrinde jazılǵan Robertson-Uoker metrikasın

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)\left[d\chi^2 + \Sigma^2(\chi)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)\right] \tag{14}$$

yamasa

$$ds^2 = R^2(\eta)\left[-d\eta^2 + d\chi^2 + \Sigma^2(\chi)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)\right] \tag{15}$$

túrinde jazıwǵa bolatuǵınlıǵın kórsetemiz. Bul ańlatpalardaǵı

$$\Sigma^2(\chi) = \begin{cases} k = +1 \ ushın \ sin^2\chi, \\ k = 0 \ ushın \ \chi^2, \\ k = -1 \ ushın \ sh^2\chi. \end{cases}$$

Meyli

$$r = \begin{cases} k = +1 \ ushın \ sin\chi, \\ k = 0 \ ushın \ \chi, \\ k = -1 \ ushın \ sh\chi \end{cases}$$

bolsın. Onda

$$dr = \begin{cases} k = +1 \ ushın \ \cos\chi, \\ k = 0 \ ushın \ d\chi, \\ k = -1 \ ushın \ ch\chi, \end{cases}$$

$$\frac{dr^2}{1 - kr^2} = \begin{cases} d\chi^2, \\ d\chi^2, \\ d\chi^2. \end{cases}$$

Demek

$$\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 = d\chi^2 + \Sigma^2(\chi) d\Omega^2,$$

bul jerde joqarıda alınǵanınday

$$\Sigma^2(\chi) = \begin{cases} k = +1 \ ushın \ sin^2\chi, \\ k = 0 \ ushın \ \chi^2, \\ k = -1 \ ushın \ sh^2\chi. \end{cases}$$

Endi t ózgeriwshisinen η ózgeriwshisine

$$dt=R(\eta)d\,\eta$$

qatnasınıń járdeminde túrlendiriwdi anıqlaymız. Onda

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)(d\chi^2 + \Sigma^2 d\Omega^2 = R^2(\eta)(-d\eta^2 + d\chi^2 + \Sigma^2 d\Omega^2).$$

Endi Robertson-Uoker metrikasınıń Eynshteynniń maydan teńlemelerin qanaatlandıratuǵınlıǵın talabınan shıǵıp ideal suyıqlıq penen toltırılǵan kosmologiyalıq Fridman modeli ushın dinamikalıq teńlemelerdi keltirip shıǵarayıq.

Ortonormirovkalanǵan joldas koordinata sistemasında

$$T_0^0 = -\rho, \ T_r^r = T_\varphi^\varphi = T_\varphi^\varphi = p. \tag{16}$$

Demek (keri izge iye) energiya-impuls tenzorı $\overline{\overline{T}}$ mınaday qurawshılarǵa iye boladı:

$$T_0^0 = -\frac{1}{2}(\rho + 3p), \ T_1^1 = \frac{1}{2}(\rho - p). \tag{17}$$

Bul shamanı 1/(8πG) ǵa kóbeytemiz hám alınǵan nátiyjeni Rishshi tenzorına kóbeytemiz. Bul tenzordıń qurawshıları

$$R_0^0 = 3\ddot{R}/R, \qquad (18)$$

$$R_1^1 = \frac{1}{R^2}(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k).$$

Bunnan

$$3\ddot{R} + 4\pi G(\rho + 3p)R = 0, \qquad (19)$$

$$R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k - 4\pi G(\rho - p)R^2 = 0$$

teńlemelerin alamız.

Eger (19)-teńlemedegi birinshi teńlemeni $\ddot{R}$ ge bólsek, onda

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2 \qquad (20)$$

teńlemesin alamız.

$$\frac{1}{2} d\left[\left(\dot{R}\right)^2\right] \Big/ dR = \ddot{R} \qquad (21)$$

ekenligin eske túsiremiz. Onda (19)-teńlemelerdiń birinshi teńlemesinen

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dR}\left(\frac{8\pi G}{3}\rho R^2\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dR}\left(\dot{R}\right)^2 = \ddot{R} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3p)R,$$

$$\frac{d}{dR}\left(\rho R^2\right) = -(\rho + 3p)R, \qquad (22)$$

$$\frac{d}{dR}\left(\rho R^2\right) = -3pR^2$$

ekenligine iye bolamız hám (19)-teńlemelerdiń ekinshi teńlemesin alamız.

Endi Fridman modeli ushın ρ, k hám q shamaları arasındaǵı baylanıslardı keltirip shıǵaramız.

$$H \equiv \dot{R}/R$$

anıqlamasınan hám (20)-teńlemeden

$$\frac{8\pi G\rho}{3} = \frac{k}{R^2} + H^2 \qquad (23)$$

teńlemesin tikkeley alamız. Al eger usı teńlemeni R boyınsha differenciallasıq, (21)-teńleme menen birinshi tártipli basqa

$$d(\rho R^3)/dR = -3pR^2$$

teńlemeni hám

$$q \equiv -\ddot{R}R/\dot{R}^2$$

anıqlamasın esapqa alsaq biz

$$-8\pi Gp = \frac{k}{R^2} + H^2(1-2q) \tag{24}$$

teńlemesine iye bolamız.

Eger ρ >> r bolsa (24)-teńlemeniń shep tárepin oń tárepine salıstırǵanda esapqa almay ketiwge boladı (bul modelde zatlar basım bolǵan jaǵdayǵa sáykes keledi) hám biz

$$\frac{k}{R^2} = (2q-1)H^2 \tag{25}$$

ańlatpasına iye bolamız. (25)-ańlatpanı (23)-ańlatpaǵa qoysaq

$$\frac{8\pi G\rho}{3} = 2qH^2$$

ańlatpasın alamız.

Eger r = ⅓ρ bolsa, onda (9-15) penen (9-16) dan ρ nı joǵaltıp

$$\frac{k}{R^2} = (q-1)H^2$$

ekenligin kóremiz. Al k/R^2 aǵzasın joq etiw barısında

$$\frac{8\pi G\rho}{3} = qH^2$$

ekenligine isenemiz.

Solay etip basım p menen ρ arasındaǵı hár qıylı qatnaslar hár qıylı teńlemelerge alıp keledi eken.

Endi birinshi tártipli Fridman teńlemesin R(t) ǵa qarata eki jaǵday ushın sheshemiz. Birinshi jaǵdayda materiyanıń tıǵızlıǵına zatlar, ekinshi jaǵdayda materiyanıń tıǵızlıǵına nurlanıw tiykarǵı úles qosatuǵın bolsın. Házirgi dáwirdiń parametrlerin N_0 hám q_o arqalı belgileymiz jáne usı shamalardıń mánisleriniń turaqlı ekenligin eskertip ótemiz.

Birinshi jaǵday. Zatlar materiyanıń basqa túrlerine qaraǵanda kóp bolǵan jaǵdayda basımdı esapqa almay ketiwimizge boladı. Bunday awhalda massa-energiyanıń tıǵızlıǵı Álemniń kóleminiń úlkeyiwi menen kemeyedi:

$$\rho = \rho_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^3. \tag{26}$$

$$d\eta = dt/R$$

ańlatpasınıń járdeminde jańa waqıtlıq koordinatanı anıqlaymız. Bunday jaǵdayda Fridman teńlemesi bılayınsha jazıladı:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \left(\frac{dR/d\eta}{R^2}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 - \frac{k}{R^2} \tag{27}$$

yamasa

$$\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{dR}{d\eta}=2\frac{d}{d\eta}\sqrt{R}=\left(\frac{8\pi G}{3}\rho_0 R_0^3-kR\right)^{1/2}. \tag{28}$$

Alıńǵan teńlemeni integrallasaq mınaǵan iye bolamız:

$$\frac{1}{2}\eta=\int_0^{R^{\frac{1}{2}}}\frac{dR^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{8}{3}\pi\rho_0 R_0^3-kR\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{29}$$

integralın intergallaw k shamasınıń hár qıylı mánislerinde hár qıylı nátiyjeleridi beredi.

1) $k=+1$ teńligi orınlanǵanda

$$\frac{1}{2}\eta=\arcsin\frac{R^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{8}{3}\pi\rho_0 R_0^3\right)^{\frac{1}{2}}},$$

2) $k=0$ teńligi orınlanǵanda

$$\frac{1}{2}\eta=\frac{R^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{8}{3}\pi\rho_0 R_0^3\right)^{\frac{1}{2}}},$$

3) $k=-1$ teńligi orınlanǵanda

$$\frac{1}{2}\eta=arcSh\frac{R^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{8}{3}\pi\rho_0 R_0^3\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Endi

$$q_0=\frac{4\pi G}{3}\frac{\rho_0}{H_0^2} \tag{30}$$

hám

$$R_0^2=\frac{k}{(2q_0-1)H_0^2}, \quad (k=\pm 1) \tag{31}$$

ekenligin esapqa alamız. (31)-ańlatpanıń shep tárepiniń oń mániske iye ekenliginene k=sign(2q_0-1) ekenliginen túsinikli. Demek (29)-ańlatpada mınaǵan iye bolamız:

$$\frac{8\pi}{3}\rho_0 R_0^3=\frac{2q_0}{H_0|2q_0-1|^{3/2}}, \quad k=\pm 1.$$

Endi (29)-teńlemeni R_0 ge qarata sheshsek mına ańlatpalarǵa iye bolamız:

$k=+1$ ushın

$$R=\frac{q_0}{H_0(2q_0-1)^{\frac{3}{2}}}(1-\cos\eta),$$

$k=0$ ushın

(32)

$$R=\frac{1}{12}H_0^2R_0^3\eta^2,$$

$k=-1$ ushın

$$R=\frac{q_0}{H_0(2q_0-1)^{\frac{3}{2}}}(\operatorname{sh}\eta-1).$$

Eń keyninde $dt=Rd\eta$ shamasın integrallap mınalardı alamız:

$k=+1$ ushın

$$t=\frac{q_0}{H_0(2q_0-1)^{\frac{3}{2}}}(\eta-\sin\eta),$$

$k=0$ ushın

$$t=\frac{1}{12}H_0^2R_0^3\eta^3, \qquad (33)$$

$k=-1$ ushın

$$t=\frac{q_0}{H_0(2q_0-1)^{\frac{3}{2}}}(\operatorname{sh}\eta-\eta).$$

Joqarıda sheshilgen máselede $k=0$ bolǵan jaǵday ushın juwaptan R_0 di joq qılıw múmkin emes ekenligin ańsat ańlaw múmkin. Bul fakt usınday jaǵdaylarda Álemniń keńisliklik qashıqlıqlarda ıqtıyarlı masshtablarǵa iye bolatuǵınlıǵın, al onıń geometriyasınıń waqıttıń barlıq momentlerinde birdey bolıp «kórinetuǵınlıǵın» sáwlelendiredi. Sonlıqtan R_0 dıń san mánisi qálegen fizikalıq ólshenetuǵın shamaǵa kirmeydi.

Biz (32)- menen (33)-ańlatpalardan áhmiyetli juwmaqlar shıǵaramız:

A). **Álem jabıq bolǵan jaǵday**

$$(k=+1).R=\frac{q_0}{H_0(2q_0-1)^{\frac{3}{2}}}(1-\cos\eta).$$

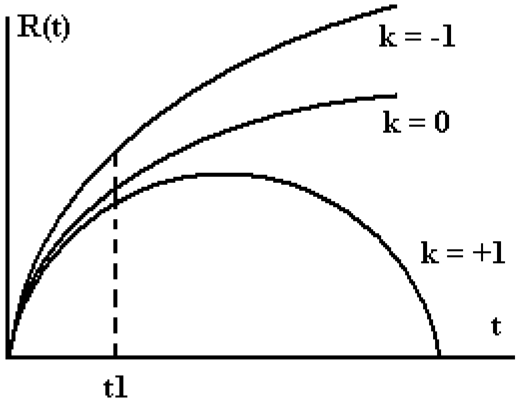
Demek R dıń mánisi η nıń mánisine ǵárezli (1-Sosη) nızamı. Eger η = 0 hám η=nπ bolsa $(n=0,1,2,\ldots)$ $R=0$. Al $\eta=\left(\frac{n}{2}\right)\pi$ bolǵan jaǵdaylarda

$$R=\frac{q_0}{H_0(2q_0-1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Biz kórgen mısallardıń úshewinde de R=0 bolǵan jaǵdaylardı kóremiz. Sonıń menen birge bul jaǵday η = 0 de t = 0 bolatuǵın mánislerge sáykes keledi hám t → 0 de R → 0, al tıǵızlıq ρ = ∞ ekenligi kelip shıǵadı. Jabıq modelde R=0 jaǵdayı dáwirli túrde qaytalanadı, al ashıq hám tegis modellerde t = 0 (η = 0) bolǵan waqıt momentinde tek bir ret orın aladı. R(t) funkciyası t = 0 (η = 0) bolǵan momentten baslap monotonlı túrde ósedi. R dıń maksimallıq mánisi [álbette tek jabıq modelde $(k=+1)$]

$$R_{max}=2\frac{q_0}{H_0(2q_0-1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Al ashıq hám tegis modellerde R dıń mánisi sheksiz ósedi. Bul jaǵday tómende keltirilgen súwrette berilgen.



R = R(t) ǵárezliligi. Bul súwretke Λ = 0, bir tekli hám izotrop álem sáykes keledi. k = +1 bolǵan jaǵdayda keńeyiw qısılıw menen almasadı, k = 0 hám k = -1 bolǵan jaǵdaylarda keńeyiw sheksiz dawam etedi. t1 waqıt momenti házirgi Álemge sáykes keledi. Úsh jaǵdayda da R(t) = 0 bolǵan jaǵday baqlanadı (singulyarlıq)

Solay etip t=0 mánisindagi R→0 izotrop modeldiń keńislik-waqıtlıq modeliniń ayrıqsha noqatı bolıp tabıladı (usı gápler jabıq modeldegi R=0 bolǵan barlıq noqatlarǵa da sáykes keledi). Eger R menen t arasındaǵı baylanıstı anıqlaytuǵın bolsaq [(32)-ańlatpa menen (33)-ańlatpanı salıstırıp tabamız hám ol baylanıs $R = \sqrt{const \cdot t}$ túrinde boladı], onda t nıń belgisi ózgergende R(t) shamasınıń jormal mániske iye bolatuǵınlıǵın dálilleydi. Interval ushın ańlatpadaǵı g_{ij} shamasınıń barlıq tórt qurawshısı teris mániske, al g anıqlawshısı oń mániske iye bolǵan bolar edi. Fizikalıq jaqtan bunday metrika mániske iye emes. Bul metrikanı ayrıqsha noqattan t nıń teris mánislerine qaray dawam ettiriwdiń fizikalıq mániske iye bolmaytuǵınlıǵın kórsetedi.

Ekinshi jaǵday. Nurlanıw basım bolǵan waqıtları joldas keńisliktiń berilgen kólemindegi massa-energiya turaqlı bolmaydı. Bul jaǵdayda fotonlardıń qızılǵa awısıwınıń esabınan tıǵızlıqtıń qosımsha kemeyiw effekti orın aladı. Sonlıqtan

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^4. \qquad (34)$$

(27)-ańlatpanıń analogı mına teńleme bolıp tabıladı:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \left(\frac{dR/d\eta}{R^2}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^4 - \frac{k}{R^2}$$

yamasa

$$\frac{dR}{\left(\frac{8}{3}\pi G\rho_0 R_0^4 - kR^2\right)} = d\eta.$$

Bul teńlemeniń sheshimi mına túrge iye boladı:

$$R = \sqrt{\frac{8\pi}{3} G\rho_0 R_0^4}. \qquad (35)$$

Bul jaǵdayda da k nıń +1, 0 hám -1 bolǵan mánisleri ushın sáykes

$sin\eta$,

η,

$sh\eta$

sheshimlerine iye bolamız.

(30)-ańlatpanıń ornına endi

$$q_0 = \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_0}{H_0^2},$$

al (31)-ańlatpanıń ornına

$$R_0^2 = \frac{k}{(q_0 - 1)H_0^2}, \quad (k = \pm 1)$$

ańlatpalarına iye bolamız. Demek (35)-formula endi

$$\frac{8\pi}{3} G\rho_0 R_0^4 = \begin{array}{l} k = +1 \; ushın \dfrac{q_0}{(q_0 - 1)^2 H_0^2}, \\ k = 0 \; ushın \; H_0^2 R_0^4 \end{array} \qquad (36)$$

sheshimlerin alamız. Al $dt = Rd\eta$ qatnasın integrallaw bizge mınanı beredi:

$$t = \begin{cases} k = +1 \;\; ushin \;\; \dfrac{1}{H_0}\left[\dfrac{q_0^{1/2}}{q_0 - 1}\right](1 - \text{Cos}\eta) \\ k = 0 \;\; ushin \;\; \dfrac{1}{2} H_0 R_0^2 \eta^2. \\ k = -1 \;\; ushin \;\; \dfrac{1}{H_0}\left[\dfrac{q_0^{1/2}}{q_0 - 1}\right](\text{Ch}\eta - 1) \end{cases} \qquad (37)$$

Endi jáne bir kosmologiyalıq máseleni shesheyik. Jabıq Fridman álemin qarayıq (k=+1). Bul álemniń barlıq ómiri ushın ketken waqıttıń tek júdá kishi bólegin nurlanıw dáwiri tutatuǵın bolsın. Joqarıda alınǵan nátiyjelerden paydalanıp usı álem «tuwılǵannan» baslap ólgenge shekem fotonnıń neshe ret álemdi aylanıp shıǵatuǵınlıǵın esaplayıq.

Eger Fridman metrikasında waqıt $d\eta = dt / R$ ańlatpası menen esaplanatuǵın «razvertka múyeshi» menen anıqlanatuǵın bolsa radius boyınsha tarqalatuǵın foton ($d\varphi = d\upsilon = 0$) ushın jazılǵan interval mına túrge iye:

$$0 = ds^2 = R^2(\eta)(-d\eta^2 + d\chi^2).$$

Bul ańlatpadaǵı $d\chi^2 = dr^2/(1-r^2)$ shaması 3 lik sferadaǵı «trigonometriyalıq» radiallıq koordinata. (32)- hám (35)-teńlemelerden álemniń jasaw waqıtı (R funkciyasınıń eki noli arasındaǵı aralıq) $\Delta\eta = 2\pi$ aralıǵına sáykes keledi. Demek sol foton álemdi tek bir ret aylanıp shıǵadı eken.

Solay etip Eynshteyn teńlemeleri izotrop hám bir tekli álem ushın ápiwayılasadı eken. Bunday álemdi Fridman álemi dep ataymız. Al Fridman álemi ushın kóplegen máselelerdi sol ápiwayılastırılǵan Eynshteyn teńlemelerin paydalanıp sheshiwge boladı eken.

Inflyaciya (kosmoslıq inflyaciya, Álmniń inflyaciyası yamasa Álemniń úrleniwi), yaǵnıy eń dáslepki waqıtları Álemniń asa úlken tezlikler menen keńeyiwi (úrleniwi) ideyası XX ásirdiń 80-jılları payda boldı. Álemniń baqlawlarda anıqlanǵan qásiyetlerin túsindiriwdegi inflyaciyalıq paradigmanıń tabıslarınıń nátiyjesinde bul teoriya bárshe tárepinen qabıl etilgen teoriyaǵa aylandı. Házirgi waqıtları inflyaciyalıq scenariylerdiń sanı oǵada kóp hám olardıń ishinen ámelde júzege keletuǵın scenariydi (wakıyalardıń izbe-izligin) ayırıp alıw qıyın másele bolıp tabıladı. Inflyaciyalıq modellerdiń sanı turaqlı túrde ósip kelmekte [31-35]. Sonlıqtan biz xaotikalıq inflyaciya dep atalatuǵın inflyaciya bazasında dúzilgen inflyaciyalıq modeldiń qásiyetlerin dodalaymız hám sáykes máselelerdi sheshemiz.

Inflyaciyalıq dáwirdi táriplewdiń eń ápiwayı hám keń tarqalǵan usılınıń mazmunı tómendegidey:

Bazı bir skalyar maydannıń (inflatonnıń) bar ekenligi boljap aytıladı hám bul skalyar maydan ózi payda etken gravitaciya maydanı menen birlikte evolyuciyaǵa ushıraydı. Bul maydannıń potencialına qoyılatuǵın bazı bir shártlerde (bunday shártlerdi tómende dodalaymız) de Sittter modelin eske túsiretuǵın awhal payda boladı. Basqa sóz benen aytkanda gorizonttıń bergi tárepindegi keńisliktiń sızıqlı ólshemleri eksponenciallıq nızam menen tez ósedi. Bul jaǵday inflyaciyalıq dáwirdiń eń baslı ózgesheligi bolıp tabıladı.

Skalyar maydannan hám onıń gravitaciyalıq maydanınan turatuǵın sistemanıń lagranjianınıń tıǵızlıǵı bılayınsha jazıladı:

$$L = \sqrt{-g}\left\{\frac{1}{16\pi G}R + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\varphi)\right\} \tag{38}$$

Bul ańlatpada $g = \det(g_{\mu\nu})$, G arqalı gravitaciyalıq turaqlı belgilengen.

Inflyaciyalıq processtiń skalyar maydannıń energiyasınıń úlken bolǵan tıǵızlıqlarında effektivli túrde júretuǵınlıǵın aldın ala eskertemiz. Energiyanıń bunday úlken tıǵızlıqları kvant fluktuaciyalarınıń sebebinen payda bola aladı. Anıqsızlıq qatnasın paydalanıp fluktuaciyanıń ólshemlerin bahalaymız.

$$\Delta E\Delta t \sim 1 \quad (\hbar = 1) \tag{39}$$

Apiwayılıq ushın dáslep $V(\varphi) = \frac{m^2\varphi^2}{2}$ dep alamız. m arqalı skalyar maydannıń massası belgilengen. Al maydannıń fonlıq mánisi $\varphi_0 = 0$ dep esaplaymız, yaǵnıy tómengi energiyalardı qaraymız. Fluktuaciyalar sebeplik penen baylanısqan oblastlarda payda boladı. Bul bolsa onıń (fluktuaciyanıń) keńislik ólshemlerine $\Delta l \sim \Delta t$ túrindegi shek qoyadı. Lagranjianı (2-17) túrde jazılǵan sistemanıń energiyası

$$E = \int d^3x\,\sqrt{-g}\,\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + V(\varphi) \tag{40}$$

túrinde jazıladı. Bul ańlatpada skalyar qıysıqlıq R esapqa alınbaǵan, sebebi esaplaw tek skalyar maydan φ ushın islenedi. Joqarıda aytılanlardı esapqa alıp (40)-integraldınıń shamasın bahalaymız hám (39)-teńlikten fluktuaciyanıń keńisliktegi ólshemin tabamız:

$$\Delta l^3\Delta t\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\Delta\varphi^2\right] \sim \Delta\varphi^2\Delta l^2[1 + m^2\Delta l^2] \sim 1.$$

Demek fluktuaciya amplitudası dárejesi boyınsha

$$\Delta\varphi \sim \frac{1}{\Delta l\sqrt{1 + m^2\Delta l^2}}.$$

shamasına barabar eken. Biraq bul ulıwmalıq ańlatpa bolıp tabıladı. Onıń tiykarında berilgen keńisliklik ólshemge iye fluktuaciyalardıń energiyasın esaplaw múmkin. Mısalı elektrázzi hám kúshli tásirlesiwlerdiń simmetriyasınıń buzılıwınıń dárejesin anıqlawǵa boladı. Bul jaǵdayda $\Delta l \sim \frac{1}{M_{GUT}} \sim \frac{1}{M_{Pl}}$. Bul ańlatpada M_{Pl} arqalı Plank massası, al M_{GUT} arqalı tórt tásirlesiwdiń birlesiwine sáykes keliwshi massa belgilengen, $M_{GUT} \sim 10^{16}$ GeV, $M_{Pl} \sim 10^{-5}$ g $\sim 10^{19}$ GeV. $M_{Pl}^2 = \frac{1}{G}$ yamasa $M_{Pl}^2 = \frac{1}{8\pi G^2}$. Eger tábiyiy túrdegi m≪ M_{GUT} boljawın qabıl etsek ańlatpalarımız onnan da ápiwayılasadı. Bunday jaǵdayda potencial energiyanıń fluktuaciyaları

$$\Delta V \sim m^2 M_{GUT}^2,$$

al kinetikalıq energiyanıń fluktuaciyaları

$$\Delta E \sim M_{GUT}^4.$$

Biz usı ańlatpalardıń járdeminde bizdi qorshaǵan keńisliktegi maydanlardıń kvantlıq fluktuaciyalarınıń tıǵızlıǵı júdá joqarı bolǵan energiyalarǵa iye oblastlardı payda etedi eken. Sırttan qaraǵan baqlawshınıń kóz-qarası boyınsha bunday fluktuaciyalardıń jasaw waqıtı júdá az. Joqarıda qarap ótilgen mısalda jasaw waqıtı 10^{-40} sek. Fluktuaciya iyelegen keńisliktegi oblasttıń ólshemi ~ 10^{-30} sm di quraydı. Bul kishi shamalar Plank shamalarına salıstırǵanda úlken shamalar bolıp tabıladı. Sonlıqtan bunday oblastlar ishinde Eynshteyn teńlemelerin standart túrde paydalanıw múmkinshiligine iye bola alamız. Al ishte turǵan baqlawshınıń kóz- qarasına tómende itibar beremiz.

Skalyar maydannıń teńlemesi (2-16) ańlatpadan kelip shıǵadı:

$$\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi\right) + \sqrt{-g}V'(\varphi) = 0. \qquad (40)$$

Keńisliktiń metrikasın ádettegidey dep boljaymız. Keńisliktiń bir tekliligine baylanıslı skalyar maydan φ diń de tarqalıwındaǵı bir teklilikti boljaymız hám φ = φ(t), yaǵnıy skalyar maydan tek waqıttıń funkciyası bolıp qaladı. Bunday jaǵdayda joqarıdaǵı (41)-ańlatpa ápiwayılasadı:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V(t) = 0. \qquad (42)$$

Skalyar maydannıń energiyasınıń $\rho = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi)$ ekenligin esapqa alsaq jáne bir teńlemeni alamız. Bunday jaǵdayda Xabbl parametriniń formulasın bılanınsha jaza alamız:

$$H^2 = \frac{8pG}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi)\right). \qquad (43)$$

Bul $\varphi(t)$ hám $a(t)$ dinamikalıq ózgeriwshileri ushın jazılǵan ekinshi teńleme bolıp tabıladı. (43)-ańlatpadaǵı $\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2$ qosılıwshısı kinetikalıq energiyaǵa (waqıt boyınsha alınǵan tuwındınıń tezlikke sáykes keletuǵınlıǵın bilemiz), al $V(\varphi)$ potencial energiyaǵa sáykes keledi. Sonlıqtan H^2 shamasınıń (yaǵnıy $H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2$ shamasınıń) tolıq energiyaǵa sáykes keletuǵınlıǵın ańǵaramız.

Inflyaciyalıq process ushın eń áhmiyetli móment φ skalyar maydannıń (inflatonnıń) ástelik penen ózgeriwi bolıp tabıladı. Bunday jaǵdayda (43)-ańlatpa hátte Λ = 0 bolǵan jaǵdayda da Sitter keńisligindegidey qásiyetke iye boladı. Materiallıq noqattıń ádettegi mexanikası menen uqsaslıqtı atap ótemiz. Bul jerde ástelik penen qozǵalıs haqqında gáp boladı, eger súykelis ushın juwapker bolǵan $3H\dot{\varphi}$ qosılıwshınıń shaması úlken bolsa, yaǵnıy

$$3H|\dot{\varphi}| \gg |\ddot{\varphi}|. \qquad (44)$$

Bul jaǵday teńlemelerdi jáne de ápiwayılastırıwǵa múmkinshilik beredi. Haqıyqatında da (44)-teńsizlikti paydalanıp (42)-teńlemeni bılayınsha kóshirip jazamız:

$$3H|\dot{\varphi}| + V'(t) = 0. \tag{45}$$

Demek.

$$V'(\varphi) \sim 3H\dot{\varphi} \gg \ddot{\varphi}$$

teńsizligine kelemiz. Birinshi hám aqırǵı aǵzanı φ shamasına kóbeytip hám integrallawdan keyin biz izlep atırǵan teńsizlikti alamız:

$$\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi). \tag{46}$$

Bul teńsizlik kinetikalıq energiyanıń potencial energiyaǵa salıctırǵanda kishi ekenligin bildiredi. Demek inflyaciyanıń barıcında kinetikalıq energiya az ózgerislerge ushıraydı dep juwmaq shıǵaramız. Sonıń menen birge $V \cong const$ hám ucınıń menen birge (43) tegi Xabbl parametri de derlik turaklı, yaǵnıy

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \cong \sqrt{\frac{8\pi G}{3} V(\varphi)}. \tag{47}$$

(47)-teńleme $a(t) \sim \exp(Ht)$ túrindegi sheshimge iye boladı hám masshtablıq faktordıń eksponenciallıq ócetuǵınlıǵın bildiredi. Demek fizikalıq qashıqlıqlar da de Sitter keńisligindey ózgerislerge ushıraydı degen sóz. Bul tań qalarlıq jaǵday emes. Sebebi skalyar maydannıń (inflatonnıń) shama menen turaklı potencialı φ shamasın kosmologiyalıq turaqlı sıpatında interpretaciyalaw múmkin.

Ulıwma salıstırmalıq teoriyasınıń ulıwmalıq áhmiyeti hám alternativ teoriyalar haqqında. Ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyası haqqında joqarıda keltirilgen maǵlawmatlar menen bir qatar Internet tarmaǵı arqalı alınǵan kóp sanlı ilimiy maǵlıwmatlar tiykarında tómendegidey juwmaqlar shıǵarıw múmkin:

1. Ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyası baqlanatuǵın astronomiyalıq effektlerdi dál túsindiredi (planetalardıń traektoriyalarına dúzetiwler kirgiziw, jaqtılıqtıń jiyiliginiń ózgeriwi, nurlardıń iymeyiwi, radiosignallardıń belgili bir aralıqlardı ótkende keshigiwi);

2. Ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyası Álemniń tutası menen alǵandaǵı eń ulıwmalıq qásiyetlerin túsindiredi. Qara qurdımlardıń bar ekenligi boljandı. Qara qurdımlar túsiniginiń járdeminde rentgen qos sistemalarındaǵı, galaktikalar menen kvazarlardıń yadrolarındaǵı qubılıslar tabıslı túrde túsindiriledi.

3. Gravitaciyalıq tolqınlardıń bar ekenligi boljap aytıldı. Olardıń haqıyqatında da tábiyatta bar ekenligi óz ishine pulsarlardı alıwshı qos juldızlardıń qozǵalısınan anıqlandı.

4. Tartılıs teoriyasın geometriyalıq jaqtan formulirovkalaw keńislik-waqıtlıq mnogoobraziyanıń qálegen noqatında hám qálegen erkin qozǵalıwshı baqlawshınıń dúnyalıq sızıǵı boylap lokallıq inerciallıq koordinatalardı engiziwdiń múmkinshiligin avtomat túrde óz ishine aladı. Bunday koordinatalar sistemasında salmaqsızlıq orın aladı al joǵaltılmaytuǵın gravitaciyalıq tásir qorshaǵan ortalıqtı tasıw-qaytıw xarakterinde deformaciyalaydı. Teoriyada salmaq maydanı hám koordinata sistemasınıń tezleniwshi qozǵalısı arasındaǵı lokallıq ekvivalentlik principi orınlanadı. Tájiriybe ekvivalentlilik principin tastıyıqlaydı.

5. Tartılıs teńlemeleri materiyanıń qozǵalısı menen keńislikti toltırıp turǵan maydannıń ózgerisine belgili bir shekler qoyadı. Dara jaǵdayda noqatlıq bólekshe ushın qozǵalıs teńlemesiniń ózi keńislik-waqıttıń geometriyasınıń saldarı bolıp tabıladı. Ulıwma jaǵdayda sol sheklewler gravitaciyalıq kúshlerdiń tásirin esapqa alǵandaǵı energiya, impuls hám moment ushın balans teńlemeleri túrine iye boladı.

Usı atap ótilgen ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyasınıń 5 ózgesheliginiń ózi bul teoriyanıń áhmiyetin hám durıslıǵın ayqın sáwlelendiredi.

Eger kosmologiyaǵa keletuǵın bolsaq biz tómendegilerge toqtap ótemiz:

Eynshteyn teńlemeleriniń qollanılıw oblastları kishi kashıqlıqlar menen materiyanıń úlken tıǵızlıqlarında sheklenbegen (bul gápler kishi qashıqlıqlar menen úlken tıǵızlıqlarda teńlemelerdiń ishki qarama-qarsılıqlarǵa alıp kelmeytuǵınlıǵınıń saldarında aytılǵan). Bunday maǵanada aytqanda keńislik-waqıtlıq metrikanıń ózgesheliklerin izertlew tolıǵı menen korrektli jumıs bolıp tabıladı. Sonıń menen birge sonday qashıqlıqlar menen úlken tıǵızlıqlarda kvantlıq qubılıslardıń basım bolıp ketetuǵınlıǵına gúmán joq. Biraq bunday qubılıslar haqqında házirgi teoriya hesh nárse bilmeydi. Tek bolajaqta ǵana tartılıs teoriyası menen kvant teoriyasınıń sintezi klassikalıq teoriyanıń qaysı nátiyjeleriniń haqıyqıy mánislerin saqlaytuǵınlıǵın anıqlay aladı. Qalay degen menen Eynshteyn teńlemeleriniń sheshimlerinde ayırıqsha jaǵdaylardıń payda bolıw fakti tereń fizikalıq mániske iye boladı dep esaplaymız.

Biraq usı aytılǵanlarǵa qaramastan, ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyasına alternativlik teoriyalar payda bolmaqta. Nelikten alternativlik teoriyalar payda bolmaqta? Usı sorawǵa baylanıslı eki tendenciyanı atap ótemiz:

Birinshi tendenciya ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyasın klassikalıq (kvantlıq emes) gravitaciya oblastındaǵı durıs emes hám qanaatlandırmaytuǵın teoriya dep daǵazalaydı. Máseleniń bunday etip qoyılıwınıń ózinshe nyuansları bar. Ekinshi jaǵdaylar ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyası járdeminde esaplanǵan ayırım shamalardıń eksperimentlerde anıqlanǵan shamalarǵa dál sáykes kelmewinde. Tájiriybeler bunday teoriyalardıń uzaq waqıt jasap atırmaǵanlıǵın kórsetedi.

Alternativlik teoriyalardıń eń belgilileriniń biri A.A.Logunovtıń basshılıǵında dóretilgen gravitaciyanıń relyativistlik teoriyası bolıp tabıladı. Bul hám basqa da alternativ teoriyalardıń kópshiligi gravitaciyanı keńislik-waqıttıń geometriyasınıń ózgesheligi emes, al haqıyqıy fizikalıq maydan (mısalı elektromagnit maydanı, yadro kúshleri maydanı hám basqalar) sıyaqlı maydan dep qaraydı. Demek sol teoriyalardıń avtorları teoriyanıń mazmunına emes, al formasına qayıl emes. Mısalı elektromagnit maydanı Maksvell elektrodinamikası tiykarında tolıq túsindiriledi hám elektromagnit maydanı haqıyqıy fizikalıq maydan bolıp tabıladı (elektromagnit maydanın Faradey-Maksvell tipindegi fizikalıq maydan dep ataymız, bunday kóz qarastan qaraǵanda ulıwma salıstırmalıq teoriyasındaǵı gravitaciya maydanı fizikalıq maydan emes, al keńislik-waqıttıń iymeyiwi ekenligi biz kórdik). Onıń (elektromagnit maydanınıń) energiya-impuls tenzorı sáykes túrlendiriw hám saqlanıw nızamlarına iye jaqsı hám lokallıq anıqlanǵan fizikalıq shama bolıp tabıladı. Ulıwma salıstırmalıq teoriyasınıń standart «geometriyalıq» formulirovkasında bolsa gravitaciyalıq energiyanıń lokalizaciyası anıq emes bolıp qaladı. Bul ulıwma salıstırmalıq teoriyasınıń eń tiykarǵı «kemshiligi» bolıp tabıladı.

2004-jılı «Uspexi fizisheskix nauk» jurnalınıń 6-sanında «Gravitaciyanıń relyativstlik teoriyasınıń avtorları A.A.Logunov, M.A.Mestvirishvili hám V.A.Petrovlardıń «Kak bılı otkrıtı uravneniya Gilberta-Eynshteyna» maqalası shıqtı. Bul maqalanıń avtorlarınıń maǵlıwmatları boyınsha gravitaciyalıq maydannıń teńlemelerine Gilbert penen Eynshteyn bir birinen ǵárezsiz eki túrli jol menen kelgen. Bul jollar hár qıylı edi, biraq bul jollar bir maqsetke alıp kelgen. Eki avtor da ózleriniń atlarınıń gravitaciyalıq maydannıń teńlemesinde turıwı ushın urınǵan. Al ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyası bolsa tolıǵı menen A.Eynshteynniń teoriyası bolıp tabıladı. Maqalanıń avtorlarınıń «salıstımalılıqtıń dara teoriyasınıń ańlatpalarınıń sızıqlı ortogonallıq túrlendiriwlerge qarata kovariant bolıwınıń zárúrligi postulatına súyengenligi sıyaqlı ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyası barlıq teńlemeler sistemasınıń anıqlawshısı (opredeliteli) 1 ge teń bolǵan túrlendiriwge qarata kovariantlılıǵın postulatına tiykarlanǵan. Bul teoriyanıń gózzallıǵı usı teoriyanı haqıyqatında da túsinetuǵın adamlardan jasırınıp qala almaydı, teoriya Gauss, Riman, Kristofel, Rishshi hám Livi-SHivitalar tárepinen rawajlandırılǵan absolyut differenciallıq esaplawdıń haqıyqıy shıńın ańgartadı» sózleri orınlı bolıp tabıladı.

Studentlerdiń óz betinshe úyreniwi ushın usınılatuǵın bazı bir materiallar

Iymek sızıqlı koordinatalar

Endi tórt ólshemli geometriyanı ıqtıyarlı koordinatalarda paydalanıwǵa qolaylı formada ańlatıwǵa baylanıslı máselelerdi qaraymız.

Dáslep bir x^0, x^1, x^2, x^3 koordinatalar sistemasın ekinshi x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 koordinatalar sistemasına túrlendiriwdi qaraymız.

$$x^i = f^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$$

Bul formulada f^i arqalı bazı bir funkciya belgilengen. Koordinatalardı túrlendirgende olardıń differencialları

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k \tag{3.1}$$

formulalarına sáykes túrlenedi.

Kontravariant 4 vektor dep sonday A^i tórt shamasınıń jıynaǵına aytılıp, koordinatalardı túrlendirgende olar ózleriniń differencialları

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k \tag{3.2}$$

sıyaqlı túrlenedi.

Meyli φ bazı bir skalyar bolsın. $\partial\varphi / \partial x^i$ tuwındısı koordinatalar túrlendirilgende

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \tag{3.3}$$

formulası boyınsha túrlenedi. *Kovariant 4 vektor* dep sonday A_i tórt shamasınıń jıynaǵına aytılıp, olar skalyardıń tuwındıları sıyaqlı túrlenedi:

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k. \tag{3.4}$$

Tap usınday jollar menen hár qıylı rangalardaǵı 4 tenzorlar anıqlanadı. Mısalı 2-rangalı A^{ik} kontravariant 4 tenzor dep eki kontravariant vektordıń kóbeymesi túrinde, yaǵnıy

$$A^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} A'^{lm} \tag{3.5}$$

nızamı boyınsha túrlenetuǵın 16 shamanıń jıynaǵına aytadı. 2-rangalı kovariant A^{ik} tenzorı

$$A_{ik} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^i} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} A'_{lm} \tag{3.6}$$

nızamına sáykes túrlenedi. Al A^l_k aralas 4 tenzorı bolsa

$$A^i_k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x'^m}{\partial x^k}A'^l_m \qquad (3.7)$$

formulaları boyınsha túrlenedi.

Berilgen anıqlamalar Galiley koordinatalarındaǵı 4 vektorlar menen 4 tenzorlardıń tábiyiy ulıwmalastırılıwı hám usıǵan muwapıq dx^i diffrencialları kontravariant, al $\partial\varphi / \partial x^i$ tuwındıları kovariant 4 vektor bolıp tabıladı[14].

Basqa 4 tenzorlardıń kóbeymesin qaytadan kóbeytiw yamasa ápiwayılastırıw arqalı 4 tenzorlardı Galiley koordinatalarında alıw qaǵıydaları iymek sızıqlı koordinatalar ushın da durıs boladı. Mısalı (2)- hám (3)- túrlendiriw nızamlarına sáykes eki A^iB_i 4 vektorlarınıń skalyar kóbeymesiniń haqıyqıtanda da invariant ekenligine iseniwge boladı.

$$A^iB_i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x'^m}{\partial x^i}A'^l B'_m = \frac{\partial x'^m}{\partial x'^l}A'^l B'_m = A'^i B'_i .$$

δ^i_k birlik 4 tenzorınıń anıqlaması iymek sızıqlı koordinatalarǵa ótkende ózgermeydi: onıń kurawshıları $i \neq k$ da $\delta^i_k = 0$, al $i = k$ da 1 ge teń. Eger A^k shaması 4 vektor bolıp tabılatuǵın bolsa, onda δ^i_k ǵa kóbeytiwde biz

$$A^k\delta^i_k = A^i$$

di, yaǵnıy jáne de 4 vektordı alamız. Usınıń menen birge δ^i_k shamasınıń tenzor ekenligi dálillenedi.

Iymek sızıqlı koordinatalardaǵı uzınlıq elementiniń kvadratı dx^i differenciallarınıń kvadratlıq forması bolıp tabıladı:

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k. \qquad (3.8)$$

Bul ańlatpadaǵı g_{ik} koordinatalardıń funkciyası. Bul g_{ik} shaması i hám k indekslerine qarata simmetriyalı:

$$g_{ik} = g_{ki}. \qquad (3.9)$$

g_{ik} nıń kontravariant tenzor dx^idx^k ǵa kóbeymesi (ápiwayılasıwı) skalyar bolǵanlıqtan g_{ik} nıń óziniń kovariant tenzor ekenligi kelip shıǵadı. Bul tenzor *metrlik tenzor* dep ataladı.

Eger

$$A_{ik}B^{kl} = \delta^i_k$$

teńligi orınlansa, onda A_{ik} hám B^{kl} tenzorları bir birine keri tenzorlar dep ataladı. Mısalı, dara jaǵdayda g^{ik} kontravariant metrlik tenzorı dep g_{ik} tenzorına keri bolǵan tenzorǵa aytamız, yaǵnıy

[14] Biraq usınıń menen bir waqıtta Galiley sistemasında x^i koordinatalarınıń ózleri (tek olardıń differencialları ǵana emes) de 4 vektordı quraydı. Al iymek sızıqlı koordinatalarda bunday awhal orın almaydı.

$$g_{ik}\, g^{ik} = \delta^{i}_{k}. \qquad (3.10)$$

Bir vektorlıq fizikalıq shama kontravariant qurawshılarda da, kovariant kurawshılarda da berile aladı. Al kontra- hám kvovariant qurawshıları arasındaǵı baylanıstı anıqlaytuǵın birden bir shamalar metrlik tenzordıń qurawshıları bolıp tabıladı. Usınday baylanıs

$$A^{i} = g^{ik} A^{k}, \quad A_{i} = g_{ik} A^{k}. \qquad (3.11)$$

Galiley koordinatalar sistemasında metrlik tenzor

$$g_{ik}^{(0)} = g^{ik(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (3.12)$$

qurawshılarına iye boladı. Usınıń menen birge (11)-formulalar $A^0 = A_0$, $A^{1,2,3} = -A_{1,2,3}$, baylanısların beredi[15].

Joqarıda aytılganlar tenzorlar ushın da durıs. Bir fizikalıq tenzordıń hár qıylı formaları arasındaǵı ótiw metrlik tenzordıń járdeminde

$$A^{i}{}_{k} = g^{il} A_{lk}, \; A^{ik} = g^{il} g^{km} A_{lm}$$

h.t.b. formulalar járdeminde ámelge asırıladı.

Tórt ólshemli vektorlardı qaraǵanımızda koordinatalardıń Galiley sistemasındaǵı e^{iklm} antisimmetriyalıq birlik tenzorı anıqlanǵan edi. Endi onı ıqtıyarlı túrde alınǵan koordinatalardıń iymek sızıqlı sistemasına túrlendiremiz hám onı endi E^{iklm} arqalı belgileymiz. $e^{0123} = 1$ (yamasa $e_{0123} = -1$) mánisleri boyınsha burınǵıday jollar menen anıqlanǵan shamalar ushın e^{iklm} belgilewin saqlaymız.

Meyli x'^{I} Galiley, al x'^{I} ıqtıyarlı iymek sızıqlı koordinatalar bolsın. Tenzorlardı túrlendiriwdiń ulıwmalıq qaǵıydasına sáykes

$$E^{iklm} = \frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{p}} \frac{\partial x^{k}}{\partial x'^{r}} \frac{\partial x^{l}}{\partial x'^{s}} \frac{\partial x^{m}}{\partial x'^{t}} e^{prst}$$

ǵa iye bolamız yamasa

$$E^{iklm} = J e^{prst}.$$

Bul ańlatpada J arqalı $\partial x^{i} / \partial x'^{p}$ tuwındılarınan quralǵan anıqlawshı belgilengen, yaǵnıy bul shama Galiley koordinatalarınan iymek sızıqlı kooridnatalarǵa túrlendiriwdiń yakobianı bolıp tabıladı:

---

[15] Sáykeslik haqqında gáp etip koordinatalardıń Galiley sistemasın biz qollanǵanımızda usınday koordinatalar sistemasın tek tegis 4 keńislikte saylap alıwǵa bolatuǵınlıǵın názerde tutıwımız kerek. Al iymek 4 keńislik haqqında gáp bolǵanda 4 keńisliktiń sheksiz kishi kólemdegi saylap alınǵan galiley koordinataları (bunday sistemanı barlıq waqıtta da saylap alıwǵa boladı) haqqında gáp etiw kerek. Usınday anıqlılıq kirgiziwdiń saldarınan shıǵarılǵan barlıq juwmaqlar ózgerissiz kaladı.

$$J=\frac{\partial(x^0,x^1,x^2,x^3)}{\partial(x'^0,x'^1,x'^2,x'^3)}.$$

Bul yakobiandı metrlik tenzor g_{ik} nıń anıqlawshısı arkalı ańlatıwǵa boladı (x^i sistemasında). Bunıń ushın metrlik tenzordıń túrleniw formulasın jazamız

$$g^{ik}=\frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x^k}{\partial x'^m}g^{lm(0)}$$

hám usı teńlikliń eki tárepinde turǵan shamalardan turatuǵın anıqlawshılardı bir biri menen teńlestiremiz. Keri tenzordıń anıqlawshısı $\left|g^{ik}\right|=1/g$. $\left|g^{lm(0)}\right|$ anıqlawshısı bolsa -1 ge teń ($\left|g^{lm(0)}\right|=-1$). Sonlıqtan 1/g = $-J^2$ ekenligine iye bolamız, bunnan $J=1/\sqrt{-g}$ ekenligi kelip shıǵadı.

Solay etip iymek sızıqlı koordinatalarda 4-rangalı birlik antisimmetriyalı tenzor

$$E^{iklm}=\frac{1}{\sqrt{-g}}e^{iklm} \tag{3.13}$$

túrinde anıqlanıwı kerek. Bul tenzordıń indekslerin túsiriw

$$e^{prst}g_{ip}g_{kr}g_{ls}g_{mt}=-ge_{iklm}$$

formulasınıń járdeminde ámelge asırıladı, sonlıqtan onıń kovariant qurawshıları

$$E_{iklm}=\sqrt{-g}e_{iklm}. \tag{3.14}$$

Galiley koordinata sistemasında $d\Omega'=dx'^0dx'^1dx'^2dx'^3$ boyınsha alınǵan integral x'^i ta skalyar bolıp tabıladı, yaǵnıy $d\Omega'$ elementi integrallaǵanda skalyar qásiyetine iye boladı (joqarıdaǵı paragraftı karańız). Iymek sızıqlı x^i koordinatalarına túrlengende integrallawdıń $d\Omega'$ elementi mınaǵan ótedi:

$$d\Omega'\to\frac{i}{J}d\Omega=\sqrt{-g}d\Omega.$$

Solay etip iymek sızıqlı koordinatalarda 4 kólem boyınsha integrallaǵanda $\sqrt{-g}d\Omega$ kóbeymesi invariant bolıp tabıladı[16].

Eń birinshi paragraftıń aqırında aytılǵan giperbet, bet hám sızıq boyınsha integrallaw elementleri iymek sızıqlı koordinatalarda da óz kúshin saqlaydı. Biraq biz bul jerde duallıq tenzorlardıń anıqlamasınıń azmaz ózgeretuǵınlıǵın aytıp ótiwimiz kerek. Úsh sheksiz kishi awısıwlardan qurılǵan giperbettiń «maydanınıń» elementi dS^{ikl} kontravariant

---

[16] Eger φ skalyar bolatuǵın bolsa, onda $d\Omega$ boyınsha integrallaǵanda invariant beretuǵın $\sqrt{-g}\varphi$ shamasın ádette *skalyar tıǵızlıq* dep ataydı. Usıǵan sáykes vektorlıq hám tenzorlıq tıǵızlıqlar $\sqrt{-g}A^i$, $\sqrt{-g}A^{ik}$ h.t.b. haqqında aytadı. Bul shamalar 4 kólem elementi $d\Omega$ ga kóbeytilgende vektordı yamasa tenzordı beredi (ulıwma aytqanda shekli oblast boyınsha $\int A^i\sqrt{-g}d\Omega$ integralı vektor bolıp tabılmaydı, sebebi A^i vektorınıń túrleniw nızamları oblasttıń hár kaylı noqatlarında hár kıylı).

antisimmetriyalıq tenzor bolıp tabıladı. Oǵan duallıq bolǵan vektor $\sqrt{-g}e_{iklm}$ tenzorına kóbeytiwdiń nátiyjesinde alınadı, yaǵnıy

$$\sqrt{-g}dS_i = -\frac{1}{6}e_{iklm}dS^{klm}\sqrt{-g}. \tag{3.15}$$

shamasına teń.

Tap usıǵan sáykes, eger df^{ik} sheksiz kishi awısıwlardan qurılǵan bet elementi bolatuǵın bolsa (eki ólshemli), onda oǵan duallıq bolǵan vektor bılayınsha anıqlanadı[17]:

$$\sqrt{-g}df^{*}_{ik} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}e_{iklm}df^{lm}. \tag{3.16}$$

Bizler burınǵıday $\frac{1}{6}e_{iklm}dS^{klm}\sqrt{-g}$, $\frac{1}{2}\sqrt{-g}e_{iklm}df^{lm}$ ushın sáykes dS_i hám df^{*}_{ik} belgilewlerin qaldıramız (olardıń $\sqrt{-g}$ ǵa kóbeymesi ushın emes). Hár qıylı integrallardı bir birine túrlendiriwdiń (14-19)-kaǵıydaları burınǵıday bolıp kaladı. Sebebi olardı keltirip shıǵarıw sáykes shamalardıń tenzorlıq xarakterinen ǵárezsiz formal xarakterge iye. Olardıń ishinde bizge giperbet boyınsha integraldı 4 kólem boyınsha integralǵa túrlendiriw ayrıqsha kerek boladı (Gauss teoreması). Bul túrlendiriw

$$dS_i \to d\Omega\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{3.17}$$

almastırıwı menen ámelge asadı.

Qashıqlıqlar hám waqıt aralıǵı

Ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyasında esaplaw sistemasın saylap alıw hesh qanday sheklenbegen; x^1, x^2, x^3 keńisliklik koordinataları deneniń keńisliktegi ornın anıqlaytuǵın qálegen shamalar bolıwı múmkin, al waqıtlıq koordinata x^0 ıqtıyarlı túrde júretuǵın saatlar járdeminde anıqlanadı. Usıǵan baylanıslı soraw tuwıladı: x^0, x^1, x^2, x^3 shamalarınıń qanday mánisleri boyınsha haqıyqıy qashıqlıqlar menen waqıt aralıqların tabıwǵa boladı?

Biz sol haqıyqıy waqıt aralıǵın τ arqalı belgileymiz hám onıń x^0 koordinatası menen baylanısın tabamız. Bunıń ushın keńisliktiń bir noqatında júz beretuǵın bir birine sheksiz jaqın eki waqıyanı karaymız. Bunday jaǵdayda sol eki waqıya arasındaǵı interval ds^2 tıń shaması $cd\tau$ dan basqa hesh nárse emes, bul jerde $d\tau$ arkalı eki waqıya arasındaǵı (haqıyqıy) waqıt aralıǵı. $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$ dep boljap ulıwmalıq $ds^2=g_{ik}dx^idx^k$ ańlatpasınan

$$ds^2 = c^2d\tau^2 = g^{00}(dx^0)^2$$

ekenligine iye bolamız. Bunnan

---

[17] Usı jaǵdaylarda x^i koordinatasınıń geometriyalıq mánisiniń kanday bolıwınan ǵárezsiz dS^{klm} hám df^{ik} elementleri sheksiz kishi awısıwlar dx^i, dx'^i, dx''^i lerden qurılǵan boladı. Bunday jaǵdayda dS_l, df^{*}_{ik} elementleriniń burınǵı formallıq mánisleri de óz kúshinde kaladı. Mısalı, dara jaǵdayda $dS_0=dx^1dx^2dx^3=dV$. Biz bunnan bılay dV belgisin úsh keńisliklik koordinatalardıń differenciallarınıń kóbeymesin belgilew ushın saqlap kalamız. Biraq barlıq waqıtta da keńisliklik kólemniń geometriyalıq elementiniń iymek sızıqlı koordinatalarda dV nıń ózi arqalı emes, al $\sqrt{\gamma}dV$ kóbeymesi arqalı beriletuǵınlıǵın umıtpaw kerek. Bul kóbeymede γ arqalı keńisliklik metrlik tenzordıń anıqlawshısı belgilengen (bul shama kelesi paragrafta tabıladı).

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}dx^0 \tag{4.1}$$

yamasa keńisliktiń bir noqatında júzege keletuǵın qálegen eki waqıya arasındaǵı waqıt ushın

$$\tau = \frac{1}{c}\int\sqrt{g_{00}}dx^0 \tag{4.2}$$

shamasın alamız.

Bul katnaslar x^0 koordinatasınıń ózgeriwi boyınsha haqıyqıy waqıt aralıǵın (yamasa keńisliktiń berilgen noqatı ushın *menshikli waqıttı*) anıqlaydı. Keltirilgen formulalardan g_{00} shamasınıń oń mániske iye ekenligi kórinip tur:

$$g_{00} > 0. \tag{4.3}$$

(3)-shárttiń mánisi menen g_{ik} tenzorınıń anıq signaturası (bas mánislerdiń belgisi) shártiniń mánisiniń ayırmasın atap ótiw zárúr.Usı shártlerdiń eiknshisin qanaatlandırmaytuǵın g_{ik} tenzorı qanday da bir haqıyqıy gravitaciyalıq maydanǵa (yaǵnıy keńislik-waqıttıń metrikasına) sáykes kele almaydı. (3)-shárttiń orınlanbawı sáykes esaplaw sistemasınıń haqıyqıy deneler tárepinen júzege kele almaytuǵınlıǵın bildiredi. Eger bas mánisler haqqındaǵı shártler usı jaǵdayda orınlanatuǵın bolsa, onda koordinatalardı zárúr bolǵanınsha túrlendirip g_{00} diń oń mániske iye bolıwına jetisiw múmkin (usınday sistemaǵa mısal retinde aylanıwshı koordinatalar sistemasın kórsetiw múmkin).

Endi kenisliktegi qashıqlıq bolǵan dl elementin anıqlaymız. Arnawlı salıstırmalıq teoriyasında dl di bir waqıt momentinde júzege keletuǵın bir birine sheksiz jaqın jaylasqan eki waqıya arasındaǵı kashıqlıq sıpatında anıqlaydı. Ulıwma aytqanda ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyasında bunı islewge bolmaydı, yaǵnıy $dx^0=0$ di ds ke qoyıp dl di anıqlawǵa bolmaydı. Sebebi gravitaciya maydanında keńisliktiń hár kıylı noqatlarındaǵı menshikli waqıt x^0 koordinatası menen hár qıylı bolıp baylanısqan.

dl shamasın anıqlaw ushın endi bılayınsha háreket etemiz.

Meyli keńisliktiń bazı bir B noqatınan oǵan sheksiz jaqın turǵan (koordinataları $x^\alpha + dx^\alpha$ bolǵan) A noqatına jaqtılıq signalı jiberilsin. Bunnan keyin signal tap sol jol boyınsha keri qaray jiberilsin. Usı ushın zárúr bolǵan (tek bir B noqatında ólshenetuǵın) waqıttıń s ǵa kóbeymesi sol eki noqat arasındaǵı qashıqlıqtıń eki eselengen mánisi bolıp tabıladı.

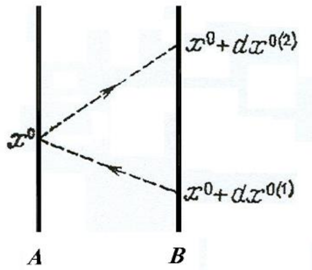
Keńisliklik hám waqıtlıq koordinatalardı ayırıp kórsetip intervaldı jazamız:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + g_{0\alpha}dx^0 dx^\alpha + g_{00}\left(dx^0\right)^2. \tag{4.4}$$

Bul ańlatpada da ádettegidey eki ret qaytalanatuǵın grek indeksleri boyınsha 1, 2, 3 mánisleri boyınsha summalaw názerde tutıladı. Birinshisi bir noqattan signaldıń ketiwi, al ekinshisi ekinshi noqatta sol signaldıń keliwi bolǵan waqıyalar arasındaǵı interval nolge teń. $ds^2 = 0$ teńlemesin dx^0 ge qarata sheshiwdiń nátiyjesinde signaldıń A hám B noqatları arasında eki baǵıtta tarqalıwına sáykes keletuǵın eki túbir alamız:

$$\begin{aligned} dx^{0(1)} &= \frac{1}{g_{00}}\left(-g_{0\alpha}dx^\alpha - \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})dx^\alpha dx^\beta}\right), \\ dx^{0(2)} &= \frac{1}{g_{00}}\left(-g_{0\alpha}dx^\alpha + \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})dx^\alpha dx^\beta}\right). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Eger x^0 arqalı A noqatına signaldıń kelip jetiw mometni belgilengen bolsa, onda onıń B dan jiberiliw hám keri qaray B ǵa qaytıp keliw mosentleri sáykes $x^0+dx^{0(1)}$ hám $x^0+dx^{0(2)}$ boladı. Bul jaǵday sxema túrinde mına súwrette keltirilgen:



Bunda tutas tuwrılar berilgen x^α hám $x^\alpha+dx^\alpha$ koordinatalarına sáykes keliwshi dúnyalıq sızıqlar, al shtrixlanǵan signallar ushın dúnyalıq sızıqlar[18]. Bir noqattan signaldıń jiberilip hám usın noqatta qabıl etiliwi arasındaǵı tolıq waqıttıń

$$dx^{0(2)} - dx^{0(1)} = \frac{2}{g_{00}}\sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})dx^\alpha dx^\beta}$$

ekenligi anıq. Sáykes keliwshi haqıykıy waqıttıń mánisi (1) ge baylanıslı $\sqrt{g_{00}}/c$ ǵa kóbeytiw, al eki noqat arasındaǵı dl qashıqlıǵı jáne c/2 ge kóbeytiw arqalı alınadı. Nátiyjede alamız:

$$dl^2 = \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}\right)dx^\alpha dx^\beta.$$

Bul ańlatpa biz izlep atırǵan keńisliklik koordinatalar elementi arqalı anıqlanatuǵın qashıqlıq ushın jazılgan ańlatpa bolıp tabıladı. Onı mına túrde kaytadan kóshirip jazamız:

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta. \tag{4.6}$$

Bul ańlatpadaǵı

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}} \tag{4.7}$$

shaması úsh ólshemli tenzor bolıp, metrikanı, yaǵnıy keńisliktiń geometriyalıq qásiyetlerin anıqlaydı. (7)-qatnaslar arqalı real keńisliktiń metrikası menen tórt ólshemli keńislik-waqıttıń metrikası arasındaǵı baylanıs ornatıladı[19].

---

18 Súwrette $dx^{0(2)}>0$, $dx^{0(1)}<0$ dep boljanǵan. Biraq bul shártli emes: $dx^{0(2)}$ penen $dx^{0(1)}$ dıń belgileri birdey bolıwı da múmkin. Usınday jaǵdaydaǵı A noqatına signaldıń kelip jetiw momenti $x^0(A)$ dıń mánisiniń signaldıń B noqatınan shıǵıw momenti $x^0(B)$ dan kishi bolıw faktı hesh qanday qarama-qarsılıqqa iye bolmaydı. Sebebi keńisliktiń hár qıylı noqatlarındaǵı saatlardıń júriwi qanday da bir usıl menen sinxronlastırılǵan dep boljanbaydı.

19 (6)- kvadratlıq forma oń mániske iye bolıwı kerek. Sonlıqtan onıń koefficientleri mına shártlerdi qanaatlandırıwı lazım:

Biraq sonı atap ótiw kerek, ulıwma aytqanda g_{ik} shaması x^0 den ǵárezli, demek (4.6)-keńisliklik metrika waqıtqa baylanıslı ózgeredi. Usı sebepke baylanıslı dl di integrallaya mániske iye bolmaydı – usınday integraldıń keńisliktiń berilgen noqatları arasındaǵı dúnyalıq sızıqtan alınǵanlıǵınan ǵárezli bolǵan bolar edi. Solay etip ulıwma aytqanda ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyasında deneler arasındaǵı anıq bir qashıqlıq haqqındaǵı mánis joǵaladı, al tek sheksiz kishi qashıqlıqlar xaqqında aytqanda ǵana óz kúshin saqlaydı. Qashıqlıqlar keńisliktiń shekli oblastında anıqlanatuǵın birden bir jaǵday bar: bul jaǵdayda g_{ik} waqıtqa ǵárezli bolmaytuǵın esaplaw sisteması bar bolıp, sonlıqtan bul sistemada $\int dl$ integralı keńisliklik iymeklik boyınsha bazı bir anıq mániske iye boladı.

Mınanı ańǵarıw paydalı: $\gamma_{\alpha\beta}$ tenzorı úsh ólshemli kontravariant $g^{\alpha\beta}$ tenzorına keri tenzor bolıp tabıladı. Haqıyqatında da qurawshılarda $g^{ik}g_{kl} = \delta^i_l$ teńligin jazıp

$$
\begin{aligned}
g^{\alpha\beta}g_{\gamma\beta} + g^{\alpha 0}g_{\gamma\beta} &= \delta^{\alpha}_{\gamma},\\
g^{\alpha\beta}g_{\beta 0} + g^{\alpha 0}g_{00} &= 0,\\
g^{0\beta}g_{\beta 0} + g^{00}g_{00} &= 1.
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

$g^{\alpha 0}$ di ekinshi teńlikten anıqlap hám onı birinshige qoyıp alamız:

$$-g^{\alpha\beta}\gamma_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}.$$

Usı teńliktiń durıslıǵın dálillew talap etilgen edi. Bul nátiyjeni basqasha da aytıw múmkin: $g^{\alpha\beta}$ shamaları (4.6)

$$\gamma^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta} \tag{4.9}$$

metrikasına juwap beretuǵın kontravariant úsh ólshemli metrlik tenzordı quraydı.

Jáne de bir áhmiyetli jaǵdaydı kórsetip ótemiz: g_{ik} hám $\gamma_{\alpha\beta}$ shamalarınan turatuǵın g hám γ anıqlawshıları bir biri menen ápiwayı

$$-g = g_{00}\gamma \tag{4.10}$$

qatnası menen baylanısqan.

Keyinirek qollanıw ushın kovariant qurawshıları

$$\gamma_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{vmatrix} > 0.$$

γ_{ik} nı g_{ik} arqalı ańlatıp bul shártlerdiń mına túrdi qabıl etetuǵınlıǵın ańsat tabıwǵa boladı:

$$\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad g < 0.$$

Bul shártlerdi (3)-shártler menen birge qálegen esaplaw sistemasındaǵı metrlik tenzordıń qurawshıları qanaatlandırıwı kerek. Bunday esaplaw sistemasınıń haqıyqıy deneler járdeminde ámelge asırılıwı múmkin..

$$g_\alpha = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} \qquad (4.11)$$

bolǵan úsh ólshemli g vektorın kirgizgen qolaylı. g nı keńisliktegi metrikası (6) bolǵan vektor sıpatında qarap onıń kontravariant qurawshıların $g^\alpha = \gamma^{\alpha\beta} g_\beta$ túrinde anıqlawımız kerek. (9) benen (8)-teńliktiń ekinshisinen

$$g^\alpha = \gamma^{\alpha\beta} g_\beta = -g^{0\alpha} \qquad (4.12)$$

ekenligin ańsat kóriwge boladı.

(8)-teńliklerdiń úshinshisinen kelip shıǵatuǵın

$$g^{00} = \frac{1}{g_{00}} - g_\alpha g^\alpha \qquad (4.13)$$

formulasın da atap ótemiz.

Endi ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyasındaǵı bir waqıtlılıq túsinigin anıqlawǵa ótemiz. Basqa sóz benen aytkanda keńisliktiń hár qıylı noqatlarında turǵan saatlardı sinxronxronlastırıw múmkinshiligi haqqındaǵı máseleni anıqlaymız (yaǵnıy bul saatlardıń kórsetiwlerin bir birine sáykeslendiriw).

Álbette bunday sinxronlastırıw eki noqat arasında jaqtılıq signalların almasıw menen ámelge asırıladı. Joqarıdaǵı súwrette keltirilgen bir birine sheksiz jaqın jaylasqan A hám B noqatları arasındaǵı signallardıń tarqalıw processin jáne qaraymız. A noqatındaǵı x^0 momenti menen B noqatındaǵı saattıń

$$x^0 + \Delta x^0 = x^0 + \frac{1}{2}(dx^{0(2)} + dx^{0(1)})$$

kórsetiwin bir waqıt dep qaraw kerek (bul moment signaldıń jiberiliw momenti menen signaldıń usı noqatqa keri qaray qaytıp keliw momentleriniń ortası bolıp tabıladı).

Bul ańlatpaǵa (5) ti qoyıp bir birine sheksiz jaqın noqatlarda bolıp ótetuǵın eki bir waqıtlı waqıyalar ushın x^0 «waqıttıń» mánisleriniń ayırmasın mına túrde tabamız:

$$\Delta x^0 = -\frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{g_{00}} \equiv g_\alpha dx^\alpha. \qquad (4.14)$$

Bul qatnas keńisliktiń qálegen sheksiz kishi kólemindegi saatlardı sinxronlastırıwǵa múmkinshilik beredi. Usınday sinxronlastırıwdı A noqatınan arman qaray ótip dawam etiw arqalı saatlardı sinxronlastırıw, yaǵnıy qálegen tuyıq emes sızıq boyınsha waqıyalardıń bir waqıtlılıǵın anıqlaw múmkin[20].

Tuyıq kontur boyınsha saatlardı sinxronlastırıw ulıwma aytqanda múmkin emes. Haqıyqatında da kontur boyınsha júrip dáslepki noqatqa qaytıp kelgende Δx^0 ushın nolge teń emes mánis alǵan bolar edik. Qala berse barlıq keńislik boyınsha saatlardı bir mánisli

[20] (14)-teńlikti g_{00} ge kóbeytip hám eki aǵzanı da bir tárepke shıǵarıp sinxronlastırıya shártin $dx_0 = g_{0i} dx^i = 0$ túrindekóz aldıǵa keltiriw múmkin: bir birine sheksiz jaqın bir waqıtta júzege keletuǵın wakıyatlar arasındaǵı «kovariant differencial» dx_0 diń mánisi nolge teń bolıwı kerek.

sinxronlastırıw múmkin bolmay shıǵadı. Al $g_{0\alpha}$ barlıq qurawshıları nolge teń bolǵan esaplaw sistemaları buǵan kirmeydi[21].

Barlıq saatlardı sinxronlastırıwdıń múmkin emes ekenligi ıqtıyarlı esaplaw sistemasınıń qásiyeti ekenligin, al keńislik-waqıttıń qásiyeti emes ekenligin atap ótemiz. Qálegen gravitaciya maydanında esaplaw sistemasın $g_{0\alpha}$ úsh shamasın nolge teń bolatuǵınday etip (hátte sheksiz kóp usıllar menen) saylap alıw hám soǵan sáykes barlıq saatlardı sinxronlastırıwdı ámelge asırıw mumkin boladı.

Arnawlı salıstırmalıq teoriyasında haqıykıy waqıttıń ótiwi bir birine salıstırǵanda qozǵalatuǵın saatlardı hár kıylı. Al ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyasında bolsa haqıyqıy waqıt bir esaplaw sistemasınıń hár qıylı noqatlarında hár qıylı bolıp ótedi. Bul keńisliktiń bazı bir noqatında ótetuǵın eki waqıyanıń arasındaǵı menshikli waqıttıń intervalı hám keńisliktiń basqa bir noqatındaǵı sol waqıyalar menen bir waqıtta bolıp ótetuǵın waqıyalar arasındaǵı waqıt intervalı, ulıwma aytqanda, bir birine teń emes.

Kovariant differenciallaw

Galiley koordinatalarında[22] A_i vektorınıń differencialları dA_i vektordı payda etedi, al vektordıń qurawshıları boyınsha alınǵan $\partial A_i/\partial x^k$ tuwındıları tenzordı payda etedi. Al iymek sızıqlı koordinatalarda bunday jaǵday orın almaydı: dA_i vektor emes, al $\partial A_i/\partial x^k$ tuwındı emes. dA_i keńisliktiń biri birine sheksiz jaqın eki hár qıylı noqatlarında turǵan vektorlardıń ayırması, al keńisliktiń hár kıylı noqatlarında vektorlar hár qıylı bolıp túrlenedi. Sebebi (5.2)-, (5,3)-túrlendiriw formulalarındaǵı koefficientler koordinatalardıń funkciyaları bolıp tabıladı.

Aytılǵanlardıń durıslıǵına tikkeley iseniwge boladı. Usı maqsette iymek sızıqlı koordinatalardaǵı dA_i differenciallarınıń túrleniw formulaların keltirip shıǵaramız. Kovariant vektor

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k$$

formulasına sáykes túrlenedi. Sonlıqtan

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k\, d\frac{\partial x'^k}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^l} dx^l.$$

Solay etip dA_i vektor sıpatında túrlenbeydi eken (usınday gápler kontravariant vektorlardıń differenciallarına da tiyisli). Tek bir jaǵdayda, eger ekinshi tuwındılar $\frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^l} = 0$, yaǵnıy x'^k shamaları x^k nıń sızıqlı funkciyaları bolsa, onda túrlendiriw formulaları

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k$$

túrine iye boladı (yaǵnıy bul dara jaǵdayda dA_i vektor sıpatında túrlenedi).

---

[21] Buǵan keńisliklik koordinatalardı anıqlaw ushın xızmet etetuǵın obъektler sistemasın saylap alıwǵa tásir etpeytuǵın $g_{0\alpha}$ waqıt koordinatasın ápiwayı túrlendiriwdiń nátiyjesinde nolge aylandırıw múmkin bolǵan jaǵdaylardı aytıp ótiw kerek.

[22] Bul jerde g_{ik} shamaları turaqlı bolatuǵın barlıq jaǵdaylar názerde tutıladı.

Endi biz iymek sızıqlı koordinatalarda tenzor rolin oynaytuǵın Galiley koordinatalarındaǵı $\partial A_i/\partial x^k$ tenzorın anıqlaw menen shuǵıllanamız. Basqa sóz benen aytqanda biz $\partial A_i/\partial x^k$ di Galiley koordinatalarınan iymek sızıqlı koordinatalarǵa túrlendiriwimiz kerek.

Iymek sızıqlı koordinatalarda vektor bolıp tabılatuǵın vektordıń differencialın alıw ushın bir birinen alınatuǵın eki vektordıń da keńisliktiń bir noqatında jaylasıyaı shárt. Basqa sóz benen aytqanda bir birine sheksiz jaqın jaylasqan vektorlardıń birewin qanday da bir jollar menen ekinshisi turǵan orınǵa kóshirip, bunnan keyin endi keńisliktiń bir noqatında jaylasqan eki vektordıń ayırmasın tabıw kerek. Al vektordı kóshiriw operaciyası Galiley koordinatalarında kórsetilgen ayırma ádettegi differencial dA_i ge sáykes keletuǵınday etip anıqlanıwı kerek. dA_i bir birine sheksiz jaqın turǵan eki vektordıń qurawshılarınıń ayırması bolǵanlıqtan, bul Galiley koordinataların qollanǵanda vektordı kóshiriw operaciyasınıń nátiyjesinde sol vektordıń kurawshılarınıń ózgermewiniń kerek ekenligin bildiredi. Bunday kóshiriw vektordı ózine ózin parallel qaldırıp kóshiriw bolıp tabıladı. Vektordı *parallel kóshirgende* onıń qurawshıları Galiley koordinatalarında ózgermey kaladı. Al iymek sızıqlı koordinatalardı qollanǵanda vektordıń qurawshıları, ulıwma aytqanda, ózgeredi. Sonlıqtan iymek sızıqlı koordinatalarda bir vektordı ekinshisi turǵan orınǵa kóshirgennen keyingi qurawshılarınıń ayırması kóshirmesten burıngı qurawshılarınıń ayırmasına teń bolmaydı.

Solay etip sheksiz jaqın eki vektordı salıstırıw ushın olardıń birinshisin ekinshisi turǵan noqatqa parallel túrde kóshiriw kerek. Qanday da bir kontravariant vektordı qaraymız; eger onıń mánisi koordinataları x^i bolǵan noqatta A^i bolsa, onda qońısılas $x^i + dx^i$ noqatında onıń mánisi $A^i + dA^i$ ge teń boladı. Usınıń nátiyjesindegi onıń ózgerisin δA^i arqalı belgileymiz. Bunday jaǵdayda endi bir noqatta jaylasqan eki vektor arasındaǵı ayırma

$$DA^i = dA^i - \delta A^i \tag{5.1}$$

shamasına teń.

SHeksiz kishi parallel kóshirgendegi vektordıń qurawshılarınıń δA^i ózgerisi usı qurawshılardıń ózleriniń mánislerinen ǵárezli boladı hám bul ǵárezliliktiń sızıqlı bolıwınıń zárúrligi shárt. Bul jaǵday vektorlardıń qosındısınıń olardıń hár birindey bolıp túrlendiriletuǵınlıǵınan tikkeley kelip shıǵadı. Solay etip δA^i

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{kl} A^k dx^l \tag{5.2}$$

túrine iye boladı. Bul ańlatpada Γ^i_{kl} arqalı túri koordinatalar sistemasın saylap alıwǵa baylanıslı bolǵan koordinatalardıń bazı bir funkciyaları belgilengen. Galiley sistemasında $\Gamma^i_{kl} = 0$.

Γ^i_{kl} shamalarınıń tenzordı payda etpeytuǵınlıǵı usı jerde kórinip tur. Sebebi bir koordinata sistemasında nolge teń tenzor basqa qálegen koordinata sistemasında da nolge teń boladı. Qıysayǵan keńislikte koordinatalar qanday etip saylap alınǵanda da barlıq Γ^i_{kl} ler barlıq orınlarda nolge teń bolmaydı.

Ekvivalentlik principi koordinatalar sistemasın sáykes túrde saylap alǵanda kenisliktiń berligne sheksiz kishi kóleminde gravitaciya maydanın joq etiwge boladı. Bunnan gravitaciya maydanınıń kernewliliginiń ornın iyeleytuǵın Γ^i_{kl} shamaların nolge aylandırıwdıń múmkin ekenligin kóremiz[23].

[23] Barlıq talqılawlarda usınday koordinatalar sistemasın názerde tutıw kerek, bul jerde biz qısqalıq ushın Galiley sisteması haqqında gáp etemiz. Usınıń menen birge barlıq dálillewler tek tegis 4 keńislikke emes, al iymek sızıqlı 4 keńislikke de tiyisli bolıp shıǵadı.

Γ^i_{kl} shamaların *baylanısqanlıq koefficienti* yamasa *Kristoffel simvolları* dep ataydı.

Biz tómende $\Gamma_{i,ki}$ shamaların da paydalanamız[24]. Bul shamalar bılayınsha anıqlanadı:

$$\Gamma_{i,ki} = g_{lm}\Gamma^m_{kl}. \tag{5.3}$$

Kerisi

$$\Gamma^i_{ki} = g^{im}\Gamma_{m,kl}. \tag{5.4}$$

Kovariant vektordıń parallel kóshiriwlerdegi qurawshılarınıń ózgerislerin Kristoffel simvolları menen baylanıstırıw ańsat. Bunıń ushın parallel kóshiriwlerde skalyarlardıń ózgermeytuǵınlıǵın ańǵarıwımız kerek. Mısalı, parallel kóshiriwde eki vektordıń skalyar kóbeymesi ózgermeydi.

Meyli A_i hám B^i bazı bir kovariant hám kontravariant vektorlar bolsın. Onda $\delta(A_iB^i)=0$ den iye bolamız:

$$B^i\delta A_i = -A^i\delta B^i = \Gamma^i_{kl} B^k A_i dx^l$$

yamasa indekslerdiń belgilewlerin ózgertip

$$B^i\delta A_i = \Gamma^k_{il} A_k B^i dx^l.$$

Bunnan B^i diń ıqtıyarlı ekenligin názerde tutamız hám parallel kóshiriwde kovariant vektordıń

$$\delta A_i = \Gamma^k_{il} A_k dx^i. \tag{5.5}$$

shamasına ózgeretuǵınlıǵı anıqlanadı.

(5.2) menen $dA^i = \dfrac{\partial A^i}{\partial x^l}dx^l$ di (5.1) ge qoyıp mınaǵan iye bolamız:

$$DA^i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{kl}A^k\right)dx^i. \tag{5.6}$$

Tap sonday jollar menen kovariant vektor ushın tabamız:

$$DA_i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^i} + \Gamma^k_{il}A_k\right)dx^l. \tag{5.7}$$

(5.6)- hám (5.7)-ańlatpalardaǵı kawsırmalardıń ishinde turǵan ańlatpalar tenzorlar bolıp tabıladı, sebebi dx^i vektorına kóbeygennen keyin olar jáne vektordı beredi. Álbette olar vektordan alınǵan tuwındı túsinigin iymek sızıqlı koordinatalarǵa biz izlep atırǵan ulıwmalastırıwdı amelge asıratuǵın tenzorlar bolıp tabıladı. Bul tenzorlar A^l hám A_i

---

[24] Γ^i_{kl} yamasa $\Gamma_{i,ki}$ belgilewleriniń ornına geyde sáykes $\begin{Bmatrix} kl \\ i \end{Bmatrix}$ hám $\begin{bmatrix} kl \\ i \end{bmatrix}$ belgilewleri de paydalanıladı.

vektorlarınıń sáykes *kovariant tuwındıları* dep ataladı. Bizler olardı $A^i_{;k}$ hám $A_{i;k}$ arqalı belgileymiz. Solay etip

$$DA^i = A^i{}_{;i}dx^i, \;\; DA_i = A_{i;i}dx^l, \tag{5.8}$$

al kovariant tuwındılardıń ózleri

$$A^i{}_{;i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl}A^k, \tag{5.9}$$

$$A_{i;l} = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il}A_k. \tag{5.10}$$

Galiley koordinatalarında $\Gamma^i_{kl} = 0$ hám kovariant tuwındılar ádettegi tuwındılarǵa ótedi.

Tenzordıń kovariant tuwındısın da ańsat anıqlawǵa boladı. Dunıń ushın sheksiz kishi parallel kóshiriwdegi tenzordıń ózgerisin anıqlaw kerek. Mısal retinde eki kontravariant A^iB^k vektorlarınıń kóbeymesi bolıp tabılatuǵın qanday da bir kontravariant tenzordı qaraymız. Parallel kóshiriwde

$$\delta(A^iB^k) = A^i\delta B^k + B^k\delta A^i = -A^i\Gamma^k_{lm}B^l dx^m - B^k\Gamma^i_{lm}A^l dx^m$$

ańlatpasına iye bolamız. Bul túrlendiriwdiń sızıqlı ekenligine baylanıslı ol (bunday túrlendiriw) qálegen A^{ik} tenzorı ushın orın aladı:

$$\delta A^{ik} = -(A^{lm}\Gamma^k_{ml} + A^{mk}\Gamma^i_{ml})dx^l. \tag{5.11}$$

Bunı

$$DA^{ik} = dA^{ik} - \delta A^{ik} \equiv A^{ik}{}_{;l}dx^l$$

teńligine qoyıp A^{ik} tenzorınıń kovarinat tuwındısın

$$A^{ik}{}_{;l} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ml}A^{mk} + \Gamma^k_{ml}A^{ik} \tag{5.12}$$

túrinde alamız.

Tap usınday jollar menen aralas hám kovariant tenzorlardıń kovariant tuwındıların tabamız:

$$A^i{}_{k;l} = \frac{\partial A^i_k}{\partial x^l} - \Gamma^m_{kl}A^i_m + \Gamma^i_{ml}A^m_k, \tag{5.13}$$

$$A_{ik;l} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma^m_{il}A_{mk} - \Gamma^m_{kl}A_{lm}. \tag{5.14}$$

Usınday jollar menen qálegen rangadaǵı ıqtıyarlı tenzordıń kovariant tuwındısın tabıw múmkin. Usınıń menen birge kovariant differenciallawdıń mınaday qaǵıydası alınadı: $A^{\cdots}_{\cdots}$

tenzorınıń x^l boyınsha kovariant tuwındısın alıw ushın ádettegi $\partial A^{\cdots}_{\cdots}/\partial x^l$ tuwındısında hár bir $i(A^{\cdot\cdot}_{.i.})$ kovariant indeksine $-\Gamma^k_{ii}A^{\cdot\cdot}_{.k.}$ ağzasın, al hár bir kontravariant $iA^{.i.}_{\cdots}$ indeksine $+\Gamma^i_{kl}A^{.k.}_{\cdots}$ qosıw kerek.

Tuwındıdan kovariant tuwındı alıw qağıydasınıń tuwındıdan ádettegi tuwındı alıw menen birdey ekenligine ańsat iseniwge boladı. Bunday jağdayda φ skalyarınan alınğan kovariant tuwındını ádettegidey tuwındı dep túsiniw kerek, yağnıy skalyarlar ushın $\delta\varphi = 0$ hám sonlıqtan $D\varphi = d\varphi$ bolğanlıqtan $\varphi_k = \partial\varphi/\partial x^k$. Mısalı A_iB_k kóbeymesiniń kovariant tuwındısı mınağan teń:

$$(A_iB_k)_{;l} = A_{i;l}B_k + A_iB_{k;l}.$$

Kovariant tuwındılardan differenciallawdı kórsetetuğın indeksti kóterip biz kontravariant tuwındılar dep atalatuğın tuwındılardı alamız:

$$A_i^{;k} = g^{ki}A_{i;l},\ A^{i;k} = g^{kl}A^i_{;l}.$$

Endi Kristoffel simvolları ushın bir koordinatalar sistemasınan ekinshi koordinatalar sistemasına túrlendiriw formulaların alamız.

Bul formulalardı kovariant tuwındılardıń ishinen qálegenin anıqlaytuğın teńliktiń eki tárepineń de túrleniw nızamın salıstırıp hám bul nızamnıń teńliktiń eki bólimi ushın da birdey bolıwın talap etip alıwğa boladı. Ápiwayı esaplawlar mına formulağa alıp keledi:

$$\Gamma^i_{ki} = \Gamma'^m_{np}\frac{\partial x^i}{\partial x'^m}\frac{\partial x'^n}{\partial x^k}\frac{\partial x'^p}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x'^m}. \tag{5.15}$$

Bul formuladan Γ^i_{ki} shamalarınıń tek koordinatalardı sızıqlı túrlendiriwge qatnası boyınsha ğana tenzordıń qásiyetindey qásiyetke iye bolatuğınlığı kórinip tur [(5.15) tegi ekinshi ağza joğalğan jağdayda].

Bul ağzanıń k, l indekslerine qarata simmetriyalı ekenligin ańğaramız hám sonlıqtan ol $S^i_{kl} = \Gamma^i_{kl} + \Gamma^i_{lk}$ ayırması payda etilgende túsip qaladı. Demek ol tenzorlıq nızam boyınsha túrlenedi:

$$S^i_{kl} = S'^m_{np}\frac{\partial x^i}{\partial x'^m}\frac{\partial x'^n}{\partial x^k}\frac{\partial x'^p}{\partial x^l},$$

yağnıy tenzor bolıp tabıladı. Onı kenisliktiń *buralıw tenzorı* dep ataydı.

Endi ekvivalentlik principine tiykarlanğan ulıwmalıq salıstırmalıq teoriyasında buralıw tenzorınıń nolge teń bolıwınıń kerek ekenligin kórsetemiz. Haqıyqatında da, joqarıda aytılğanday, bul principke sáykes «Galiley» koordinatalar sistemasınıń orın alıwı shárt bolıp, bul sistemada Γ^i_{kl} shamaları hám soğan sáykes S^i_{kl} shamaları nolge teń boladı. S^i_{kl} tenzor bolğanlıqtan, bul tenzor bir sistemada nolge teń bolsa, onda ol basqa da qálegen sistemada da nolge teń boladı. Bul Kristoffel simvollarınıń tómengi indeksler boyınsha simmetriyalıq ekenligin ańlatadı:

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk}. \tag{5.16}$$

Bunday jağdayda

$$\Gamma_{i,kl} = \Gamma_{i,lk} \tag{5.17}$$

ekenligi óz-ózinen kórinip tur.

Ulıwma jaǵdayda barlıǵı bolıp 40 dana Γ^i_{kl} shaması bar boladı, solardıń ishinde i diń hár bir tórt mánisi ushın k menen l lerdiń 10 danadan hár qıylı jup mánisleri bar (k menen l lerdiń orınların almastırıp qoyǵandaǵı juplardı birdey dep qaraǵanda).

(5.15)-formula joqarıda aytılǵan (5.16) shárti orın alǵanda aldan-ala berilgen qálegen noqatta barlıq Γ^i_{kl} ler nolge teń bolatuǵın koordinata sistemasın saylap alıwǵa boladı dep aytılgan tastıyıqlawdı dálillewge múmkinshilik beredi (bunday sistemanı *lokallıq inerciallıq* yamasa *lokallıq geodeziyalıq* dep ataydı)[25].

Haqıyqatında da meyli berilgen noqat koordinata bası sıpatında saylap alıngan bolsın hám bkl sistemada Γ^i_{kl} ler x^i koordinatalarında dáslep $\left(\Gamma^i_{kl}\right)_0$ mánislerine iye bolǵan bolsın. Usı noqat átirapında

$$x'^i = x^i + \frac{1}{2}\left(\Gamma^i_{kl}\right)_0 x^k x^l \tag{5.18}$$

túrlendiriwin ámelge asıramız. Onda

$$\left(\frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^l}\frac{\partial x^i}{\partial x'^m}\right)_0 = \left(\Gamma^i_{kl}\right)_0 \tag{5.19}$$

hám (5.15) ke sáykes Γ'^m_{np} lerdiń barlıǵı da nolge aylanadı.

(5.16)-shárttin áhmiyetiniń úlken ekenligin atap ótemiz: (5.19)-teńliktiń shep tárepindegi ańlatpa k jáne l indekslerine qarata simmetriyalı, sonlıqtan teńliktiń oń tárepi de usı indekslerge qarata simmetriyalı bolıwı kerek.

(5.18)-túrlendiriw ushın

$$\left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\right)_0 = \delta^i_k$$

ekenligin ańlaymız hám sonlıqtan ol berligen noqattaǵı hesh bir tenzordıń mánislerin ózgertpeydi (sonıń ishinde g_{ik} tenzorınıń da). Solay etip Kristoffel simvollarınıń nolge aylanıwı g_{ik} tenzorınıń Galiley túrine alıp keliniwi menen bir waqıtta ámelge asadı eken.

Kristoffel simvolları menen metrlik tenzor arasındaǵı baylanıs

Metrlik tenzor g_{ik} dan alıngan kovariant tuwındınıń nolge teń ekenligin dálilleymiz. Bunıń ushın DA_i vektorı hám qálegen vektor ushın

$$DA_i = g_{ik}DA^k$$

qatnasınıń orın alatuǵınlıǵınlıǵın ańgaramız. Ekinshi tárepten $A_i = g_{ik}A^k$ hám sonlıqtan

---

[25] Eger koordinata sisteması sáykes túrde saylap alınsa Γ^i_{kl} diń tek berilgen noqatta emes, al berilgen dúnyalıq sızıqtıń boyı boyınsha da nolge teń bolatuǵınlıǵın kórsetiw múmkin (usı tastıyıqlawdıń dálilin 1964-jılı «Nauka» baspasınan shıqqan P.K.Rashevskiydiń «Rimanova geometriya i tenzornıy analiz» kitabınıń 91-paragrafınan tabıwǵa boladı.

$$DA_i = D(g_{ik}A^k) = g_{lk}DA^k + A^kDg_{ik}.$$

$DA_i = g_{ik}DA^k$ menen salıstırıp A^i vektorınıń ıqtıyarlılıǵına iye bolamız:

$$Dg_{ik} = 0.$$

Sonlıqtan kovariant tuwındı da

$$g_{ik;l} = 0. \tag{6.1}$$

Solay etip kovariant differenciallawda g_{ik} lardı turaqlı shama sıpatında karaw kerek.

$g_{ik;\,l} = 0$ teńligin Γ^i_{kl} Kristoffel simvolların metrlik tenzor g_{ik} arqalı ańlatıw ushın paydalanıwǵa boladı. Bunıń ushın (5.14) ulıwmalıq anıqlaması boyınsha jazamız:

$$g_{ik;\,l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{mk}\Gamma^m_{il} - g_{im}\Gamma^m_{kl} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{k,il} - \Gamma_{i,kl} = 0.$$

Solay etip g_{ik} dan alınǵan tuwındılar Kristoffel simvolları arqalı ańgartıladı eken[26]. i , k, l indeksleriniń orınların almastırıp qoyıw arqalı bul tuwındılardı jazamız:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \Gamma_{k,il} + \Gamma_{i,kl}, \quad \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} = \Gamma_{i,kl} + \Gamma_{l,ik}, \quad -\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = -\Gamma_{l,ki} - \Gamma_{k,li}.$$

Bul teńliklerden yarım summa alıp ($\Gamma_{i,\ kl} = \Gamma_{i,\ lk}$ ekenligin názerde tutıp)

$$\Gamma_{i,\ kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right) \tag{6.2}$$

ekenligin tabamız. Bunnan $\Gamma^i_{kl} = g^{im}\Gamma_{m,kl}$ simvolları ushın

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right) \tag{6.3}$$

ańlatpasına iye bolamız.

Bul formulalar biz izlep atırǵan metrlik tenzor arqalı ańlatılǵan Kristoffer simvollarınıń ańlatpaları bolıp tabıladı.

Bunnan keyingi tallawlar ushın paydalı bolǵan Γ^i_{kl} Kristoffel simvollarınıń ápiwayılastırılǵan túrin keltirip shıǵaramız. Bunıń ushın g_{ik} tenzorınıń kurawshılarınan turatuǵın g anıqlawshısınıń dg differencialın anıqlaymız. dg nı g_{ik} tenzorınıń hár bir qurawshısınan differencial alıp hám onı anıqlawshıdaǵı óziniń koefficientine kóbeytiw arqalı (yaǵnıy sáykes minorǵa kóbeytiw arqalı) alıw múmkin. Ekinshi tárepten g_{ik} tenzorına keri bolǵan g^{ik} tenzorınıń qurawshılarınıń g_{ik} shamalarınıń anıqlawshısınıń minorın usı anıqlawshıǵa bólgenge teń ekenligi belgili. Sonlıqtan g anıqlawshısınıń minorları gg^{ik} ǵa teń. Solay etip

[26] Lokallıq-geodeziyalıq koordinatalar sistemasın saylap alıw berilgen toqatta metrlik tenzordıń kurawshılarınıń birinshi tuwındılarınıń barlıǵınıń nolge aylanıwın bildiredi.

$$dg = gg^{ik}dg_{ik} = -gg^{ik}dg^{ik} \tag{6.4}$$

(sebebi $g_{ik}g^{ik} = \delta^i_l = 4$, sonlıqtan $g_{ik}g^{ik} = -g_{ik}dg^{ik}$).

(6.3) ten iye bolamız:

$$\Gamma^l_{ki} = \frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^m}\right).$$

Qawsırmadağı úshinshi hám birinshi ağzalardağı m hám i indeksleriniń ornın almastırıp biz sol eki ağzanıń óz-ara qısqaratuğınlığın kóremiz. Sonıń ushın

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2}g^{im}\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k}$$

yamasa (6.4) ke sáykes

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^k}. \tag{6.5}$$

$g^{kl}\Gamma^i_{kl}$ shamaları ushın ańlatpanı da ańğarğan paydalı. Usığan sáykes iye bolamız:

$$g^{kl}\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2}g^{kl}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right) = g^{kl}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right).$$

(6.4) tiń járdeminde bunı mına túrge túrlendiriwge boladı:

$$g^{kl}\Gamma^i_{ki} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}g^{ik})}{\partial x^k}. \tag{6.6}$$

Hár qıylı esaplawlarda g^{ik} kontravariant tenzorınan alınğan tuwındılardıń g_{ik} dan alınğan tuwındılar menen

$$g_{il}\frac{\partial g^{lk}}{\partial x^m} = -g^{ik}\frac{\partial g_{il}}{\partial x^m} \tag{6.7}$$

ańlatpası arqalı baylanıslı ekenligin názerde tutqan paydalı (bul $g_{il}g^{lk} = \delta^k_l$ teńligin differenciallağanda alınadı). Aqırında g^{ik} alıngan tuwındılardıń Γ^i_{kl} shamaları arqalı ańlatılıwınıń múmkin emes ekenligin kórsetemiz. Atap aytqanda $g^{ik}{}_{;l} = 0$ teńliginen

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = -\Gamma^i_{ml}g^{mk} - \Gamma^k_{mi}g^{im} \tag{6.8}$$

ekenligi kelip shığadı.

Alınǵan formulalar járdeminde vektordıń iymek sızıqlı koordinatalarǵa divergenciyasınıń ulıwmalastırılıwı bolıp tabılatuǵın $A^i_{;i}$ ushın jazılǵan ańlatpanı qolaylı túrge keltiriw múmkin. (6.5) ti paydalanıp

$$A^i_{;i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{li} A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + A^l \frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^l}$$

ańlatpasına iye bolamız yamasa aqırında

$$A^i_{;i} = \frac{1}{\ln\sqrt{-g}} \frac{\partial(\ln\sqrt{-g}A^i)}{\partial x^l} \qquad (6.9)$$

formulasın alamız.

Tap sol sıyaqlı ańlatpanı antisimmetriyalı tenzor A^{ik} nıń divergenciyası ushın da alıwǵa boladı. (5.12) den iye bolamız:

$$A^{ik}_{;k} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{mk} A^{mk} + \Gamma^k_{mk} A^{im}.$$

Biraq $A^{mk} = - A^{km}$ bolǵanlıqtan

$$\Gamma^i_{mk} A^{mk} = -\Gamma^i_{km} A^{km} = 0.$$

Demek, Γ^k_{mk} ushın jazılǵan (6.5) ańlatpasın qoyıp

$$A^{ik}_{;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}A^{ik})}{\partial x^k} \qquad (6.10)$$

ekenligin tabamız.

Endi meyli A_{ik} simmetriyalı tenzor bolsın. Onıń aralas kurawshıları ushın $A^k_{i;k}$ ańlatpanı anıqlaymız. Iye bolamız

$$A^k_{i;k} = \frac{\partial A^k_i}{\partial x^k} + \Gamma^k_{lk} A^l_i - \Gamma^l_{ik} A^k_l = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(A^k_i\sqrt{-g})}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ki} A^k_l.$$

Bul ańlatpadaǵı aqırǵı aǵza

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\right) A^{kl}.$$

shamasına teń. A^{kl} tenzorınıń simmetriyasına sáykes qawsırmadaǵı eki aǵza bir biri menen jıyısadı hám

$$A^k_{i;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}A^k_i)}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} A^{kl}. \qquad (6.11)$$

ańlatpası kaladı.

Dekart koordinatalarında $\frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}$ antisimmetriyalı tenzor bolıp tabıladı. Iymek sızıqlı koordinatalarda ol $A_{i;k} - A_{k;i}$ tenzorı túrine iye. Biraq $A_{i;k}$ ushın ańlatpalardıń járdeminde hám $\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk}$ ekenligin itibarǵa alıp iye bolamız:

$$A_{i;k} - A_{k;i} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}. \qquad (6.12)$$

Eń aqırında iymek sızıqlı koordinatalarǵa bazı bir φ skalyarınıń ekinshi tuwındısı bolǵan $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x^i}$ shamalarınıń summasın túrlendiremiz. Iymek sızıqlı koordinatalarda bul summanıń $\varphi^{;i}_{;i}$ ge ótetuǵınlıǵı anıq. Biraq $\varphi_{;\,I} = \partial\varphi/\partial x^i$, sebebi skalyardıń kovariant differenciallawı sıpatnda ádettegi differenciallawǵa alıp kelinedi. i indeksin kóterip, iye bolamız:

$$\varphi^{;i} = g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}$$

hám (6.9)-formulanıń járdeminde alamız

$$\varphi^{;i}_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}\right). \qquad (6.13)$$

Vektordan giperbet boyınsha integraldı 4 kólem boyınsha integralǵa túrlendiriw ushın túrlendiriw ushın (17) Gauss teoremesınıń (6.9) ǵa sáykes

$$\oint A^i \sqrt{-g} dS_i = \int A^i_{;i} \sqrt{-g} d\Omega \qquad (6.14)$$

túrinde jazılatuǵınan ańǵarǵan paydalı.

Paydalanılǵan ádebiyatlar dizimi

1. L.D.Landau, E.M.Lifshic. Teoretiчeskaya fizika. Uчebnoe posobie dlya vuzov. V. 10 t. Tom II. Teoriya polya. 8-e izdanie. Izdatelstvo "FIZMATLIT". Moskva. 2003. 536 s. Glava XIV. §§ 111-114.
2. Lewis Ryder. Introduction to General Relativity. Cambridge University Press. 2009. 441 p.